Лекция 7

Подстановки. — Поливекторы. — Базисные поливекторы. — Внешние произведения унимодулярно эквивалентных семейств векторов. — Отождествление поливекторов с классами унимодулярно эквивалентных семейств векторов.

Напомним, что *подстановкой степени* m называется произвольное биективное отображение множества $\{1, \ldots, m\}$ на себя. Любая такая подстановка σ обычно изображается двустрочной таблицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \ldots & \sigma(m) \end{pmatrix},$$

хотя, вообще говоря, вполне было бы достаточно нижней строчки.

Все подстановки степени m образуют группу (относительно композиции), которая называется *симметрической группой* и обозначается символом S_m.

Подстановки делятся на *четные* и *нечетные* в зависимости от того, четно или нечетно число *инверсий*, т. е. пар $(\sigma(i), \sigma(j))$, для которых $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$.

Мы будем называть *знаком подстановки* число $+1$, если подстановка четная, и число -1, если подстановка нечетная. Обозначать знак подстановки σ мы будем символом ε_σ.

Известно, что

$$\varepsilon_{\sigma\tau} = \varepsilon_\sigma \varepsilon_\tau$$

для любых двух подстановок σ и τ, откуда, в частности, следует, что *все четные подстановки составляют подгруппу группы* S_m.

Примером нечетной подстановки является *транспозиция*, переставляющая лишь два элемента. Любая подстановка разлагается в произведение транспозиций (и даже транспозиций соседних элементов), причем число множителей четно для четной подстановки и нечетно для нечетной.

Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — векторы линейного пространства $\mathscr{V}$.

Определение 1. Тензор

$$\sum_{\sigma} \mathbf{e}_{\sigma}(x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(m)}) \tag{1}$$

типа $(0, m)$, где суммирование распространено на все подстановки σ степени m, называется *внешним произведением* векторов $x_1, \ldots, x_m$ и обозначается символом

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m.$$

Например,

$$x \wedge y = x \otimes y - y \otimes x,$$

$$x \wedge y \wedge z = x \otimes y \otimes z + y \otimes z \otimes x + z \otimes x \otimes y - \\ - x \otimes z \otimes y - y \otimes x \otimes z - z \otimes y \otimes x.$$

Тензоры типа $(0, m)$, являющиеся внешними произведениями векторов, называются *поливекторами степени m* или, короче, *m-векторами.*

Векторы считаются поливекторами степени 1, а числа (элементы основного поля $\mathbb{K}$) — поливекторами степени 0.

Множество всех m-векторов пространства $\mathscr{V}$ мы будем обозначать символом $\mathbf{A}^m(\mathscr{V})$. Таким образом, по определению

$$\mathbf{A}^0(\mathscr{V}) = \mathbb{K}, \quad \mathbf{A}^1(\mathscr{V}) = \mathscr{V}.$$

Замечание 1. В первом издании этой книги в определении тензора $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ участвовал множитель $1/m!$, который мы теперь опускаем.

Легко видеть, что

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge (x'_m + x''_m) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge x'_m + \\ + x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge x''_m$$

для любых векторов $x_1, \ldots, x_{m-1}, x'_m, x''_m$. Действительно, если $x_m = x'_m + x''_m$ и $m = \sigma(k)$, то в σ-ом члене суммы (1) множитель $x_{\sigma(k)} = x_m$ будет суммой $x'_{\sigma(k)} + x''_{\sigma(k)}$ и, значит, — в силу дистрибутивности тензорного произведения — этот член будет суммой двух произведений, одно из которых получается заменой множителя $x_{\sigma(k)} = x_m$ множителем $x'_{\sigma(k)} = x'_m$, а другой — множителем $x''_{\sigma(k)} = x''_m$. □

Ясно, что аналогичная формула имеет место и по отношению к любому из векторов $x_1, \ldots, x_m$.

По определению это означает, что *внешнее умножение дистрибутивно относительно сложения.*

Аналогично, только еще проще, доказывается, что *внешнее умножение однородно*, т. е. что при умножении одного из векторов $x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m$ (скажем, вектора x_m) на произвольное число $\lambda \in \mathbb{K}$ все произведение $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge x_m$ умножается на то же число:

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge \lambda x_m = \lambda (x_1 \wedge \ldots \wedge x_{m-1} \wedge x_m).$$

Пусть, как всегда, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в $\mathscr{V}$ и пусть

$$x_1 = x_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, x_m = x_m^{i_m} e_{i_m}.$$

Тогда, в силу дистрибутивности и однородности,

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \left(x_{\sigma(1)}^{i_1} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(m)}^{i_m} e_{i_m} \right) =$$
$$= \left(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)}^{i_1} \ldots x_{\sigma(m)}^{i_m} \right) \left(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m} \right),$$

т. е.

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = X^{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}, \tag{2}$$

где

$$X^{i_1 \ldots i_m} = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma x_{\sigma(1)}^{i_1} \ldots x_{\sigma(m)}^{i_m} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \ldots & x_m^{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{i_m} & \ldots & x_m^{i_m} \end{vmatrix}.$$

[Числа $X^{i_1 \ldots i_m}$ называются *обобщенными минорами* матрицы

$$\begin{Vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^n & \ldots & x_m^n \end{Vmatrix},$$

составленной из координат векторов $x_1, \ldots, x_m$.]

Формула (2) означает, что *компонентами внешнего произведения $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ являются миноры $X^{i_1 \ldots i_m}$.*

Кроме того, в силу теоремы о ранге матрицы из этой формулы немедленно следует, что $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = 0$ *тогда и только тогда, когда векторы $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы.*

Так как определитель с одинаковыми строками равен нулю, то $X^{i_1 \ldots i_m} = 0$, если среди индексов $i_1, \ldots, i_m$ есть одинаковые.

Пусть все индексы $i_1, \ldots, i_m$ различны. Расположив эти индексы в возрастающем порядке, обозначим их через $j_1, \ldots, j_m$. Таким образом,

$$j_1 < \ldots < j_m \quad \text{и} \quad i_1 = j_{\sigma(1)}, \ldots, i_m = j_{\sigma(m)},$$

где σ — некоторая подстановка степени m. При этом

$$X^{i_1 \ldots i_m} = X^{j_{\sigma(1)} \ldots j_{\sigma(m)}} = \varepsilon_\sigma X^{j_1 \ldots j_m}.$$

Отсюда следует, что формулу (2) мы можем переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_1 \wedge \ldots \wedge x_m &= \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum \sum_\sigma X^{j_{\sigma(1)} \ldots j_{\sigma(m)}} e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{j_{\sigma(m)}} = \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum X^{j_1 \ldots j_m} \Big(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{j_{\sigma(m)}} \Big) = \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum X^{j_1 \ldots j_m} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$(3) \qquad x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum X^{j_1 \ldots j_m} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m},$$

где суммирование распространено на все индексы $j_1, \ldots, j_m$, удовлетворяющие неравенствам $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n$.

Формула (3) означает, что *любой m-вектор является линейной комбинацией m-векторов вида*

$$(4) \qquad e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m}, \quad \textit{где} \quad 1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n.$$

Заметим, что это представление единственно, т. е. что *m-векторы* (4) *линейно независимы*. Действительно, пусть

$$\sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum A^{j_1 \ldots j_m} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m} = 0,$$

где $A^{j_1 \ldots j_m}$ — некоторые числа (определенные только при $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_n \leqslant n$). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum A^{j_1 \ldots j_m} \Big(\sum_\sigma \varepsilon_\sigma e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{j_{\sigma(m)}} \Big) = \\ &= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n} \ldots \sum \sum_\sigma (\varepsilon_\sigma A^{j_1 \ldots j_m}) e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{j_{\sigma(m)}}. \end{aligned}$$

Ясно, что все тензоры $e_{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_{j_{\sigma(m)}}$, встречающиеся в этой сумме, различны. Но мы знаем, что все различные тензоры вида $e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_m}$ линейно независимы. Поэтому $\varepsilon_\sigma A^{j_1 \ldots j_m} = 0$, т. е. $A^{j_1 \ldots j_m} = 0$ при $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n$. Значит, m-векторы (4) линейно независимы. □

Мы будем называть m-векторы (4) *базисными m-векторами.*

При выводе формул (2) и (3) мы нигде не пользовались линейной независимостью векторов $e_1, \ldots, e_n$. Поэтому те же самые выкладки дадут нам следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть векторы $x_1, \ldots, x_m$ линейно выражаются через векторы $y_1, \ldots, y_q$, т. е. пусть*

$$x_1 = c_1^{i_1} y_{i_1}, \ldots, x_m = c_m^{i_m} y_{i_m}.$$

Тогда

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant q} \ldots \sum C^{j_1 \ldots j_m} y_{j_1} \wedge \ldots \wedge y_{j_m},$$

где

$$C^{j_1 \ldots j_m} = \begin{vmatrix} c_1^{j_1} & \ldots & c_m^{j_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^{j_m} & \ldots & c_m^{j_m} \end{vmatrix}$$

— обобщенные миноры матрицы

$$\begin{Vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^q & \ldots & c_m^q \end{Vmatrix}. \ \square$$

При $q = m$ мы получаем отсюда, что

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = C(y_1 \wedge \ldots \wedge y_m), \tag{5}$$

где C — определитель матрицы

$$\begin{Vmatrix} c_1^1 & \ldots & c_m^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ c_1^m & \ldots & c_m^m \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Напомним (см. лекцию I.7), что два семейства векторов $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_m$ называются *унимодулярно эквивалентными,* если векторы $y_1, \ldots, y_m$ линейно выра-

жаются через векторы $x_1, \ldots, x_m$ с матрицей (6), определитель которой равен 1.

Мы видим, таким образом, что *если семейства* $x_1, \ldots, x_m$ *и* $y_1, \ldots, y_m$ *унимодулярно эквивалентны, то*

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_1 \wedge \ldots \wedge y_m.$$

Обратная теорема имеет следующий вид:

Теорема 1. *Если*

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_1 \wedge \ldots \wedge y_m$$

и $y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \neq 0$, *то семейства* $x_1, \ldots, x_m$ *и* $y_1, \ldots, y_m$ *унимодулярно эквивалентны.*

Докажем сначала следующую лемму:

Лемма 1. *Если в матрице*

$$\begin{Vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^1 & \ldots & x_m^m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^1 & \ldots & x_n^m \end{Vmatrix}$$

все миноры порядка m, *кроме минора*

$$X^{1 \ldots m} = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^m \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^1 & \ldots & x_m^m \end{vmatrix},$$

равны нулю (*а* $X^{1 \cdots m} \neq 0$), *то*

$$\begin{aligned} x_{m+1}^1 &= 0, \ldots, x_{m+1}^m = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n^1 &= 0, \ldots, x_n^m = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_n$ — строки данной матрицы (рассматриваемые как векторы пространства $\mathbb{R}^m$). В силу теоремы о равенстве нулю определителя строки $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы, а для любого $i = 1, \ldots, m$ и любого $j = m+1, \ldots, n$ строки

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m, x_j$$

линейно зависимы. Поэтому строка x_j линейно выражается через строки

$$x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_m.$$

Иначе говоря, эта строка линейно выражается через

строки $x_1, \ldots, x_m$, причем коэффициент при строке x_i равен нулю. Поскольку в силу линейной независимости строк $x_1, \ldots, x_m$ это линейное выражение единственно и поскольку i является произвольным (от 1 до m) числом, мы видим, что строка x_i линейно выражается через строки $x_1, \ldots, x_m$ с равными нулю коэффициентами. Значит, $x_i = 0$. Таким образом, $x_{m+1} = \ldots = x_n = 0$, что и утверждается в лемме. □

Доказательство теоремы 1. Так как $y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \neq 0$, то векторы $y_1, \ldots, y_m$ линейно независимы. Дополним их до базиса

$$e_1 = y_1, \ldots, e_m = y_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$$

пространства $\mathcal{V}$ и напишем в этом базисе формулу (3). Так как по условию

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_1 \wedge \ldots \wedge y_m = e_1 \wedge \ldots \wedge e_m,$$

то, в силу единственности выражения m-векторов через базисные m-векторы, коэффициент $X^{1 \ldots m}$ в этой формуле равен 1, а все остальные коэффициенты $X^{j_1 \ldots j_m}$ равны нулю. Это означает, что матрица, состоящая из координат векторов $x_1, \ldots, x_m$, удовлетворяет условиям леммы 1 и, значит, согласно этой лемме, векторы $x_1, \ldots, x_m$ выражаются только через векторы $e_1 = y_1, \ldots, e_m = y_m$. Следовательно, векторы $x_1, \ldots, x_m$ и $y_1, \ldots, y_m$ линейно эквивалентны, а так как $X^{1 \ldots m} = 1$, то эта эквивалентность унимодулярна. □

В силу теоремы 1 мы можем отличные от нуля m-векторы отождествить с классами унимодулярно эквивалентных линейно независимых семейств m-векторов (с «геометрическими» m-векторами, см. лекцию I.8). Нулевой m-вектор следует при этом отождествить с классом, состоящим из всех линейно зависимых m-членных семейств (нулевым «геометрическим» m-вектором). Тем самым мы на новом уровне возвращаемся к построениям из первого семестра (см. лекцию I.8).