Лекция 3

Прямые суммы подпространств. — Разложение пространства в прямую сумму подпространств. — Факторпространства. — Гомоморфизмы линейных пространств. — Прямые суммы пространств.

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — подпространства линейного пространства $\mathcal{V}$. Напомним, что их сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ состоит из всех векторов вида $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$.

Определение 1. Подпространство $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ называется *прямой суммой* подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, если каждый его вектор единственным образом представляется в виде $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$.

В этом случае вместо $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ пишут $\mathcal{P}\oplus\mathcal{Q}$ или $\mathcal{P}\dot{+}\mathcal{Q}$.

Предложение 1. *Подпространство $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ тогда и только тогда является прямой суммой подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$, когда эти подпространства дизъюнктны, т. е. $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=\mathbf{0}$.*

Доказательство. Если имеет место равенство $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1$, где $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}_1\in\mathcal{P}$ и $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}_1\in\mathcal{Q}$, то вектор $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}$ лежит в $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$. Поэтому, если $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=\mathbf{0}$, то $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1$, т. е. представление каждого вектора из $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ в виде $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$, единственно. Обратно, если $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}\neq\mathbf{0}$ и $\boldsymbol{a}\in\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}$, $\boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}$, то для любых векторов $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$ будет иметь место равенство

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}),$$

где $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a}\in\mathcal{P}$ и $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{a}\in\mathcal{Q}$, показывающее, что представление векторов из $\mathcal{P}+\mathcal{Q}$ в виде $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$, не единственно. □

Имеет смысл, конечно, говорить и о прямой сумме произвольного числа подпространств. Например, сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ трех подпространств называется прямой, если представление каждого вектора из $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ в виде $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$, где $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$, $\boldsymbol{z}\in\mathcal{R}$, единственно. По аналогии с предложением 1 хочется думать, что для этого необходима и достаточна попарная дизъюнктность пространств $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$. *Это неверно.* Например, для любых двух неколлинеарных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ подпространства $\mathcal{P}=[\boldsymbol{a}]$, $\mathcal{Q}=[\boldsymbol{b}]$, $\mathcal{R}=[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}]$ попарно дизъюнктны, но тем не менее их сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ прямой не является.

Правильное условие того, что сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ является прямой суммой, дается следующим предложением:

Предложение 2. *Сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ трех подпространств тогда и только тогда является их прямой суммой, когда каждое из них дизъюнктно с суммой двух других:*

$$(1)\quad \mathcal{P}\cap(\mathcal{Q}+\mathcal{R})=0,\quad \mathcal{Q}\cap(\mathcal{P}+\mathcal{R})=0,\quad \mathcal{R}\cap(\mathcal{P}+\mathcal{Q})=0.$$

Доказательство. Если имеет место равенство $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{z}_1$, где $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}_1\in\mathcal{Q}$, $\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}_1\in\mathcal{R}$, то $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_1=(\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{z}_1-\boldsymbol{z})\in\mathcal{P}\cap(\mathcal{Q}+\mathcal{R})$. Поэтому, если $\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{x}$, то $\mathcal{P}\cap(\mathcal{Q}+\mathcal{R})\neq 0$. Аналогично, если $\boldsymbol{y}_1\neq\boldsymbol{y}$, то $\mathcal{Q}\cap(\mathcal{P}+\mathcal{R})\neq 0$, а если $\boldsymbol{z}_1\neq\boldsymbol{z}$, то $\mathcal{R}\cap(\mathcal{P}+\mathcal{Q})\neq 0$. Таким образом, если сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ не прямая, то не все условия (1) выполнены. Обратно, если, например, $\mathcal{P}\cap(\mathcal{Q}+\mathcal{R})\neq 0$ и $\boldsymbol{a}\in\mathcal{P}\cap(\mathcal{Q}+\mathcal{R})$, $\boldsymbol{a}\neq 0$, то для любых векторов $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$, $\boldsymbol{z}\in\mathcal{R}$ имеет место равенство

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{c}),$$

где $\boldsymbol{b}\in\mathcal{Q}$, $\boldsymbol{c}\in\mathcal{R}$ — такие векторы, что $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, и потому сумма $\mathcal{P}+\mathcal{Q}+\mathcal{R}$ не является прямой. □

Конечно, аналогичное предложение справедливо и для сумм любого числа подпространств.

Особо важное значение имеет случай, когда $\mathcal{P}\oplus\mathcal{Q}=\mathcal{V}$. В этом случае говорят, что пространство $\mathcal{V}$ *разложено в прямую сумму* подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Рассмотрим следующие свойства подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$:

1° Любой вектор из $\mathcal{V}$ имеет вид $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}$, $\boldsymbol{y}\in\mathcal{Q}$, т. е. $\mathcal{V}=\mathcal{P}+\mathcal{Q}$.

2° Подпространства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ дизъюнктны, т. е. $\mathcal{P}\cap\mathcal{Q}=0$.

3° Сумма размерностей подпространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ равна размерности пространства $\mathcal{V}$:

$$\dim\mathcal{P}+\dim\mathcal{Q}=\dim\mathcal{V}.$$

Предложение 3. *Любые два из свойств 1°, 2°, 3° влекут третье.*

Доказательство. Если имеют место свойства 1° и 2°, то по теореме о размерности суммы (см. теорему 1

лекции 1)

$$\dim \mathscr{V} = \dim (\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = \\ = \dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q} - \dim (\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = \dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q}.$$

Если имеют место свойства 1° и 3°, то по той же теореме

$$\dim (\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}) = \dim (\mathscr{P} + \mathscr{Q}) - \dim \mathscr{P} - \dim \mathscr{Q} = \\ = \dim \mathscr{V} - \dim \mathscr{P} - \dim \mathscr{Q} = 0,$$

значит, $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = 0$.

Если имеют место свойства 2° и 3°, то снова по той же теореме

$$\dim (\mathscr{P} + \mathscr{Q}) = \dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q} = \dim \mathscr{V},$$

и, значит, $\mathscr{P} + \mathscr{Q} = \mathscr{V}$. □

Согласно предложению 1 свойства 1° и 2° означают, что $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$. Тем самым доказано

Следствие. *Равенство $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$ имеет место тогда и только тогда, когда выполнены любые два из свойств* 1°, 2°, 3° (*а значит, и третье свойство*).

Определение 2. Если $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$, то подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ называются *дополнительными*.

Предложение 4. *Если подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ дополнительны, то для любого базиса $e_1, \ldots, e_p$ подпространства $\mathscr{P}$ и любого базиса $e_{p+1}, \ldots, e_n$ подпространства $\mathscr{Q}$ векторы*

$$e_1, \ldots, e_p, \quad e_{p+1}, \ldots, e_n$$

составляют базис пространства $\mathscr{V}$.

Обратно, если произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ разбить на два подсемейства $e_1, \ldots, e_p$ и $e_{p+1}, \ldots, e_n$, то подпространства $\mathscr{P} = [e_1, \ldots, e_p]$ и $\mathscr{Q} = [e_{p+1}, \ldots, e_n]$ будут дополнительны.

Доказательство. В первом утверждении векторы $e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n$ составляют полное семейство, состоящее из $n = p + q$ векторов. Поэтому оно является базисом. Во втором утверждении подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ обладают указанными выше свойствами 1° и 3°. Поэтому $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{Q}$. □

Следствие. *Для любого подпространства $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$ существует дополнительное подпространство $\mathscr{Q}$.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_p$ — произвольный базис подпространства $\mathscr{P}$. Дополним этот базис

какими-то векторами $e_{p+1}, \ldots, e_n$ до базиса всего пространства $\mathscr{V}$. Тогда подпространство $Q = [e_{p+1}, \ldots, e_n]$ будет дополнительным к $\mathscr{P}$. □

Замечание 1. Полезно иметь в виду, что дополнительные векторы $e_{p+1}, \ldots, e_n$, порождающие подпространство Q, всегда можно выбрать среди векторов произвольного, наперед заданного базиса $a_1, \ldots, a_n$ пространства $\mathscr{V}$. Действительно, выбросив из семейства векторов

$$e_1, \ldots, e_p, \quad a_1, \ldots, a_n$$

все векторы, линейно выражающиеся через предыдущие, мы получим базис пространства $\mathscr{V}$, состоящий из векторов $e_1, \ldots, e_p$ и некоторых векторов из базиса $a_1, \ldots, a_n$. □

Видно, что дополнительное пространство Q строится с большим произволом. Оказывается, что существует конструкция, позволяющая этот произвол обойти (хотя бы и частично).

Пусть $\mathscr{P}$ — произвольное подпространство линейного пространства $\mathscr{V}$.

Определение 3. Векторы $x, y \in \mathscr{V}$ называются *сравнимыми по модулю* $\mathscr{P}$, если $x - y \in \mathscr{P}$. В этом случае пишут

$$x \equiv y \bmod \mathscr{P}.$$

Отношение сравнимости является, очевидно, отношением эквивалентности. Соответствующие классы сравнимых по модулю $\mathscr{P}$ векторов называются *смежными классами* пространства $\mathscr{V}$ по подпространству $\mathscr{P}$. Ясно, что класс, содержащий вектор x, состоит из всех векторов вида $x + a$, $a \in \mathscr{P}$. Мы будем его обозначать символом $x + \mathscr{P}$. Другое распространенное обозначение: $x \bmod \mathscr{P}$.

Легко видеть, что сравнения можно складывать и умножать на числа, т. е. если

$$x \equiv y \bmod \mathscr{P} \quad \text{и} \quad x_1 \equiv y_1 \bmod \mathscr{P},$$

то

$$x + x_1 \equiv y + y_1 \bmod \mathscr{P}$$

и

$$kx \equiv ky \bmod \mathscr{P}$$

для любого числа $k \in K$. Действительно, если $x - y \in \mathcal{P}$ и $x_1 - y_1 \in \mathcal{P}$, то $(x + x_1) - (y + y_1) = (x - y) + (x_1 - y_1) \in \mathcal{P}$, и, аналогично, $kx - ky = k(x - y) \in \mathcal{P}$. □

Для смежных классов это означает, что формулы

$$(x + \mathcal{P}) + (y + \mathcal{P}) = (x + y) + \mathcal{P} \tag{2}$$

и

$$k(x + \mathcal{P}) = kx + \mathcal{P} \tag{3}$$

корректно определяют их сумму и произведение на число.

Непосредственная проверка показывает, что эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Таким образом, по отношению к операциям (2) и (3) *множество всех смежных классов $\mathcal{V}$ по $\mathcal{P}$ является линейным пространством.*

Определение 4. Это пространство называется *факторпространством* пространства $\mathcal{V}$ по подпространству $\mathcal{P}$. Обозначается оно символом $\mathcal{V}/\mathcal{P}$.

В первом семестре в курсе алгебры аналогичная конструкция была подробно изучена для случая групп и колец.

Предложение 5. *Каждое подпространство $\mathcal{Q}$, дополнительное к подпространству $\mathcal{P}$, изоморфно факторпространству $\mathcal{V}/\mathcal{P}$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение φ: $\mathcal{Q} \to \mathcal{V}/\mathcal{P}$, определенное формулой

$$\varphi(x) = x + \mathcal{P}, \quad \text{где} \quad x \in \mathcal{Q}.$$

Если $\varphi(x) = \varphi(x_1)$, т. е. $x + \mathcal{P} = x_1 + \mathcal{P}$, то $x - x_1 \in \mathcal{P}$, и, значит, $x = x_1$. С другой стороны, любой вектор $z \in \mathcal{V}$ имеет вид $x + y$, где $x \in \mathcal{Q}$, $y \in \mathcal{P}$, и потому $z + \mathcal{P} = x + \mathcal{P}$. Этим доказано, что отображение φ биективно. Поскольку отображение φ, очевидно, сохраняет суммы и произведения на числа, оно является, следовательно, изоморфизмом. □

Геометрический факт, лежащий в основе предложения 5, состоит в том, что каждый смежный класс по $\mathcal{P}$ имеет с $\mathcal{Q}$ ровно один общий вектор.

Предложение 5 означает, что вместо дополнений $\mathcal{Q}$ мы можем рассматривать факторпространство $\mathcal{V}/\mathcal{P}$, конструкция которого никакого произвола не содержит.

Из предложения 5 вытекает, что

$$\dim \mathscr{V}/\mathscr{P} = \dim \mathscr{V} - \dim \mathscr{P}. \tag{4}$$

Действительно, $\dim \mathscr{V}/\mathscr{P} = \dim \mathscr{Q} = \dim \mathscr{V} - \dim \mathscr{P}$. □

Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — два линейных пространства.

Определение 5. Отображение

$$\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$$

называется *линейным отображением* или *гомоморфизмом* (а также просто *морфизмом*) линейных пространств, если оно сохраняет линейные операции, т. е. если

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

и

$$\varphi(kx) = k\varphi(x)$$

для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$ и любого числа $k \in \mathrm{K}$.

Таким образом, отличие гомоморфизмов от изоморфизмов состоит только в том, что гомоморфизм не обязан быть биективным отображением.

Определение 6. Совокупность всех векторов $x \in \mathscr{V}$, переходящих при гомоморфизме φ в нуль пространства $\mathscr{W}$, называется *ядром* гомоморфизма φ и обозначается символом $\operatorname{Ker}\varphi$. Таким образом,

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \in \mathscr{V};\ \varphi(x) = 0\}.$$

Определение 7. Совокупность всех векторов из $\mathscr{W}$, имеющих вид $\varphi(x)$, $x \in \mathscr{V}$, называется *образом* гомоморфизма φ и обозначается символом $\operatorname{Im}\varphi$:

$$\operatorname{Im}\varphi = \{y \in \mathscr{W};\ y = \varphi(x)\}.$$

Иногда $\operatorname{Im}\varphi$ обозначают также символом $\varphi(\mathscr{V})$ и называют *образом пространства* $\mathscr{V}$ при гомоморфизме φ.

Очевидно, что *множества* $\operatorname{Ker}\varphi$ *и* $\operatorname{Im}\varphi$ *являются подпространствами* (пространств $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ соответственно).

Факторпространство $\mathscr{W}/\operatorname{Im}\varphi$ обозначается символом $\operatorname{Coker}\varphi$ и называется *коядром* гомоморфизма φ.

Гомоморфизм φ называется *мономорфизмом*, если он является инъективным отображением, т. е. если $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ при $x \neq x_1$.

Гомоморфизм φ называется *эпиморфизмом*, если он отображает $\mathscr{V}$ на $\mathscr{W}$, т. е. если для любого вектора $y \in \mathscr{W}$ найдется такой вектор $x \in \mathscr{V}$, что $y = \varphi(x)$.

Таким образом, гомоморфизм φ тогда и только тогда представляет собой изоморфизм, когда он является одновременно мономорфизмом и эпиморфизмом.

По определению *гомоморфизм* φ *тогда и только тогда является эпиморфизмом, когда* $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{W}$, *т. е. когда* $\operatorname{Coker}\varphi = 0$.

Аналогично, легко видеть, что *гомоморфизм* φ *тогда и только тогда является мономорфизмом, когда* $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. Действительно, если $\varphi(x) = \varphi(x_1)$, то $\varphi(x - x_1) = 0$, и потому $x - x_1 \in \operatorname{Ker}\varphi$. Следовательно, если $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, то $x = x_1$. Обратно, если из $\varphi(x) = \varphi(x_1)$ следует, что $x = x_1$, то, в частности, $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi = 0$. □

Если $\operatorname{Ker}\varphi = 0$, то φ, очевидно, представляет собой изоморфизм пространства $\mathscr{V}$ на подпространство $\operatorname{Im}\varphi \subset \mathscr{W}$. Поэтому $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathscr{V}$. Отсюда следует, что *если* $\operatorname{Ker}\varphi = 0$ *и* $\dim \mathscr{V} = \dim \mathscr{W}$, *то гомоморфизм* φ *является изоморфизмом.* Действительно, тогда $\dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathscr{W}$, и, значит, $\operatorname{Im}\varphi = \mathscr{W}$. □

При $\operatorname{Ker}\varphi \neq 0$ целесообразно ввести в рассмотрение факторпространство

$$\mathscr{V}/\operatorname{Ker}\varphi,$$

которое называется иногда *кообразом* гомоморфизма φ. Очевидно, что формула

$$\varphi'(x + \mathscr{P}) = \varphi(x), \qquad x \in \mathscr{V},$$

корректно определяет некоторый гомоморфизм

$$\varphi' \colon \mathscr{V}/\operatorname{Ker}\varphi \to \mathscr{W},$$

называемый *индуцированным гомоморфизмом*, и, как нетрудно видеть, гомоморфизм φ' является изоморфизмом факторпространства $\mathscr{V}/\operatorname{Ker}\varphi$ на подпространство $\operatorname{Im}\varphi$.

В частности, мы видим, что *для любого эпиморфизма* $\varphi \colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *пространство* $\mathscr{W}$ *изоморфно факторпространству* $\mathscr{V}/\operatorname{Ker}\varphi$.

Кроме того, так как $\dim \mathscr{V}/\operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathscr{V} - \dim \operatorname{Ker}\varphi$, то *для любого гомоморфизма* $\varphi \colon \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ *имеет место формула*

$$\dim \operatorname{Ker}\varphi + \dim \operatorname{Im}\varphi = \dim \mathscr{V}. \tag{5}$$

Все эти утверждения, за исключением формулы (5), имеют весьма общий характер и справедливы, как мы

знаем из курса алгебры первого семестра, для любых групп и колец.

Вернемся теперь к прямым суммам.

Пусть $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — произвольные линейные пространства (над одним и тем же полем K). Рассмотрим множество $\mathcal{V}$ всех пар вида (x, y), где $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{Q}$. Полагая

$$(x, y) + (x_1, y_1) = (x + x_1, y + y_1)$$

и

$$k(x, y) = (kx, ky),$$

мы, очевидно, превратим $\mathcal{V}$ в линейное пространство.

Определение 8. Построенное пространство $\mathcal{V}$ называется *прямой суммой* пространств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ (иногда — *внешней прямой суммой*, чтобы отличить ее от рассмотренной выше «внутренней» прямой суммы, когда пространство $\mathcal{V}$ было задано заранее, а $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ были его подпространствами).

Эта терминология оправдывается тем, что векторы из $\mathcal{V}$ вида $(x, 0)$, $x \in \mathcal{P}$, составляют подпространство $\hat{\mathcal{P}}$, изоморфное пространству $\mathcal{P}$, а векторы вида $(0, y)$, $y \in \mathcal{Q}$, — подпространство $\hat{\mathcal{Q}}$, изоморфное пространству $\mathcal{Q}$. Кроме того, подпространства $\hat{\mathcal{P}}$ и $\hat{\mathcal{Q}}$ дизъюнктны (имеют общим только нулевой вектор $(0, 0)$) и в сумме составляют все $\mathcal{V}$ (ибо $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$). Таким образом, $\mathcal{V} = \hat{\mathcal{P}} \oplus \hat{\mathcal{Q}}$.

Обычно $\hat{\mathcal{P}}$ отождествляют с $\mathcal{P}$, а $\hat{\mathcal{Q}}$ — с $\mathcal{Q}$ и пишут $\mathcal{V} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$ (или $\mathcal{V} = \mathcal{P} \dotplus \mathcal{Q}$). К недоразумениям это не приводит.

Конструкция внешней прямой суммы также встречалась в курсе алгебры первого семестра применительно к случаю групп. По существу, ею же мы пользовались в первом семестре при построении комплексификаций.

В следующей лекции мы рассмотрим конструкции, более специфичные для теории линейных пространств.