

Лекция 4

Сопряженное пространство. — Двойственные пространства. — Второе сопряженное пространство. — Преобразование сопряженного базиса и координат ковекторов. — Аннуляторы. — Пространство решений системы однородных линейных уравнений. — Аннулятор аннулятора и аннуляторы прямых слагаемых.

Пусть \mathcal{U} — произвольное линейное пространство над полем K .

Определение 1. Функция $\xi: \mathcal{U} \rightarrow K$ называется *линейным функционалом*, если она является гомоморфизмом линейных пространств, т. е. если

$$\xi(x + y) = \xi(x) + \xi(y)$$

и

$$\xi(kx) = k\xi(x)$$

для любых векторов $x, y \in \mathcal{U}$ и любого числа $k \in K$. Линейные функционалы называются также *ковекторами* пространства \mathcal{U} .

Непосредственная проверка показывает, что сумма $\xi + \eta$ двух линейных функционалов ξ и η (определенная формулой $(\xi + \eta)(x) = \xi(x) + \eta(x)$) и произведение $k\xi$ линейного функционала ξ на произвольное число k (определенное формулой $(k\xi)(x) = k\xi(x)$) являются линейными функционалами. Это означает, что множество всех линейных функционалов представляет собой подпространство пространства всех функций на \mathcal{U} и, значит, само является линейным пространством. Это линейное пространство обозначается символом $T_1(\mathcal{U})$ или \mathcal{U}' .

Определение 2. Линейное пространство \mathcal{U}' называется *пространством, сопряженным* пространству \mathcal{U} .

Пусть e_1, \dots, e_n — произвольный базис пространства \mathcal{U} .

Предложение 1. Значение $\xi(x)$ произвольного линейного функционала ξ на векторе $x = x^1e_1 + \dots + x^n e_n$ выражается формулой

$$(1) \quad \xi(x) = \xi_1 x^1 + \dots + \xi_n x^n,$$

где

$$(2) \quad \xi_1 = \xi(e_1), \dots, \xi_n = \xi(e_n).$$

Для любых чисел $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$ формула (1) однозначно задает некоторый линейный функционал $\xi \in \mathcal{V}'$, для которого имеет место (2).

Доказательство. Формула (1) непосредственно вытекает из свойства линейности:

$$\begin{aligned}\xi(x) &= \xi(x^1 e_1 + \dots + x^n e_n) = \\ &= x^1 \xi(e_1) + \dots + x^n \xi(e_n) = \xi_1 x^1 + \dots + \xi_n x^n.\end{aligned}$$

Обратно, если функционал ξ задан формулой (1), то

$$\begin{aligned}\xi(x+y) &= \xi_1(x^1+y^1)+\dots+\xi_n(x^n+y^n)= \\ &= \xi_1 x^1 + \dots + \xi_n x^n + \xi_1 y^1 + \dots + \xi_n y^n = \xi(x) + \xi(y)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\xi(kx) &= \xi_1(kx^1) + \dots + \xi_n(kx^n) = \\ &= k(\xi_1 x^1 + \dots + \xi_n x^n) = k\xi(x)\end{aligned}$$

для любых векторов $x, y \in \mathcal{V}$ и любого числа $k \in K$. Кроме того, $\xi(e_i) = \xi_1 \cdot 0 + \dots + \xi_i \cdot 1 + \dots + \xi_n \cdot 0 = \xi_i$. \square

Из предложения 1 вытекает, что формула

$$e^i(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

однозначно определяет n линейных функционалов

$$(3) \quad e^1, \dots, e^n.$$

Ясно, что для любого вектора $x \in \mathcal{V}$

$$e^i(x) = x^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Предложение 2. Функционалы (3) составляют базис пространства \mathcal{V}' . Координатами произвольного функционала ξ в этом базисе являются коэффициенты (2) его представления (1):

$$(4) \quad \xi = \xi_1 e^1 + \dots + \xi_n e^n.$$

Доказательство. Для любого вектора $x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$ и любых чисел $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$ мы имеем

$$\begin{aligned}(\xi_1 e^1 + \dots + \xi_n e^n)(x) &= \xi_1 e^1(x) + \dots + \xi_n e^n(x) = \\ &= \xi_1 x^1 + \dots + \xi_n x^n.\end{aligned}$$

Следовательно, если ξ_1, \dots, ξ_n — коэффициенты (2) функционала ξ , то $(\xi_1 e^1 + \dots + \xi_n e^n)(x) = \xi(x)$ для

любого вектора $x \in \mathcal{V}$. Это доказывает формулу (4) и полноту семейства e^1, \dots, e^n в \mathcal{W}' .

С другой стороны, если

$$\xi_1 e^1 + \dots + \xi_n e^n = 0,$$

то для любого $i = 1, \dots, n$

$$\xi_i = (\xi_1 e^1 + \dots + \xi_n e^n)(e_i) = 0.$$

Следовательно, семейство e^1, \dots, e^n линейно независимо и, значит, является базисом. \square

Следствие.

$$\dim \mathcal{W}' = \dim \mathcal{V}.$$

Базис e^1, \dots, e^n называется *сопряженным* базису e_1, \dots, e_n .

В обозначениях Эйнштейна формула (1) имеет вид

$$\xi(x) = \xi_i x^i,$$

а формула (4) — вид

$$\xi = \xi_i e^i.$$

В дальнейшем мы будем писать подобного рода формулы без каких-либо оговорок.

Пусть \mathcal{V} и \mathcal{W} — два линейных пространства над полем K . Предположим, что любым двум векторам $x \in \mathcal{V}$, $y \in \mathcal{W}$ сопоставлено такое число $\langle x, y \rangle \in K$, что выполнены следующие условия:

а) для каждого фиксированного $y \in \mathcal{W}$ функция $x \mapsto \langle x, y \rangle$ является линейным функционалом на \mathcal{V} , т. е.

$$\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle,$$

$$\langle kx, y \rangle = k \langle x, y \rangle$$

для любых векторов $x_1, x_2, x \in \mathcal{V}$ и любого числа $k \in K$;

б) для каждого фиксированного $x \in \mathcal{V}$ функция $y \mapsto \langle x, y \rangle$ является линейным функционалом на \mathcal{W} , т. е.

$$\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle,$$

$$\langle x, ky \rangle = k \langle x, y \rangle$$

для любых векторов $y_1, y_2, y \in \mathcal{W}$ и любого числа $k \in K$;

в) для каждого вектора $x \in \mathcal{V}$ существует такой вектор $y \in \mathcal{W}$, что $\langle x, y \rangle \neq 0$, и, наоборот, для каждого вектора $y \in \mathcal{W}$ существует такой вектор $x \in \mathcal{V}$, что $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Условия а) и б) называются условиями билинейности, а условие в) — условием невырожденности.

Определение 3. Функция $x, y \mapsto \langle x, y \rangle$, удовлетворяющая условиям а), б) и в), называется спариванием между пространствами \mathcal{U} и \mathcal{W} . Пространства \mathcal{U} и \mathcal{W} , для которых существует хотя бы одно спаривание, называются двойственными. Обозначение: $\mathcal{U}|\mathcal{W}$.

Заметим, что отношение двойственности, очевидно, симметрично, т. е. если $\mathcal{U}|\mathcal{W}$, то $\mathcal{W}|\mathcal{U}$.

Предложение 3. Линейное пространство \mathcal{U} двойственно сопряженному пространству \mathcal{U}' :

$$\mathcal{U}|\mathcal{U}'.$$

Доказательство. Для любых $x \in \mathcal{U}$ и $\xi \in \mathcal{U}'$ положим

$$\langle x, \xi \rangle = \xi(x).$$

Очевидно, что условия билинейности а) и б) выполнены (например, $\langle x, \xi_1 + \xi_2 \rangle = (\xi_1 + \xi_2)(x) = \xi_1(x) + \xi_2(x) = \langle x, \xi_1 \rangle + \langle x, \xi_2 \rangle$). Неравенство $\xi \neq 0$ означает, что существует такой вектор $x \in \mathcal{U}$, что $\xi(x) \neq 0$. Следовательно, $\langle x, \xi \rangle \neq 0$. Аналогично, неравенство $x \neq 0$ означает, что $x^{i_0} \neq 0$ хотя бы для одного i_0 , и поэтому при $\xi = e^{i_0}$ имеем $\langle x, \xi \rangle = \xi(x) = x^{i_0} \neq 0$. Таким образом, условие в) также выполнено. \square

Обратное утверждение верно в следующей формулировке:

Предложение 4. Если пространства \mathcal{U} и \mathcal{W} двойственны, то каждое из них изоморфно пространству, сопряженному с другим:

$$\mathcal{U} \approx \mathcal{W}', \quad \mathcal{W} \approx \mathcal{U}'.$$

Доказательство. В силу симметричности отношения двойственности достаточно доказать только первый из этих изоморфизмов. Пусть $x \in \mathcal{U}$. Согласно условию б) функция $y \mapsto \langle x, y \rangle$ является линейным функционалом на \mathcal{W} , т. е. вектором пространства \mathcal{W}' . Обозначая этот линейный функционал символом $\varphi(x)$, мы, следовательно, получим некоторое отображение

$$\varphi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}'.$$

Таким образом, по определению

$$\varphi(x)(y) = \langle x, y \rangle.$$

Поэтому, в силу условия а),

$$\begin{aligned}\varphi(x_1 + x_2)(y) &= \langle x_1 + x_2, y \rangle = \\ &= \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle = \varphi(x_1)(y) + \varphi(x_2)(y).\end{aligned}$$

т. е.

$$\varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2).$$

Аналогично,

$$\varphi(kx)(y) = \langle kx, y \rangle = k \langle x, y \rangle = k\varphi(x)(y),$$

т. е.

$$\varphi(kx) = k\varphi(x).$$

Этим доказано, что отображение φ является гомоморфизмом.

Если $\varphi(x) = 0$, то $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $y \in \mathcal{W}$, и, значит (условие в)), $x = 0$. Таким образом, $\text{Кер } \varphi = 0$. Поэтому $\text{Im } \varphi \approx \mathcal{V}$, и, значит, $\dim \mathcal{V} = \dim \text{Im } \varphi \leq \dim \mathcal{W}$.

Но в силу симметричности отношения двойственности, если имеет место неравенство $\dim \mathcal{V} \leq \dim \mathcal{W}$, то должно иметь место и неравенство $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$. Следовательно, $\dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{W}$, и потому, в частности, $\dim \text{Im } \varphi = \dim \mathcal{W}$, т. е. $\text{Im } \varphi = \mathcal{W}$. Это доказывает, что гомоморфизм φ является изоморфизмом. \square

Так как $\mathcal{V} \mid \mathcal{V}'$, то, в частности, $\mathcal{V} \approx (\mathcal{V}')'$. Этот результат настолько важен, что заслуживает звания теоремы:

Теорема 1. Пространство $(\mathcal{V}')'$, сопряженное сопряженному, изоморфно исходному пространству:

$$(\mathcal{V}')' \approx \mathcal{V}. \quad \square$$

В явном виде изоморфизм $\mathcal{V} \rightarrow (\mathcal{V}')'$ задается соответствием, сопоставляющим вектору $x \in \mathcal{V}$ функционал \hat{x} на \mathcal{V}' , определенный формулой

$$\hat{x}(\xi) = \xi(x), \quad \xi \in \mathcal{V}'.$$

Как правило, функционал \hat{x} отождествляется с вектором x и потому, в частности, обозначается просто через x .

На первый взгляд теорема 1 представляется тривиальным следствием того факта, что пространства \mathcal{V} и $(\mathcal{V}')'$ имеют одинаковую размерность. На самом же деле ее практическое содержание состоит в том, что между пространствами \mathcal{V} и $(\mathcal{V}')'$ имеется «естественный»

изоморфием $\mathcal{V} \rightarrow (\mathcal{V}')'$, строящийся без какого бы то ни было произвола. Именно этот факт и позволяет отождествлять \hat{x} с x (и, значит, $(\mathcal{V}')'$ с \mathcal{V}).

Пространства \mathcal{V} и \mathcal{V}' также имеют одну и ту же раз мерность, но никакого естественного изоморфизма между ними в общем случае установить нельзя. В нашем распоряжении пока нет необходимых для доказательства этого утверждения понятий (например, у нас нет аккуратного определения, что такое «естественный» изоморфием), и потому мы вынуждены ограничиться доказательством того, что самая, казалось бы, простая и естественная попытка построить такой изоморфизм к цели не приводит.

Пусть e_1, \dots, e_n — произвольный базис пространства \mathcal{V} , а e^1, \dots, e^n — сопряженный базис пространства \mathcal{V}' . Можно пытаться рассмотреть изоморфизм $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$, действующий по равенству координат в этих двух базисах (этот изоморфизм каждому вектору $x = x^1e_1 + \dots + x^ne_n$ сопоставляет ковектор $\xi = x^1e^1 + \dots + x^ne^n$, имеющий в базисе e^1, \dots, e^n те же координаты, что и вектор x в базисе e_1, \dots, e_n), в надежде, что он окажется не зависящим от базиса e_1, \dots, e_n (и потому «естественным»). Однако эта надежда не оправдывается.

Чтобы показать это, необходимо рассмотреть в общем виде вопрос о преобразовании координат ковекторов при замене базиса e_1, \dots, e_n .

Мы проведем соответствующие вычисления в обозначениях Эйнштейна. Для этого целесообразно ввести так называемый символ Кронекера δ_i^j , определяемый формулой

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Основное свойство этого символа выражается формулами

$$a^i \delta_i^j = a^j, \quad b_i \delta_i^j = b_j$$

(действительно, в левых суммах все члены равны нулю, кроме, соответственно, членов $a^i \cdot 1 = a^i$ и $b_i \cdot 1 = b_i$).

С помощью символа Кронекера определяющее свойство сопряженного базиса записывается единой

формулой:

$$e^l(e_i) = \delta_i^l.$$

Аналогично, тот факт, что матрицы $\|c_i^{\nu}\|$ и $\|c_{\nu}^i\|$ взаимно обратны, может быть записан в двух равносильных видах:

$$c_i^{\nu} c_{\nu}^l = \delta_i^l, \quad c_i^{\nu} c_{\nu}^i = \delta_i^{\nu}.$$

Имея все это в виду, рассмотрим, наряду с базисом e_1, \dots, e_n , другой базис $e_1', \dots, e_{n'}$, для которого

$$e_{\nu}' = c_{\nu}^i e_i, \quad e_i = c_i^{\nu} e_{\nu}',$$

где $C = \|c_{\nu}^i\|$ — матрица перехода, а $C^{-1} = \|c_i^{\nu}\|$ — обратная матрица. Тогда, как мы знаем (см. лекцию I.6), для координат x^i и x^{ν} векторов будут иметь место формулы

$$x^i = c_{\nu}^i x^{\nu}, \quad x^{\nu} = c_i^{\nu} x^i.$$

Пусть теперь $e^{i'}, \dots, e^{n'}$ — базис, сопряженный с базисом $e_1', \dots, e_{n'}$. Тогда, по определению,

$$e^{i'}(e_{\nu}') = \delta_{\nu}^{i'}.$$

Следовательно,

$$e^{i'}(e_i) = e^{i'}(c_{\nu}^i e_{\nu}') = c_{\nu}^i \delta_{\nu}^{i'} = c_i^{i'}.$$

Но, согласно предложению 2,

$$\xi = \xi(e_i) e^i$$

для любого ковектора $\xi \in \mathcal{V}'$. Поэтому, в частности,

$$e^{i'} = c_i^{i'} e^i$$

и, значит,

$$e^i = c_{\nu}^i e^{\nu}$$

(последнюю формулу можно написать либо по симметрии, либо получить выкладкой: $c_i^l e^{i'} = c_{\nu}^l c_{\nu}^{i'} e^i = \delta_i^l e^i = e^i$).

Аналогично, для координат $\xi_i = \xi(e_i)$ и $\xi_{\nu} = \xi(e_{\nu})$ произвольного ковектора ξ имеем

$$\xi(e_i) = c_i^{i'} \xi(e_{\nu}'),$$

т. е.

$$\xi_i = c_i^{i'} \xi_{\nu},$$

и — по симметрии (или той же выкладкой) —

$$\xi_i = c_i \xi_i.$$

Мы видим, что ковекторы сопряженного базиса преобразуются как координаты векторов и, соответственно, координаты ковекторов — как векторы базиса.

Принято называть преобразование базиса *когредиентным*, а преобразование координат векторов (т. е. преобразование с обратной и транспонированной матрицей) *контрагредиентным*. Таким образом, *сопряженные базисы преобразуются контрагредиентно, а координаты ковекторов — когредиентно*.

Поэтому, если в одном каком-нибудь базисе (и ему сопряженном) вектор x и ковектор ξ имели одинаковые координаты, то в другом базисе — из-за того, что координаты векторов и ковекторов преобразуются по разным формулам, — вектор x и ковектор ξ будут иметь различные координаты. Следовательно, отображение по равенству координат в сопряженных базисах зависит от базиса и никакой естественностью не обладает.

Пусть $S \subset \mathcal{V}$ — произвольное подмножество линейного пространства \mathcal{V} .

Определение 4. Совокупность всех линейных функционалов $\xi \in \mathcal{V}'$, равных нулю на любом векторе $x \in S$, называется *аннулятором* множества S и обозначается символом $\text{Ann } S$ или S° .

Таким образом,

$$\text{Ann } S = \{\xi \in \mathcal{V}'; \xi(x) = 0 \text{ для любого } x \in S\}.$$

Очевидно, что S° является подпространством пространства \mathcal{V}' . При этом, если $S \subset T$, то $S^\circ \supseteq T^\circ$.

Предложение 5. Анулятор произвольного множества $S \subset \mathcal{V}$ совпадает с анулятором его линейной оболочки:

$$\text{Ann } S = \text{Ann } [S].$$

Доказательство. Так как $S \subset [S]$, то $S^\circ \supseteq [S]^\circ$. Обратно, пусть $\xi \in [S]^\circ$. Тогда для любого вектора $k_1x_1 + \dots + k_mx_m$ из $[S]$, где $x_1, \dots, x_m \in S$, будет иметь место равенство

$$\xi(k_1x_1 + \dots + k_mx_m) = k_1\xi(x_1) + \dots + k_m\xi(x_m) = 0,$$

так как $\xi(x_1) = 0, \dots, \xi(x_m) = 0$. Следовательно, $\xi \in [S]^\circ$, т. е. $S^\circ \subset [S]^\circ$. \square

Согласно этому предложению при рассмотрении ануляторов можно ограничиваться подпространствами.

Ясно, что $\text{Ann } 0 = \mathcal{V}'$ и, наоборот, если $\text{Ann } S = \mathcal{V}'$, то $S = \{0\}$ (ибо если $\xi(x) = 0$ для всех $\xi \in \mathcal{V}'$, то $x = 0$).

Аналогично, $\text{Ann } \mathcal{V} = 0$ и если $\text{Ann } S = 0$, то $[S] = \mathcal{V}$. Действительно, если $[S] \neq \mathcal{V}$ и если e_1, \dots, e_n — такой базис пространства \mathcal{V} , что $[S] = [e_1, \dots, e_m]$, $m < n$, то $e^n \in [S]^\circ$, и потому $S^\circ \neq 0$. \square

Предложение 6. Для любого подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ имеет место равенство

$$\dim \mathcal{P}^\circ = n - \dim \mathcal{P}.$$

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{P} = p$ и пусть $e_1, \dots, e_p, \dots, e_n$ — такой базис пространства \mathcal{V} , что $\mathcal{P} = [e_1, \dots, e_p]$. Рассмотрим сопряженный базис

$$e^1, \dots, e^p, \dots, e^n.$$

Если $i \leq p$ и $j > p$, то заведомо $i \neq j$, и потому $e^j(e_i) = 0$. Следовательно, $e^{p+1}, \dots, e^n \in [e_1, \dots, e_p]^\circ = \mathcal{P}^\circ$. С другой стороны, если $\xi \in \mathcal{P}^\circ$, то $\xi(e_1) = 0, \dots, \xi(e_p) = 0$, и, значит, $\xi = \xi_{p+1}e^{p+1} + \dots + \xi_n e^n$.

Этим доказано, что ковекторы e^{p+1}, \dots, e^n образуют базис подпространства \mathcal{P}° . Следовательно, $\dim \mathcal{P}^\circ = n - p$. \square

Поскольку (теорема 1) $\mathcal{V} = (\mathcal{V}')'$, во всем сказанном выше \mathcal{V} можно заменить на \mathcal{V}' , а \mathcal{V}' — на \mathcal{V} . В частности, для любого множества $S \subset \mathcal{V}'$ будет определено подпространство $\text{Ann } S \subset \mathcal{V}$, состоящее из таких векторов $x \in \mathcal{V}$, что $x(\xi) = 0$ (т. е. $\xi(x) = 0$) для любого ковектора $\xi \in S$, и размерность этого подпространства будет равна $n - r$, где r — размерность подпространства $[S]$, т. е. ранг множества S .

Таким образом, во-первых, подпространства пространства \mathcal{V} можно задавать не только как линейные оболочки, но и «двойственным» образом, как ануляторы множеств ковекторов $S = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$, т. е. уравнениями вида

$$(5) \quad \xi_1(x) = 0, \dots, \xi_m(x) = 0.$$

Во-вторых, мы имеем эффективный способ вычисления размерности заданного таким способом подпространства: она равна $n - r$, где r — ранг множества $S = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$.

Целесообразно переформулировать все это в терминах координат.

Ковекторы ξ_1, \dots, ξ_m в координатах записываются (предложение 1) линейными формами от x^1, \dots, x^n . Поэтому уравнения (5) приобретают в координатах вид

$$(6) \quad \begin{aligned} a_{11}x^1 + \dots + a_{1n}x^n &= 0, \\ &\dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x^1 + \dots + a_{mn}x^n &= 0, \end{aligned}$$

т. е. представляют собой обыкновенные линейные однородные уравнения.

Поскольку ранг r множества (или — лучше сказать — семейства) ковекторов ξ_1, \dots, ξ_m равен рангу матрицы коэффициентов

$$(7) \quad \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{array} \right|$$

этих уравнений, мы получаем, таким образом, следующую теорему:

Теорема 2. Множество всех решений (x^1, \dots, x^n) системы (6) однородных линейных уравнений является подпространством пространства K^n размерности $n - r$, где r — ранг матрицы коэффициентов (7). \square

Чтобы найти базис этого подпространства, т. е. $n - r$ линейно независимых решений (которые называются обычно фундаментальной системой решений), нужно, решая систему (6) способом, указанным в лекции 2, придавать $n - r$ «свободным» неизвестным $n - r$ наборов значений, следя за тем, чтобы получались линейно независимые решения. Для этого достаточно указанные наборы выбрать так, чтобы, расположенные в квадратную матрицу порядка $n - r$, они составляли бы невырожденную матрицу (проще всего их выбирать так, чтобы получилась единичная матрица).

Тот факт, что аннуляторы определены и для подмножеств пространства \mathcal{V}' , позволяет говорить об аннуляторе аннулятора

$$\text{Ann } \text{Ann } S = S^\infty$$

произвольного подмножества $S \subset \mathcal{V}$.

Предложение 7. Для любого подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ имеет место равенство

$$\mathcal{P}^\infty = \mathcal{P}.$$

Доказательство. Если $x \in \mathcal{P}$, то $\xi(x) = 0$ для любого $\xi \in \mathcal{P}^\circ$, т. е. $x(\xi) = 0$. Это означает, что $x \in \mathcal{P}^\circ$. Таким образом, $\mathcal{P}^\circ \subset \mathcal{P}$, и, значит, $\mathcal{P}^\circ = \mathcal{P}$, ибо $\dim \mathcal{P}^\circ = n - \dim \mathcal{P} = n - (n - \dim \mathcal{P}) = \dim \mathcal{P}$. \square

Если же S — произвольное множество, то, очевидно, $S^{\circ\circ} = [S]$.

Предложение 8. Если $\mathcal{V} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{Q}$, то $\mathcal{V}' = \mathcal{P}' \oplus \mathcal{Q}'$. При этом $\mathcal{P}' \approx \mathcal{Q}'$ и $\mathcal{Q}' \approx \mathcal{P}'$.

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{P} = p$ и $\dim \mathcal{Q} = q$. Тогда $p + q = n$ и $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = 0$. Поэтому $\dim \mathcal{P}' + \dim \mathcal{Q}' = (n - p) + (n - q) = n$. Кроме того, если $\xi \in \mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}'$, то $\xi(x) = 0$ для любого $x \in \mathcal{P}$ и $\xi(y) = 0$ для любого $y \in \mathcal{Q}$. Поэтому $\xi(x + y) = 0$, и, значит, $\xi(z) = 0$ для любого $z \in \mathcal{V}$. Следовательно, $\xi = 0$, т. е. $\mathcal{P}' \cap \mathcal{Q}' = 0$. Этим доказано (см. следствие из предложения 3 лекции 3), что $\mathcal{V}' = \mathcal{P}' \oplus \mathcal{Q}'$.

Отнесем теперь каждому линейному функционалу $\xi \in \mathcal{P}'$ его ограничение

$$\xi' = \xi|_{\mathcal{Q}}$$

на подпространстве \mathcal{Q} . Тем самым мы получим некоторое отображение $\xi \mapsto \xi'$ пространства \mathcal{P}' в пространство \mathcal{Q}' , очевидно линейное (являющееся гомоморфизмом). Его ядро состоит из всех функционалов $\xi \in \mathcal{P}'$, для которых $\xi|_{\mathcal{Q}} = 0$, т. е. таких, что $\xi \in \mathcal{P}$. Но, по доказанному, $\mathcal{P}' \cap \mathcal{P} = 0$. Следовательно, отображение $\xi \mapsto \xi'$ является мономорфизмом.

Пусть $\eta \in \mathcal{Q}'$. Определим на \mathcal{V} функционал ξ , полагая для любого вектора вида $x + y$, где $x \in \mathcal{P}$, $y \in \mathcal{Q}$,

$$\xi(x + y) = \eta(y).$$

Ясно, что функционал ξ корректно определен, линеен, принадлежит \mathcal{P}' и $\xi = \eta$. Этим доказано, что отображение $\xi \mapsto \xi'$ является изоморфизмом.

Изоморфизм $\mathcal{Q}' \approx \mathcal{P}'$ доказывается аналогично. \square

Заметим, что изоморфизмы предложения 8 «естественны».