Лекция 2

Теорема о ранге матрицы. — Ранг произведения матриц. — Теорема Кронекера — Капелли. — Решение систем линейных уравнений.

Ответ на поставленный в конце предыдущей лекции вопрос о рациональном методе вычисления ранга множества векторов зависит, естественно, от способа задания этих векторов. Мы рассмотрим лишь один, но зато самый важный вариант, когда векторы задаются их координатами в некотором базисе. Это все равно, что считать наши векторы принадлежащими пространству векторов-строк K^n.

Итак, пусть нам даны m векторов

$$\begin{aligned} a_1 &= (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_m &= (a_{m1}, \ldots, a_{mn}) \end{aligned} \tag{1}$$

пространства K^n. Расположив компоненты этих векторов в виде прямоугольной матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

мы можем переформулировать интересующую нас задачу в следующем виде:

Дана прямоугольная матрица (2). Чему равен ранг множества ее строк?

В этой формулировке мы и будем ее решать.

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \min(m, n)$. Выбрав в матрице A произвольным образом p строк и p столбцов и рассмотрев элементы, находящиеся на их пересечении, мы получим квадратную «подматрицу», имеющую p строк и p столбцов. Определители таких подматриц называются *минорами порядка* p матрицы A.

Определение 1. Наивысший порядок отличных от нуля миноров, т. е. такое число p, что в матрице A нет отличного от нуля минора порядка $p+1$, но есть такой минор порядка p, называется *рангом* матрицы A.

Заметим, что если все миноры порядка $p+1$ равны нулю, то все миноры порядка $p+2$ также равны нулю, поскольку по формуле разложения определителей любой

минор порядка $p+2$ является линейной комбинацией миноров порядка $p+1$. Равны нулю, конечно, и все миноры большего порядка.

Ясно, что ранг p матрицы (2) удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant p \leqslant \min(m, n),$$

причем $p=0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю.

Перебирая один за другим миноры все больших и больших порядков, мы в конечное число шагов всегда можем вычислить ранг произвольной матрицы. Поэтому ответ на поставленный выше вопрос дает следующая теорема:

Теорема 1 (о ранге матрицы). *Ранг p произвольной матрицы равен рангу r множества ее строк:*

$$p=r.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что при любой перестановке строк или столбцов матрицы A множество всех ее миноров каждого порядка биективно отображается на множество миноров того же порядка преобразованной матрицы, причем отличные от нуля миноры переходят в отличные от нуля миноры. Следовательно, при каждой такой перестановке ранг p матрицы A не меняется.

Что происходит с рангом строк? Ясно, что при перестановке строк он не меняется. Перестановка же столбцов сводится к одновременному переобозначению компонент всех векторов (1), от чего все имеющиеся между этими векторами (или между частью их) линейные зависимости очевидным образом не меняются. Поэтому ранг r множества строк матрицы A при любой перестановке столбцов также остается прежним.

Поскольку перестановкой строк и столбцов мы можем добиться того, чтобы отличный от нуля минор порядка p матрицы A оказался в левом верхнем углу, отсюда следует, что при доказательстве равенства $p=r$ мы можем без ограничения общности предполагать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если бы теперь первые p строк матрицы A были линейно зависимы, то строки определителя Δ также, оче-

видно, оказались бы линейно зависимы и потому определитель был бы равен нулю. Это доказывает, что *строки* $a_1, \ldots, a_p$ *матрицы* A *линейно независимы, и, следовательно,* $p \leqslant r$.

Поэтому для доказательства равенства $p = r$ достаточно установить, что *любая строка* a_i *с* $i > p$ *линейно выражается через строки* $a_1, \ldots, a_p$.

С этой целью мы рассмотрим следующий определитель порядка $p+1$:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} & a_{1j} \\ a_{21} & \ldots & a_{2p} & a_{2j} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1} & \ldots & a_{pp} & a_{pj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ip} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

где $1 \leqslant j \leqslant n$. Если $1 \leqslant j \leqslant p$, то определитель (3) имеет два одинаковых столбца и потому равен нулю. Если же $p+1 \leqslant j \leqslant n$, то определитель (3) представляет собой минор матрицы A порядка $p+1$ (получающий выбором первых p строк и столбцов и, кроме того, j-го столбца и i-й строки) и потому также равен нулю. Следовательно, разложив этот определитель по элементам последнего столбца, мы при любом $j = 1, \ldots, n$ получим равенство вида

$$(4) \qquad A_1 a_{1j} + A_2 a_{2j} + \ldots + A_p a_{pj} + \Delta a_{ij} = 0,$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_p, \Delta$ — алгебраические дополнения элементов этого столбца. Эти алгебраические дополнения зависят только от элементов, находящихся в первых p столбцах определителя (3), и, в частности, одни и те же для всех j. Поэтому в векторной записи n равенств (4) равносильны одному равенству вида

$$A_1 \boldsymbol{a}_1 + A_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + A_p \boldsymbol{a}_p + \Delta \boldsymbol{a}_i = 0.$$

Поскольку, по условию, $\Delta \neq 0$, это доказывает, что вектор $\boldsymbol{a}_i$, $p+1 \leqslant i \leqslant n$, линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$. Следовательно, $r = p$. □

Изложенное доказательство показывает, в частности, что *если в матрице* A *имеется отличный от нуля минор порядка* p, *обладающий тем свойством, что все «окаймляющие» его миноры порядка* $p+1$ *равны нулю, то ранг матрицы равен* p.

Это замечание существенно упрощает, конечно, вычисление ранга.

В частном случае, когда матрица A квадратная, а ее ранг равен ее порядку, мы получаем

Следствие. *Определитель тогда и только тогда отличен от нуля, когда его строки линейно независимы.* □

Ясно, что при транспонировании матрицы A ранг p не меняется. Вместе с тем ранг строк транспонированной матрицы равен рангу столбцов исходной матрицы. Это доказывает, что *ранг множества строк произвольной матрицы равен рангу множества ее столбцов.*

Удивительный результат, связывающий ранги семейств векторов двух линейных пространств, имеющих, вообще говоря, даже различные размерности!

Что происходит с рангом при умножении матриц?

Пусть A — матрица, имеющая (как и выше) n столбцов и m строк, а B — матрица, имеющая n строк и s столбцов. Тогда определена матрица AB, имеющая m строк и s столбцов. Если $r(A)$ — ранг матрицы A и $r(B)$ — ранг матрицы B, то что можно сказать о ранге $r(AB)$ матрицы AB?

Оказывается, что в общем случае можно лишь утверждать, что ранг $r(AB)$ не превосходит наименьшего из рангов $r(A)$ и $r(B)$:

Предложение 1. *Имеют место неравенства*

$$r(AB) \leqslant r(A), \qquad r(AB) \leqslant r(B).$$

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} \end{Vmatrix}, \quad AB = \begin{Vmatrix} c_{11} & \dots & c_{1s} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \dots & c_{ms} \end{Vmatrix}.$$

По определению умножения матриц

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}, \qquad i = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, s.$$

Введем в рассмотрение векторы-строки матриц B и C:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}_1 &= (b_{11}, \dots, b_{1s}), & \boldsymbol{c}_1 &= (c_{11}, \dots, c_{1s}), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{b}_n &= (b_{n1}, \dots, b_{ns}), & \boldsymbol{c}_m &= (c_{m1}, \dots, c_{ms}). \end{aligned}$$

Тогда формулы для c_{ik} можно будет переписать в следующем виде:

$$\boldsymbol{c}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{b}_j, \qquad i = 1, \dots, m,$$

означающем, что векторы $c_1, \ldots, c_m$ линейно выражаются через векторы $b_1, \ldots, b_n$. Следовательно,

$$[c_1, \ldots, c_m] \subset [b_1, \ldots, b_n],$$

и потому

$$\dim [c_1, \ldots, c_m] \leqslant \dim [b_1, \ldots, b_n],$$

т. е., по теореме о ранге матрицы, $r(AB) \leqslant r(B)$.

Неравенство $r(AB) \leqslant r(A)$ доказывается аналогично (следует только вместо строк рассмотреть столбцы). Впрочем, его можно вывести из уже доказанного неравенства, если воспользоваться тем, что при транспонировании ранг не меняется и $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. Действительно,

$$r(AB) = r((AB)^{\mathrm{T}}) = r(B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}) \leqslant r(A^{\mathrm{T}}) = r(A). \ \square$$

В случае, когда одна из матриц A или B является квадратной и невырожденной, можно доказать более точный результат:

Предложение 2. *Если B — квадратная ($n = s$) и невырожденная* ($\det B \neq 0$) *матрица, то для любой матрицы A*

$$r(AB) = r(A).$$

Аналогично, если A — квадратная ($n = m$) и невырожденная ($\det A \neq 0$) *матрица, то для любой матрицы B*

$$r(AB) = r(B).$$

Короче, при умножении на невырожденную матрицу ранг матрицы не меняется.

Доказательство. Для невырожденной матрицы B существует обратная матрица B^{-1} и $A = (AB)B^{-1}$. Поэтому, согласно предложению 1,

$$r(A) = r((AB)B^{-1}) \leqslant r(AB).$$

Следовательно, $r(A) = r(AB)$. Равенство $r(B) = r(AB)$ для невырожденной матрицы A доказывается аналогично. $\square$

Теорема о ранге матрицы позволяет не только эффективно вычислять ранги и находить максимальные линейно независимые подмножества, но с ее помощью можно, например, устанавливать, выражается ли данный вектор b через данные векторы $a_1, \ldots, a_m$, без того, чтобы в явном виде находить коэффициенты линейной зависимости.

Действительно, очевидно, что *вектор* $\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда линейно выражается через векторы* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, когда каждое максимальное линейно независимое подмножество множества $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ является максимальным линейно независимым подмножеством и расширенного множества $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ и, значит, *когда ранг множества* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ *равен рангу множества* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$.

Полезно этот факт переформулировать на языке теории линейных уравнений. Если

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}_1 = (a_{11}, \ \ldots, \ a_{1n}),\\ \cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{a}_m = (a_{m1}, \ \ldots, \ a_{mn}),\\ \boldsymbol{b} = (b_1, \ \ldots, \ b_n),\end{gathered}$$

то векторное равенство

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + \ \ldots \ + x_m\boldsymbol{a}_m = \boldsymbol{b} \tag{5}$$

равносильно n числовым равенствам

$$\begin{gathered}a_{11}x_1 + \ \ldots \ + a_{m1}x_m = b_1,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1 + \ \ldots \ + a_{mn}x_m = b_n.\end{gathered} \tag{6}$$

Соотношения (6) представляют собой систему n неоднородных линейных уравнений от m неизвестных. Эта система *совместна*, т. е. обладает хотя бы одним решением $x_1, \ldots, x_m$, тогда и только тогда, когда имеет место равенство (5), т. е. когда вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$.

С другой стороны, по теореме 1 ранг множества векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ равен рангу *матрицы коэффициентов*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix} \tag{7}$$

системы (6), а ранг множества векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}$ равен рангу *расширенной матрицы коэффициентов*

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} & b_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

получающейся из матрицы (7) добавлением столбца свободных членов.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 2 (теорема Кронекера—Капелли). *Система линейных уравнений* (6) *тогда и только*

тогда совместна, когда ранг матрицы ее коэффициентов (7) *равен рангу расширенной матрицы* (8). □

Пусть система (6) совместна. Как найти все ее решения?

Пусть r — ранг матрицы (7). Переставив уравнения и переименовав (если нужно) неизвестные, мы без ограничения общности можем считать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{r1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1r} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{9}$$

Так как система (6) по условию совместна, то по теореме Кронекера — Капелли ранг матрицы (8) также равен r. Это означает (ввиду условия (9)), что первые r строк матрицы (8) (т. е. первые r уравнений (6)) линейно независимы и любая другая строка матрицы (8) (любое другое уравнение (6)) является их линейной комбинацией. Поэтому система (6) равносильна системе

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{r1}x_r + \dots + a_{m1}x_m = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1r}x_1 + \dots + a_{rr}x_r + \dots + a_{mr}x_m = b_r, \end{matrix} \tag{10}$$

состоящей из ее первых r уравнений, т. е. любое решение системы (6) будет решением системы (10) и, наоборот, любое решение системы (10) будет решением системы (6). Таким образом, все свелось к решению системы (10), состоящей из линейно независимых уравнений.

Чтобы решить эту систему, мы перепишем ее в виде

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{r1}x_r = b_1 - a_{r+1,\,1}x_{r+1} - \dots - a_{m1}x_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1r}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{r+1,\,r}x_{r+1} - \dots - a_{mr}x_m. \end{matrix} \tag{11}$$

Если мы дадим неизвестным $x_{r+1}, \dots, x_m$ произвольные значения, то система (11) превратится в систему r уравнений от r неизвестных $x_1, \dots, x_r$ с отличным от нуля (в силу (9)) определителем Δ. Поэтому по известным из курса алгебры формулам Крамера мы можем единственным образом найти неизвестные $x_1, \dots, x_r$. Ясно, что этот прием даст нам *все* решения системы (10) (т. е. системы (6)).

На практике, конечно, нет нужды в предварительной перестановке уравнений и в переименовании неизвестных. Процедура решения произвольной системы линейных уравнений (6) состоит поэтому в следующем:

Этап 1. Вычисляя миноры матрицы коэффициентов (7), находим ее ранг r, одновременно обнаруживая хотя бы один отличный от нуля минор Δ порядка r.

Этап 2. Окаймляя найденный минор в матрице (8), убеждаемся, что ранг этой матрицы также равен r. (Если он больше r, т. е. равен $r+1$, то система (6) несовместна.) На этом этапе достаточно, очевидно, вычислить только $n-r$ миноров порядка $r+1$.

Этап 3. В минор Δ входят коэффициенты при r неизвестных в r уравнениях. Оставляя только эти уравнения, придавая остальным $n-r$ неизвестным произвольные значения и, следовательно, получая систему r уравнений от r неизвестных с отличным от нуля определителем, решаем эту систему по формулам Крамера. Тем самым мы найдем значения и остальных r неизвестных.

Полученные на этапе 3 значения неизвестных $x_1, \ldots, x_m$ являются решениями системы (6), и любое решение этой системы может быть так получено.