

## Лекция 9а

Внешнее произведение кососимметрического тензора на вектор. — Корректность его определения. — Ассоциированные векторы. — Соотношения Плюккера.

Для вывода соотношений Плюккера нам понадобятся некоторые общие конструкции, имеющие и самостоятельный интерес.

Пусть  $A$  — произвольный кососимметрический тензор степени  $m$  в линейном пространстве  $\mathcal{V}$ . Предположив, что в пространстве  $\mathcal{V}$  выбран базис  $e_1, \dots, e_n$ , мы можем этот тензор единственным образом разложить по базисным  $m$ -векторам:

$$A = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} A^{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$$

(см. формулу (3) лекции 8). Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы определить внешнее произведение  $A \wedge x$  тензора  $A$  на произвольный вектор  $x$  пространства  $\mathcal{V}$ . Для вектора базиса  $e_i$  и базисного  $m$ -вектора  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ , где  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ , это естественно сделать по формуле

$$(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}) \wedge e_i = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \wedge e_i,$$

а в общем случае — предполагая справедливыми свойства однородности и дистрибутивности, т. е. по формуле

$$(1) \quad A \wedge x =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} \sum_{i_{m+1}} (A^{i_1 \dots i_m} x^{i_{m+1}}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \wedge e_{i_{m+1}}$$

(конечно, слева суммирование производится не только по  $i_1, \dots, i_m$ , но также и по  $i_{m+1}$ ).

Таким образом, произведение  $A \wedge x$  является, по определению, кососимметрическим тензором степени  $m+1$ .

Если индекс  $i_{m+1}$  совпадает с одним из индексов  $i_1, \dots, i_m$ , то соответствующий член суммы (1) равен нулю.

Пусть все индексы  $i_1, \dots, i_m, i_{m+1}$  различны. Расположив эти индексы в возрастающем порядке, обозначим

их через  $j_1, \dots, j_{m+1}$ . Таким образом, если  $i_{m+1} = j_s$ , то

$$(i_1, \dots, i_m, i_{m+1}) = (j_1, \dots, \hat{j}_s, \dots, j_{m+1}, j_s),$$

где значок  $\hat{\phantom{x}}$  над буквой означает, что эта буква должна быть опущена. Иначе говоря,

$$(i_1, \dots, i_m, i_{m+1}) = (j_{\sigma(1)}, \dots, j_{\sigma(m)}, j_{\sigma(m+1)}),$$

где  $\sigma \in S_{m+1}$  — подстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & s-1 & s & \dots & m & m+1 \\ 1 & \dots & s-1 & s+1 & \dots & m+1 & s \end{pmatrix}.$$

Поскольку, как легко видеть,

$$e_\sigma = (-1)^{m-s+1},$$

отсюда в силу антисимметричности внешнего умножения векторов вытекает, что

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \wedge e_{i_{m+1}} = (-1)^{m-s+1} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}.$$

Следовательно,

$$A \wedge x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq n} B^{i_1 \dots i_{m+1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}},$$

где

$$(2) \quad B^{i_1 \dots i_{m+1}} = \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{m-s+1} A^{i_1 \dots \hat{i}_s \dots i_{m+1}} x_{i_s} = \\ = A^{i_1 \dots i_m} x^{i_{m+1}} - A^{i_1 \dots i_{m-1} i_{m+1}} x^{i_m} + \dots \\ \dots + (-1)^{m-1} A^{i_1 i_s \dots i_{m+1}} x^{i_2} + (-1)^m A^{i_2 \dots i_{m+1}} x^{i_1}.$$

Число (2) принято обозначать символом

$$A^{[i_1 \dots i_m] x^{i_{m+1}}}.$$

В этих обозначениях формула для  $A \wedge x$  принимает следующий окончательный вид:

$$(3) \quad A \wedge x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{m+1} \leq n} A^{[i_1 \dots i_m] x^{i_{m+1}}} e_{i_1} \wedge \dots \\ \dots \wedge e_{i_{m+1}}.$$

Подчеркнем, что эта формула дает определение тензора  $A \wedge x$ .

В случае, когда  $A$  является вектором (т. е.  $m = 1$ ), формула (3) переходит в формулу (3) лекции 7 (при  $x_1 = A$  и  $x_2 = x$ ), ибо

$$A^{[i_1] x^{i_2]} = A^{i_1} x^{i_2} - A^{i_2} x^{i_1} = \begin{vmatrix} A^{i_1} & x^{i_1} \\ A^{i_2} & x^{i_2} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, обе операции  $\wedge$  в этом случае совпадают.

Ясно, что по каждому из сомножителей операция (3) дистрибутивна и однородна, т. е.

$$(\alpha A + \beta B) \wedge x = \alpha (A \wedge x) + \beta (B \wedge x),$$

$$A \wedge (\alpha x + \beta y) = \alpha (A \wedge x) + \beta (A \wedge y)$$

для любых тензоров  $A, B$ , любых векторов  $x, y$  и любых чисел  $\alpha, \beta \in K$ .

В конструкции тензора  $A \wedge x$  участвует базис  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $\mathcal{V}$ , и потому следует проверить ее корректность, т. е. независимость от выбора этого базиса.

Пусть  $e'_1, \dots, e'_{n'}$  — другой базис пространства  $\mathcal{V}$  и пусть

$$(4) \quad \begin{vmatrix} c_1^1 & \dots & c_{n'}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i_1}^n & \dots & c_{i_{n'}}^n \end{vmatrix}$$

— матрица перехода от базиса  $e_1, \dots, e_n$  к базису  $e'_1, \dots, e'_{n'}$ . Тогда

$$e_{i'} = c_{i'}^i e_i,$$

и, значит, — с точностью до обозначений — мы находимся в условиях предложения 2 лекции 7. Поэтому, согласно этому предложению,

$$(5) \quad e_{i'_1} \wedge \dots \wedge e_{i'_m} =$$

$$= \sum_{1 \leq i'_1 < \dots < i'_m \leq n} C\left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ i'_1 & \dots & i'_m \end{smallmatrix}\right) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m},$$

где

$$C\left(\begin{smallmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ i'_1 & \dots & i'_m \end{smallmatrix}\right) = \begin{vmatrix} c_{i'_1}^{i_1} & \dots & c_{i'_m}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i'_1}^{i_m} & \dots & c_{i'_m}^{i_m} \end{vmatrix}$$

— обобщенные миноры матрицы (4).

Формула (5) описывает переход от базиса  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ ,  $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ , пространства  $\Lambda^m(\mathcal{V})$  к его базису  $e_{i'_1} \wedge \dots \wedge e_{i'_m}$ ,  $1 \leq i'_1 < \dots < i'_m \leq n$ . Поэтому

тому соответствующие координаты  $A^{i_1 \dots i_m}$  и  $A^{i'_1 \dots i'_m}$  элементов этого пространства будут связаны (см. лекцию I. 6) контрагredientным преобразованием

$$(6) \quad A^{i_1 \dots i_m} = \sum_{1 \leq i'_1 < \dots < i'_{m+1} \leq n} C\left(\begin{matrix} i_1 & \dots & i_m \\ i'_1 & \dots & i'_{m+1} \end{matrix}\right) A^{i'_1 \dots i'_{m+1}}.$$

По определению, тензор  $A \wedge x$  имеет в базисе  $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$  координаты  $A^{[i_1 \dots i_m]_x^{i_{m+1}}}$ , а в базисе  $e_{i'_1} \wedge \dots \wedge e_{i'_{m+1}}$  — координаты  $A^{[i'_1 \dots i'_{m+1}]_x^{i_{m+1}}}$ . Следовательно, это определение корректно (приводит к одному и тому тензору) тогда и только тогда, когда эти координаты связаны формулой

$$(7) \quad A^{[i_1 \dots i_m]_x^{i_{m+1}}} = \sum_{1 \leq i'_1 < \dots < i'_{m+1} \leq n} C\left(\begin{matrix} i_1 & \dots & i_{m+1} \\ i'_1 & \dots & i'_{m+1} \end{matrix}\right) A^{[i'_1 \dots i'_{m+1}]_x^{i_{m+1}}}.$$

Таким образом, нам надо доказать, что из формулы (6) вытекает формула (7).

Соответствующая выкладка (проведите ее обязательно!) включает в себя вычисления с определителями, хотя и достаточно простые, но несколько громоздкие. Поэтому мы выберем несколько иной путь, основанный на том, что компоненты  $A^{i_1 \dots i_m}$  (рассматриваемые для всех наборов индексов  $i_1, \dots, i_m$ ) являются координатами тензора  $A$  в базисе  $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$  пространства  $T^m(\mathcal{V})$ , т. е. обладают тем свойством, что

$$A = A^{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}.$$

С другой стороны, формула (2) имеет, конечно, смысл для любых индексов  $j_1, \dots, j_{m+1}$  (а не только удовлетворяющих неравенствам  $j_1 < \dots < j_{m+1}$ ) и определенные этой формулой числа  $B^{i_1 \dots i_{m+1}} = A^{[i_1 \dots i_m]_x^{i_{m+1}}}$  обладают свойством кососимметричности. [Например, при транспозиции индексов  $j_1$  и  $j_2$  все члены в правой части формулы (2) — кроме двух последних — меняют знак (поскольку компоненты  $A^{i_1 \dots i_m}$  кососимметричны), а два последних — имеющие противоположные знаки — переставляются. Поэтому  $B^{i_2 j_1 \dots i_{m+1}} = -B^{i_1 j_2 \dots i_{m+1}}$ . Анало-

гично доказывается, что числа  $B^{I_1 \dots I_{m+1}}$  меняют знак и при транспозиции любых двух других соседних индексов. Поскольку же в произведение транспозиций соседних индексов разлагается произвольная подстановка, этим все доказано.]

Имея кососимметрические компоненты, тензор

$$B = B^{I_1 \dots I_{m+1}} e_{I_1} \otimes \dots \otimes e_{I_{m+1}}$$

кососимметричен и, значит (в силу формулы (3) лекции 9), совпадает с тензором (3). Этим доказано, что

$$(8) \quad A \wedge x = A^{[I_1 \dots I_m} x^{I_{m+1}]} e_{I_1} \otimes \dots \otimes e_{I_{m+1}],$$

т. е. что числа  $A^{[I_1 \dots I_m} x^{I_{m+1}]} \dots$  являются компонентами тензора  $A \wedge x$ .

Следовательно, для доказательства корректности конструкции тензора  $A \wedge x$  достаточно доказать, что числа  $A^{[I_1 \dots I_m} x^{I_{m+1}]} \dots$  и  $A^{[I'_1 \dots I'_m} x^{I'_{m+1}]} \dots$  связаны тензорным законом преобразования, т. е. что

$$(9) \quad A^{[I'_1 \dots I'_m} x^{I'_{m+1}]} = c_{I'_1}^{I_1} \dots c_{I'_m}^{I_m} c_{I'_{m+1}}^{I_{m+1}} A^{[I_1 \dots I_m} x^{I_{m+1}]}.$$

[Формула (9) равносильна, таким образом, формуле (7)! Убедитесь в этом непосредственной выкладкой.]

Но, по определению,

$$\begin{aligned} A^{[I'_1 \dots I'_m} x^{I'_{m+1}]} &= \\ &= \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{m-s+1} A^{I'_1 \dots \widehat{I_s} \dots I'_m} c_{I'_{m+1}}^{I_{m+1}} x^{I'_s} = \\ &= \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{m-s+1} c_{I'_1}^{I_1} \dots \widehat{c_{I'_s}^{I_s}} \dots \\ &\quad \dots c_{I'_m}^{I_m} c_{I'_{m+1}}^{I_{m+1}} A^{I_1 \dots \widehat{I_s} \dots I_{m+1}} c_{I'_s}^{I_s} x^{I_s} = \\ &= c_{I'_1}^{I_1} \dots c_{I'_s}^{I_s} \dots c_{I'_m}^{I_m} c_{I'_{m+1}}^{I_{m+1}} \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{m-s+1} A^{I_1 \dots \widehat{I_s} \dots I_{m+1}} x^{I_s} = \\ &= c_{I'_1}^{I_1} \dots c_{I'_m}^{I_m} c_{I'_{m+1}}^{I_{m+1}} A^{[I_1 \dots I_m} x^{I_{m+1}]} \end{aligned}$$

что все и доказывает.  $\square$

Заметим, в заключение, что, как и следовало ожидать, если тензор  $A$  является  $m$ -вектором  $x_1 \wedge \dots \wedge x_{m+1}$ , то

$$(10) \quad A \wedge x = x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x.$$

Действительно, в этом случае

$$A^{i_1 \dots i_m} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_m^{i_1} \\ x_1^{i_m} & \dots & x_m^{i_m} \end{vmatrix},$$

и, значит,

$$\begin{aligned} A^{[i_1 \dots i_m] x^{i_{m+1}}} &= \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{m-s+1} A^{i_1 \dots \hat{i}_s \dots i_m i_{m+1}} x^{i_s} = \\ &= \sum_{s=1}^{m+1} (-1)^{m-s+1} \underbrace{\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_m^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i_{m+1}} & \dots & x_m^{i_{m+1}} \end{vmatrix}}_{s\text{-я строчка отсутствует}} x^{i_s}, \end{aligned}$$

что, согласно формуле разложения определителя по элементам последнего столбца, равно

$$\begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_m^{i_1} & x^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{i_{m+1}} & \dots & x_m^{i_{m+1}} & x^{i_{m+1}} \end{vmatrix}.$$

Следовательно,  $A \wedge x = x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x$ .  $\square$

Зафиксировав в произвольном кососимметрическом тензоре  $A$  степени  $m$  (кососимметрическом полилинейном функционале типа  $(0, m)$ ) все аргументы кроме первого, мы получим тензор типа  $(0, 1)$ , т. е. вектор. Об этом векторе мы будем говорить, что он *ассоциирован* с тензором  $A$ . (Ср. определение 3 лекции 5.)

Если  $A = A^{i_1 \dots i_m} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$ , т. е.

$$A(\xi^1, \dots, \xi^m) = A^{i_1 \dots i_m} \xi^1_{i_1} \dots \xi^m_{i_m},$$

и если мы фиксируем ковекторы  $\xi^2, \dots, \xi^m$ , то соответствующий ассоциированный вектор  $x$  имеет координаты

$$(11) \quad x^i = A^{i i_2 \dots i_m} \xi^2_{i_2} \dots \xi^m_{i_m}.$$

Например, если  $A = x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ , и, значит,

$$A^{i_1 \dots i_m} = \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_m^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{i_m} & \dots & x_m^{i_m} \end{vmatrix},$$

то

$$\begin{aligned} x^i &= \begin{vmatrix} x_1^i & \dots & x_m^i \\ x_1^{i_2} & \dots & x_m^{i_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{i_m} & \dots & x_m^{i_m} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{i_2}^2 & \dots & \xi_{i_m}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{i_m}^m & \dots & \xi_{i_m}^m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^i & \dots & x_m^i \\ x_1^{i_2} \xi_{i_2}^2 & \dots & x_m^{i_2} \xi_{i_2}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{i_m} \xi_{i_m}^m & \dots & x_m^{i_m} \xi_{i_m}^m \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^i & \dots & x_m^i \\ \xi^2(x_1) & \dots & \xi^2(x_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^m(x_1) & \dots & \xi^m(x_m) \end{vmatrix} = D_1 x_1^i + \dots + D_m x_m^i, \end{aligned}$$

т. е.

$$x = D_1 x_1 + \dots + D_m x_m,$$

где  $D_1, \dots, D_m$  — алгебраические дополнения элементов первой строки.

Таким образом, любой вектор, ассоциированный с  $m$ -вектором  $A = x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ , линейно выражается через векторы  $x_1, \dots, x_m$ , т. е. (при  $A \neq 0$ ) лежит в подпространстве  $\mathcal{P}_A$  (параллелен  $m$ -вектору  $A$ ).

Кроме того, если  $A \neq 0$ , т. е. если векторы  $x_1, \dots, x_m$  линейно независимы, то мы без ограничения общности можем считать их первыми  $m$  векторами базиса  $e_1, \dots, e_n$ . Тогда, если  $\xi^2, \dots, \xi^m$  — ковекторы  $e^2, \dots, e^m$  сопряженного базиса, и, значит,  $\xi^i(x_k) = \delta_{ik}^i$ , то  $D_1 \neq 0$ , а  $D_2 = \dots = D_m = 0$ . Следовательно,  $x = x_1$ . Таким образом, если  $m$ -вектор  $A = x_1 \wedge \dots \wedge x_m$  отличен от нуля, то вектор  $x_1$  с ним ассоциирован.

Но мы знаем (см. лекцию 7), что для любого вектора  $x \in \mathcal{P}_A$  существуют такие векторы  $b_2, \dots, b_m$ , что  $A = x \wedge b_2 \wedge \dots \wedge b_m$ . Следовательно, принимая за  $x_2, \dots, x_m$  векторы  $b_2, \dots, b_m$ , а за  $x_1$  — вектор  $x$ , мы получаем, что каждый вектор  $x \in \mathcal{P}_A$  ассоциирован с  $m$ -вектором  $A$ .

Тем самым доказано, что вектор  $x$  тогда и только тогда ассоциирован с  $m$ -вектором  $A \neq 0$ , когда он принадлежит подпространству  $\mathcal{P}_A$ .

Это означает, что понятие ассоциированного вектора является обобщением на любые кососимметрические

тензоры понятия вектора, параллельного отличному от нуля  $m$ -вектору.

К сожалению, ассоциированные векторы, вообще говоря, не составляют подпространства (приведите пример!), и потому, чтобы получить подпространство, надо рассматривать их линейную оболочку.

Эта линейная оболочка называется *ранговым пространством* тензора  $A$  (а ее размерность — *рангом* этого тензора). Мы будем обозначать это пространство прежним символом  $\mathcal{P}_A$ .

Если вектор  $x$  параллелен отличному от нуля  $m$ -вектору  $A = x_1 \wedge \dots \wedge x_m$ , то  $x = k_1 x_1 + \dots + k_m x_m$ , и потому

$$A \wedge x = k_1 (A \wedge x_1) + \dots + k_m (A \wedge x_m).$$

С другой стороны, как мы знаем (см. формулу (9)),

$$A \wedge x_s = x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge x_s, \quad s = 1, \dots, m,$$

что в силу антикоммутативности умножения векторов равно нулю (поскольку справа множитель  $x_s$  повторяется дважды). Этим доказано, что для любого вектора  $x \in \mathcal{P}_A$  имеет место равенство

$$(12) \quad A \wedge x = 0,$$

т. е. равенство

$$(13) \quad A^{[l_1 \dots l_m] x^{l_{m+1}}} = 0.$$

Но, поскольку вектор  $x$  ассоциирован с  $m$ -вектором  $A$ , его координаты  $x^i$  выражаются формулой (11). Поэтому равенство (13) приобретает вид

$$A^{[l_1 \dots l_m] A^{l_{m+1}}} \xi_{l_2}^{l_2} \dots \xi_{l_m}^{l_m} = 0,$$

где  $\xi_{l_2}^{l_2}, \dots, \xi_{l_m}^{l_m}$  — произвольные числа.

Это означает, что для любых  $j_1, \dots, j_m, j_{m+1}$  полилинейный функционал типа  $(0, m-1)$  с коэффициентами

$$B^{l_2 \dots l_m} = A^{[l_1 \dots l_m] A^{l_{m+1}}} \xi_{l_2}^{l_2} \dots \xi_{l_m}^{l_m}$$

равен нулю. Следовательно, его коэффициенты равны нулю.

Этим доказано следующее предложение (мы заменим  $j_{m+1}$  на  $i_1$ ):

**Предложение 1.** Если кососимметрический тензор  $A$  степени  $m$  является  $m$ -вектором, то его компоненты  $A^{i_1 \dots i_m}$  удовлетворяют соотношениям

$$(14) \quad A^{[i_1 \dots i_m} A^{i_{m+1}] i_2 \dots i_m} = 0$$

для всех  $j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_m$ .

Это и есть соотношения Плюккера, которые мы искали.

**Замечание 1.** Обратим внимание, что последние рассуждения полностью обратимы, и, значит, соотношения (14) равносильны выполнению равенств (12) для любого ассоциированного вектора.

Всего имеется  $n^{2m}$  соотношений Плюккера. Однако часть из них является следствием косокоммутативности компонент  $A^{i_1 \dots i_m}$  (а также косокоммутативности чисел  $A^{[i_1 \dots i_m} A^{i_{m+1}] i_2 \dots i_m}$  по индексам  $j_1, \dots, j_m, i_1$ ). Такие соотношения мы будем называть *тривиальными*. Они не накладывают на кососимметрический тензор  $A$  никаких ограничений.

Например, соотношение (14) тривиально, если среди индексов  $j_1, \dots, j_m, i_1$  есть повторяющиеся. Поскольку при  $m = n$  это заведомо так (при  $m = n$  число этих индексов равно  $n + 1$ , а каждый из них не превосходит  $n$ ), мы видим, что при  $m = n$  все соотношения Плюккера *тривиальны*.

Среди нетривиальных соотношений Плюккера достаточно рассматривать только соотношения, для которых  $j_1 < \dots < j_m < i_1$  и  $i_2 < \dots < i_m$ , поскольку все остальные соотношения отличаются от них лишь знаком.

Таким образом, например при  $m = n - 1$ , рассмотрению подлежат лишь соотношения

$$A^{[i_1 \dots i_{n-1}} A^{i_n] i_2 \dots i_{n-1}} = 0,$$

где  $i = 1, \dots, n - 1$ . Но, по определению,

$$A^{[i_1 \dots i_{n-1}} A^{i_n] i_2 \dots i_{n-1}} = \sum_{s=1}^n (-1)^{n-s} A^{[i_1 \dots \hat{i}_s \dots i_n} A^{i_1 \dots \hat{i}_{n-1}],$$

где  $A^{[i_1 \dots \hat{i}_s \dots i_n} \neq 0$  отлично от нуля только при  $s = i$  и при  $s = n$  (причем  $A^{[i_1 \dots \hat{i}_{n-1}]} = (-1)^{i-1} A^{[i_1 \dots i_{n-1}]}$ ,

а  $A^{n1} \dots \hat{i} \dots n-1} = (-1)^n A^1 \dots \hat{i} \dots n}$ ). Поэтому

$$A^{11 \dots n-1} A^{n1} \dots \hat{i} \dots n-1} = \\ = (-1)^{n-i} A^1 \dots \hat{i} \dots n-1} \cdot (-1)^{i-1} A^1 \dots n-1} + \\ + A^1 \dots n-1} \cdot (-1)^n A^1 \dots \hat{i} \dots n} = 0.$$

Следовательно, при  $m = n - 1$  все соотношения Плюккера также тривиальны.

Это находится в полном соответствии с уже известным нам фактом, что при  $m = n$  и  $m = n - 1$  любой кососимметрический тензор степени  $m$  является  $m$ -вектором.

При  $m = 2$  соотношения Плюккера имеют вид  $A^{111} A^{111} = 0$ , т. е. — с точностью до знака — вид

$$(15) \quad A^{112} A^{112} - A^{111} A^{112} + A^{111} A^{112} = 0.$$

Поскольку при  $i_2 = j_1, j_2, i_1$  соотношение (15), как легко видеть, тривиально (если, например,  $i_2 = j_1$ , то в этом соотношении первые два члена сокращаются, а третий равен нулю), мы без ограничения общности можем предположить, что  $j_1 < j_2 < i_1$  и  $i_2 \neq j_1, j_2, i_1$ . (Заметим, что и при любом  $m$  соотношение (14) тривиально, если хотя бы один из индексов  $i_2, \dots, i_m$  совпадает с одним из индексов  $j_1, \dots, j_m, i_1$ .)

Например, при  $(j_1, j_2, i_1, i_2) = (1, 2, 3, 4)$  мы получаем соотношение

$$(16) \quad A^{12} A^{34} - A^{13} A^{24} + A^{13} A^{14} = 0.$$

При  $n = 4$  возможны еще три аналогичных соотношения, но, выписав их, мы немедленно убедимся, что они совпадают с соотношением (16). Таким образом (16) является при  $n = 4$  (и  $m = 2$ ) единственным нетривиальным соотношением Плюккера.

Соотношение (16) было уже получено другим методом в лекции 8 (см. формулу (12) лекции 8).

Внимательный читатель должен был уже заметить, что мы пока еще не доказали, что соотношения (14) являются соотношениями Плюккера в смысле лекции 8, т. е. что они исчерпывают все соотношения, которым должны удовлетворять координаты  $m$ -векторов. Другими словами, мы доказали только необходимость этих соотношений (для того чтобы кососимметрический тензор был поливектором), но не их достаточность.

Мы сделаем это в следующей лекции.