Лекция 9б

Достаточность соотношений Плюккера. — Внешнее умножение произвольных кососимметрических тензоров. — Алгебра Грассмана. — Оператор Ходжа. — Свойства оператора Ходжа.

Пусть A — произвольный кососимметрический тензор степени m и пусть r — его ранг (размерность соответствующего рангового пространства $\mathscr{P}_A$). Пусть, далее, $e_1, \ldots, e_n$ — такой базис пространства $\mathscr{V}$, что векторы $e_1, \ldots, e_r$ составляют базис пространства $\mathscr{P}_A$, и пусть $A^{i_1 \cdots i_m}$ — компоненты тензора A в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

Предложение 1. *Если хотя бы один из индексов $i_1, \ldots, i_m$ больше r, то*

$$A^{i_1 \cdots i_m} = 0. \tag{1}$$

Доказательство. В рассматриваемом базисе координаты каждого вектора из $\mathscr{P}_A$ и, в частности (см. формулу (1) лекции 9а), координаты $A^{ii_2 \cdots i_m}\xi^2_{i_2} \ldots \xi^m_{i_m}$ произвольного ассоциированного с тензором вектора равны нулю при $i > r$, что ввиду произвольности чисел $\xi^2_{i_2}, \ldots, \xi^m_{i_m}$ возможно только тогда, когда $A^{ii_2 \cdots i_m} = 0$ для любых $i_2, \ldots, i_m$. Этим равенство (1) доказано при $i_1 > r$. В силу кососимметричности компонент $A^{i_1 \cdots i_m}$ это равенство справедливо поэтому и тогда, когда любой из индексов $i_1, \ldots, i_m$ больше r. □

Следствие 1. *Для любого базиса $x_1, \ldots, x_r$ пространства $\mathscr{P}_A$ тензор A линейно выражается через m-векторы вида*

$$x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}.$$

Доказательство. Если базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ выбран так, что

$$e_1 = x_1, \ldots, e_r = x_r,$$

то, согласно предложению 1, в разложении

$$A = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \ldots \sum A^{i_1 \cdots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}$$

тензора A по базисным m-векторам (см. формулу (3) лекции 7) могут быть отличны от нуля только члены,

для которых $i_m \leqslant r$. Поэтому это разложение имеет вид

$$A = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant r} \ldots \sum A^{i_1 \ldots i_m} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_m} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant r} \ldots \sum A^{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m}. \ \square$$

Следствие 2. *Если $A \neq 0$, то $m \leqslant r$.* $\square$

Заметим, что если $A = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$, то $m = r$ (потому что в этом случае подпространство $\mathscr{P}_A$ порождается, как мы знаем, векторами $x_1, \ldots, x_m$). Верно и обратное утверждение:

Предложение 2. *Если $m = r$, то A является m-вектором.*

Доказательство. При $m = r$ разложение

$$A = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant r} \ldots \sum A^{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m} \tag{2}$$

содержит только один член (отвечающий индексам $i_1 = 1, \ldots, i_m = m$), и потому

$$A = A^{1 \ldots m} x_1 \wedge \ldots \wedge x_m. \ \square$$

Теперь мы уже можем непосредственно приступить к доказательству достаточности соотношений Плюккера.

Согласно замечанию 1 лекции 9а соотношения Плюккера равносильны тому, что

$$A \wedge x = 0 \tag{3}$$

для любого вектора $x \in \mathscr{P}_A$. Поэтому нам нужно лишь доказать, что *любой кососимметрический тензор A степени m, удовлетворяющий условию* (3), *является m-вектором.*

Имея это в виду и предполагая, что $A \neq 0$, рассмотрим снова произвольный базис $x_1, \ldots, x_r$ пространства $\mathscr{P}_A$. Согласно условию, для любого $s = 1, \ldots, r$ имеет место равенство

$$A \wedge x_s = 0,$$

которое ввиду формулы (2) может быть переписано в следующем виде:

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant r} \ldots \sum A^{i_1 \ldots i_m} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m} \wedge x_s = 0. \tag{4}$$

Если s содержится среди индексов $i_1, \ldots, i_m$, то соответствующий член суммы (4) равен нулю. Поэтому

можно считать, что в отношении (4) суммирование ведется лишь по индексам $i_1, \ldots, i_m$, отличным от s.

Но при $i_1, \ldots, i_m$, не равных s, все $m+1$-векторы вида

$$x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m} \wedge x_s,$$

очевидно, линейно независимы (с точностью до знака они являются базисными $m+1$-векторами пространства $\mathcal{P}_A$). Поэтому все коэффициенты в (сокращенной) сумме (4) равны нулю, т. е. $A^{i_1 \cdots i_m} = 0$, если $i_1, \ldots, i_m \neq s$.

Этим доказано, что если $A^{i_1 \cdots i_m} \neq 0$, то среди индексов $i_1, \ldots, i_m$ непременно присутствует индекс s, т. е. — поскольку индекс s был произволен — непременно присутствуют все индексы $1, \ldots, r$.

Следовательно, если $m < r$, то $A^{i_1 \cdots i_m} = 0$ для любых индексов $i_1, \ldots, i_m$, и, значит, $A = 0$.

Таким образом, если $A \neq 0$, то необходимо $m \geqslant r$.

Но согласно следствию 2 предложения 1, всегда $m \leqslant r$ (при $A \neq 0$).

Поэтому $m = r$, и, значит, согласно предложению 2, тензор A является m-вектором. □

Обсудим теперь внешнее умножение произвольных кососимметрических тензоров, которое определяется по очевидной аналогии с уже известным нам внешним умножением тензора на вектор.

Для базисных поливекторов естественно положить

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) \wedge (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}) = \\ = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$$

(правая часть либо равна нулю, либо — после соответствующей перестановки множителей — является с точностью до знака базисным $p+q$-вектором). Соответственно этому для тензоров

$$A = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \ldots \sum A^{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$$

и

$$B = \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_q \leqslant n} \ldots \sum B^{j_1 \cdots j_q} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}$$

мы положим

$$(5)\qquad A \wedge B = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n \\ 1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n}} \ldots \sum A^{i_1 \ldots i_p} B^{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}.$$

В последней формуле заведомо равны нулю члены, для которых среди индексов

$$(6)\qquad i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$$

есть одинаковые.

Если же индексы (6) различны, то их можно единственным образом представить в виде

$$k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(m)}, \qquad m = p + q,$$

где $k_1 < \ldots < k_m$, а σ — некоторая подстановка степени m, и тогда соответствующий член суммы (5) будет равен

$$\varepsilon_\sigma A^{k_{\sigma(1)} \ldots k_{\sigma(p)}} B^{k_{\sigma(p+1)} \ldots k_{\sigma(m)}} e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_m}$$

(суммирование не производится).

Этим доказано, что

$$(7)\qquad A \wedge B = \sum_{1 \leq k_1 < \ldots < k_m \leq n} \ldots \sum A^{[k_1 \ldots k_p} B^{k_{p+1} \ldots k_m]} e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_m},$$

где положено

$$(8)\qquad A^{[k_1 \ldots k_p} B^{k_{p+1} \ldots k_m]} = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma A^{k_{\sigma(1)} \ldots k_{\sigma(p)}} B^{k_{\sigma(p+1)} \ldots k_{\sigma(m)}}.$$

Суммирование в формуле (8) распространено на все подстановки σ степени $m = p + q$, которые сохраняют взаимный порядок отдельно индексов $i_1, \ldots, i_p$ и отдельно индексов $j_1, \ldots, j_q$, т. е. обладают тем свойством, что

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(p) \quad \text{и} \quad \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(m).$$

(Такие подстановки называются иногда *перетасовками типа* (p, q).)

Заметим, что $A \wedge B \in \Lambda^{p+q}(\mathscr{V})$, т. е.

$$\deg(A \wedge B) = \deg A + \deg B.$$

Конечно, следует проверить корректность определения тензора $A \wedge B$, т. е. его независимость от выбора базиса. Для этого, как и в рассмотренном в лекции 9а частном случае $q = 1$, достаточно ввести в рассмотрение числа (8) для всех индексов $k_1, \ldots, k_m$ и проверить, что

а) они обладают свойством кососимметричности,

б) при изменении базиса преобразуются по тензорному закону.

Действительно, тогда в силу б) тензор

$$A^{[k_1 \cdots k_p} B^{k_{p+1} \cdots k_m]} e_1 \otimes \ldots \otimes e_m$$

будет корректно определен, а в силу а) он будет совпадать с тензором $A \wedge B$.

Утверждение б) проверяется простой выкладкой, по существу не отличающейся от соответствующей выкладки для случая $q = 1$ в лекции 9а: так как для любой подстановки σ и любых индексов $k'_1, \ldots, k'_m$ и $k_1, \ldots, k_m$ имеет место равенство

$$c^{k'_{\sigma(1)}}_{k_{\sigma(1)}} \ldots c^{k'_{\sigma(p)}}_{k_{\sigma(p)}} c^{k'_{\sigma(p+1)}}_{k_{\sigma(p+1)}} \ldots c^{k'_{\sigma(m)}}_{k_{\sigma(m)}} = c^{k'_1}_{k_1} \ldots c^{k'_p}_{k_p} c^{k'_{p+1}}_{k_{p+1}} \ldots c^{k'_m}_{k_m}$$

(справа содержатся те же множители, что и слева, но в другом порядке), то

$$A^{[k'_1 \cdots k'_p} B^{k'_{p+1} \cdots k'_m]} = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma A^{k'_{\sigma(1)} \cdots k'_{\sigma(p)}} B^{k'_{\sigma(p+1)} \cdots k'_{\sigma(m)}} =$$

$$= \sum_\sigma \varepsilon_\sigma c^{k'_{\sigma(1)}}_{k_{\sigma(1)}} \ldots c^{k'_{\sigma(p)}}_{k_{\sigma(p)}} c^{k'_{\sigma(p+1)}}_{k_{\sigma(p)}} \ldots$$

$$\ldots c^{k'_{\sigma(m)}}_{k_{\sigma(m)}} A^{k_{\sigma(1)} \cdots k_{\sigma(p)}} B^{k_{\sigma(p+1)} \cdots k_{\sigma(m)}} = c^{k'_1}_{k_1} \ldots c^{k'_p}_{k_p} c^{k'_{p+1}}_{k_{p+1}} \ldots$$

$$\ldots c^{k'_m}_{k_m} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma A^{k_{\sigma(1)} \cdots k_{\sigma(p)}} B^{k_{\sigma(p+1)} \cdots k_{\sigma(m)}} =$$

$$= c^{k'_1}_{k_1} \ldots c^{k'_p}_{k_p} c^{k'_{p+1}}_{k_{p+1}} \ldots c^{k'_m}_{k_m} A^{[k_1 \cdots k_p} B^{k_{p+1} \cdots k_m]}. \quad \square$$

Что же касается утверждения а), то для его доказательства достаточно проверить, что числа (8) меняют знак при транспозиции любых двух соседних индексов k_a и k_{a+1}, $a = 1, \ldots, m-1$, т. е., что

$$A^{[l_1 \cdots l_p} B^{l_{p+1} \cdots l_m]} = - A^{[k_1 \cdots k_p} B^{k_{p+1} \cdots k_m]}, \tag{9}$$

где $l_1, \ldots, l_p, l_{p+1}, \ldots, l_m$ — переставленные индексы

$k_1, \ldots, k_p, k_{p+1}, \ldots, k_m$ (так что

$$l_b = \begin{cases} k_{a+1}, & \text{если} \quad b = a, \\ k_a, & \text{если} \quad b = a+1, \\ k_b, & \text{если} \quad b \neq a,\ a+1 \end{cases}$$

для любого $b = 1, \ldots, m$), а

$$(10) \quad A^{[l_1 \cdots l_p} B^{l_{p+1} \cdots l_m]} = \sum_{\sigma} A^{l_{\sigma(1)} \cdots l_{\sigma(p)}} B^{l_{\sigma(p)} \ldots l_{\sigma(m)}}$$

(суммирование распространено на те же перетасовки σ, что и в сумме (8)).

Рассмотрим сначала случай, когда перетасовка σ обладает тем свойством, что оба числа a и $a+1$ содержатся либо среди чисел $\sigma(1), \ldots, \sigma(p)$, либо среди чисел $\sigma(p+1), \ldots, \sigma(m)$. Если, например, a и $a+1$ содержатся среди чисел $\sigma(p+1), \ldots, \sigma(m)$, то индексы $l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(p)}$ совпадают с индексами $k_{\sigma(1)}, \ldots, k_{\sigma(p)}$, а индексы $l_{\sigma(p+1)}, \ldots, l_{\sigma(m)}$ получаются из индексов $k_{\sigma(p+1)}, \ldots, k_{\sigma(m)}$ транспозицией. Поэтому $A^{l_{\sigma(1)} \cdots l_{\sigma(p)}} = A^{k_{\sigma(1)} \cdots k_{\sigma(p)}}$, $B^{l_{\sigma(p+1)} \cdots l_{\sigma(m)}} = -B^{k_{\sigma(p+1)} \cdots k_{\sigma(m)}}$, и, следовательно,

$$\varepsilon_\sigma A^{l_{\sigma(1)} \cdots l_{\sigma(p)}} B^{l_{\sigma(p+1)} \cdots l_{\sigma(m)}} = \\ = -\varepsilon_\sigma A^{k_{\sigma(1)} \cdots k_{\sigma(p)}} B^{k_{\sigma(p+1)} \cdots k_{\sigma(m)}}.$$

То же равенство будет иметь место, конечно, и когда числа a и $a+1$ содержатся среди чисел $\sigma(1), \ldots, \sigma(p)$.

Пусть теперь одно из чисел a или $a+1$ содержится среди чисел $\sigma(1), \ldots, \sigma(p)$, а другое — среди чисел $\sigma(p+1), \ldots, \sigma(m)$ и пусть τ — композиция подстановки σ с транспозицией $(a, a+1)$, переставляющей индексы a и $a+1$. Легко видеть, что τ также будет перетасовкой (т. е. будут иметь место неравенства $\tau(1) < \ldots < \tau(p)$ и $\tau(p+1) < \ldots < \tau(m)$). С другой стороны, ясно, что

$$A^{k_{\tau(1)} \cdots k_{\tau(p)}} = A^{l_{\sigma(1)} \cdots l_{\sigma(p)}},$$

$$B^{k_{\tau(p+1)} \cdots k_{\tau(m)}} = B^{l_{\sigma(p+1)} \cdots l_{\sigma(m)}}$$

и $\varepsilon_\tau = -\varepsilon_\sigma$. Поэтому

$$\varepsilon_\sigma A^{l_{\sigma(1)} \cdots l_{\sigma(p)}} B^{l_{\sigma(p+1)} \cdots l_{\sigma(m)}} = \\ = -\varepsilon_\tau A^{k_{\tau(1)} \cdots k_{\tau(p)}} B^{k_{\tau(p+1)} \cdots k_{\tau(m)}}.$$

Таким образом, мы видим, что каждому члену суммы (8) отвечает член суммы (10), отличающийся лишь

знаком (и соответствующий в первом случае той же перетасовке σ, а во втором — перетасовке τ, получающейся из σ транспозицией). Это доказывает равенство (9) и вместе с ним — корректность определения (7). □

Ясно, что внешнее умножение однородно, т. е.

$$(\lambda A) \wedge B = A \wedge (\lambda B) = \lambda (A \wedge B)$$

для любых кососимметрических тензоров $A \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$, $B \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$ и любого числа $\lambda \in \mathbb{K}$, и дистрибутивно относительно сложения, т. е.

$$(A_1 + A_2) \wedge B = A_1 \wedge B + A_2 \wedge B,$$
$$A \wedge (B_1 + B_2) = A \wedge B_1 + A \wedge B_2$$

для любых кососимметрических тензоров $A, A_1, A_2 \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$ и $B, B_1, B_2 \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$.

Вместе с равенством $\deg(A \wedge B) = \deg A + \deg B$ это по определению означает, что линейные пространства

$$\bigwedge^0(\mathscr{V}), \quad \bigwedge^1(\mathscr{V}), \ldots, \bigwedge^m(\mathscr{V}), \ldots$$

составляют **градуированную алгебру**. Эта алгебра обозначается символом $\bigwedge(\mathscr{V})$ и называется *алгеброй Грассмана* линейного пространства $\mathscr{V}$.

Напомним, что

$$\bigwedge^0(\mathscr{V}) = \mathbb{K}, \quad \bigwedge^1(\mathscr{V}) = \mathrm{T}^1(\mathscr{V}) = \mathscr{V}$$

и

$$\bigwedge^m(\mathscr{V}) = 0 \quad \text{при} \quad m > n.$$

Очевидно, что на базисных поливекторах внешнее умножение ассоциативно, т. е.

$$((e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) \wedge (e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q})) \wedge (e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_r}) =$$
$$= (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) \wedge ((e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q}) \wedge (e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_r}))$$

для любых индексов $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q, k_1, \ldots, k_r$ (ибо обе части этого равенства равны одному и тому же поливектору $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_q} \wedge e_{k_1} \wedge \ldots \wedge e_{k_r}$). Поэтому внешнее умножение ассоциативно и для произвольных кососимметрических тензоров, т. е.

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

для любых тензоров $A \in \bigwedge^p(\mathscr{V})$, $B \in \bigwedge^q(\mathscr{V})$, $C \in \bigwedge^r(\mathscr{V})$.

[В частности это доказывает, что

(11) $$A^{[[i_1 \dots i_p} B^{j_1 \dots j_q]} C^{k_1 \dots k_r]} = A^{[i_1 \dots i_p} B^{[j_1 \dots j_q} C^{k_1 \dots k_r]]}$$

для любых индексов $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q, k_1, \dots, k_r$. Докажите равенство (11) непосредственным вычислением с суммами.]

Таким образом, мы видим, что *алгебра Грассмана* $\Lambda(\mathscr{V})$ *ассоциативна.*

Далее, так как для подстановки

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ q+1 & \dots & p+q & 1 & \dots & q \end{pmatrix}$$

имеет место, как легко видеть, равенство

$$\varepsilon_\sigma = (-1)^{pq},$$

то для любых базисных поливекторов $\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}$ и $\boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_q}$ справедливо тождество

$$(\boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_q}) \wedge (\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}) = \\ = (-1)^{pq} (\boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}) \wedge (\boldsymbol{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \boldsymbol{e}_{j_q}).$$

Поэтому аналогичное тождество

(12) $$B \wedge A = (-1)^{pq} A \wedge B$$

справедливо для любых кососимметрических тензоров $A \in \Lambda^p(\mathscr{V})$ и $B \in \Lambda^q(\mathscr{V})$.

Свойство, выражаемое формулой (12), называется *кососкоммутативностью.*

Замечание 1. В первом издании этих «Лекций» внешнее умножение кососимметрических тензоров строилось иначе: посредством конструкции, не зависящей от выбора базиса (см. ниже формулу (14)). Конечно, вопрос о корректности тогда не возникал, но зато, например, доказательство ассоциативности оказывалось довольно трудным. Для полного освоения техники работы с кососимметрическими тензорами желательно владеть обоими подходами к внешнему умножению. Поэтому мы советуем читателю проработать соответствующий материал и по первому изданию (это конец лекции 6, лекции 7—9 и первая половина лекции 10).

Замечание 2. Все понятия и результаты, касающиеся тензоров типа $(0, m)$, естественным образом переносятся и на тензоры типа $(m, 0)$, т. е. на полилинейные функционалы A: $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m \longmapsto A(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_m)$ от

векторов. Единственное отличие состоит в том, что там, где индексы были внизу, они теперь окажутся вверху, и наоборот. В частности, компоненты тензоров типа $(m, 0)$ имеют вид $A_{i_1 \dots i_m}$ и любой такой тензор единственным образом записывается в виде

$$A = A_{i_1 \dots i_m} e^{i_1} \otimes \dots \otimes e^{i_m},$$

а в случае, когда он кососимметричен, то и в виде

$$A = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} \dots \sum A_{i_1 \dots i_m} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m},$$

где

$$e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_m} = \sum_{\sigma \in S_m} \varepsilon_\sigma e^{i_{\sigma(1)}} \otimes \dots \otimes e^{i_{\sigma(m)}}.$$

Нужно приобрести навык работы с такими тензорами, поскольку именно они будут играть основную роль в следующем семестре (в связи, скажем, с интегрированием на гладких многообразиях).

Задача. Докажите, что значение $A(x_1, \dots, x_n)$ кососимметрического тензора A типа $(m, 0)$ на векторах $x_1, \dots, x_m$ выражается формулой

$$(13) \quad A(x_1, \dots, x_m) = \\ = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_m \leqslant n} \dots \sum A_{i_1 \dots i_m} \begin{vmatrix} x_1^{i_1} & \dots & x_1^{i_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_m^{i_1} & \dots & x_m^{i_m} \end{vmatrix}.$$

Докажите также, что

$$(14) \quad (A \wedge B)(x_1, \dots, x_p, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}) = \\ = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) B(x_{\sigma(p)}, \dots, x_{\sigma(p+q)})$$

для любых кососимметрических тензоров A и B соответственно типов $(p, 0)$ и $(q, 0)$ и любых векторов x_p, $x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$, где суммирование распространено на все перетасовки типа (p, q).

Предположим теперь, что пространство $\mathscr{V}$ ориентировано и евклидово.

Как мы знаем из первого семестра (см. лекцию I. 15), в евклидовом ориентированном трехмерном пространстве $\mathscr{V}$ пространство бивекторов $\bigwedge^2 \mathscr{V} = \mathscr{V} \wedge \mathscr{V}$ естественно изоморфно самому пространству $\mathscr{V} = \bigwedge^1 \mathscr{V}$.

Оказывается, что аналогичный изоморфизм имеет место и в общем случае.

Теорема 1. *Для любого ориентированного евклидова n-мерного пространства $\mathscr{V}$ и любого r, $0 \leqslant r \leqslant n$, существует естественный изоморфизм*

$$(15) \qquad *: \Lambda^r \mathscr{V} \to \Lambda^{n-r} \mathscr{V}.$$

На базисных r-векторах $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n$, соответствующих положительно ориентированному ортонормированному базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$, изоморфизм (13) *действует по формуле*

$$(16) \qquad *(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}) = (-1)^w e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-r}},$$

где $j_1 < \ldots < j_{n-r}$ — расположенные в возрастающем порядке числа отрезка $[1, \ldots, n]$ натурального ряда, отличные от чисел $i_1, \ldots, i_r$, а w — число инверсий в перестановке $(i_1, \ldots, i_r, j_1, \ldots, j_{n-r})$.

Доказательство. На первый взгляд теорема 1 кажется очевидной, поскольку формула (16) определяет, конечно, некоторый изоморфизм $\Lambda^r \mathscr{V} \to \Lambda^{n-r} \mathscr{V}$. Однако в этой формуле участвует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ и суть дела состоит в том, что получающийся изоморфизм от выбора этого базиса на самом деле не зависит. Поскольку непосредственная проверка этого факта требует довольно длинных и искусных вычислений (см. ниже замечание 3), мы не будем определять изоморфизм (15) формулой (16) и пойдем другим путем.

Евклидова структура и ориентация пространства $\mathscr{V}$ позволяет (см. лекцию I. 9) однозначно определить в этом пространстве некоторый элемент объема (отличный от нуля n-вектор) $\mathfrak{e}$. В произвольном положительно ориентированном ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ этот элемент объема задается формулой

$$\mathfrak{e} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

[Это определение корректно, так как при переходе к другому положительно ориентированному ортонормированному базису n-вектор $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ умножается на определитель $\det C$ матрицы перехода C и, значит (поскольку $\det C = 1$), остается прежним.]

Для каждого кососимметрического тензора $A \in \Lambda^r \mathscr{V}'$ степени r на сопряженном пространстве $\mathscr{V}'$ тензорное

произведение $T = \mathfrak{e} \otimes A$ является тензором типа (r, n) с компонентами

$$T^{i_1 \dots i_n}_{k_1 \dots k_r} = \varepsilon^{i_1 \dots i_n} A_{k_1 \dots k_r},$$

где $\varepsilon^{i_1 \dots i_n}$ — компоненты n-вектора $\mathfrak{e}$, а $A_{k_1 \dots k_r}$ — компоненты тензора A. Произведя в тензоре T свертку по первым r индексам и разделив на $r!$, мы получим тензор B типа $(0, n-r)$ с компонентами

$$B^{j_1 \dots j_{n-r}} = \frac{1}{r!} \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} A_{i_1 \dots i_r}.$$

Так как компоненты $\varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}}$ кососимметричны по индексам $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r}$ и, значит, в частности, по индексам $j_1, \dots, j_{n-r}$, то тензор B кососимметричен, т. е. принадлежит пространству $\Lambda^{n-r}\mathscr{V}$. Ясно, что соответствие $A \mapsto B$ (определенное — заметим — без какого-либо произвола) является линейным отображением

$$\Lambda^r \mathscr{V}' \to \Lambda^{n-r} \mathscr{V}.$$

Это отображение, рассматриваемое в силу естественного отождествления $\mathscr{V}' = \mathscr{V}$ как отображение $\Lambda^r \mathscr{V} \to \Lambda^{n-r} \mathscr{V}$, мы и примем за отображение (15).

В компонентах (относительно произвольного базиса $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$) отображение (15) определяется, таким образом, формулой

$$(* A)^{j_1 \dots j_{n-r}} = \frac{1}{r!} \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} A^{k_1 \dots k_r},$$

где $A^{k_1 \dots k_r}$ — компоненты тензора $A \in \Lambda^r \mathscr{V}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, а g_{ik} — метрические коэффициенты этого базиса (см. в лекции 6 общие правила спуска и подъема индексов). В частности, если базис $e_1, \dots, e_n$ ортонормирован, то

$$(* A)^{j_1 \dots j_{n-r}} = \frac{1}{r!} \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} \delta_{i_1 k_1} \dots \delta_{i_r k_r} A^{k_1 \dots k_r} =$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{i_1, \dots, i_r} \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} A^{i_1 \dots i_r} =$$

$$= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \dots \sum \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} A^{i_1 \dots i_r}$$

(в последнем преобразовании мы воспользовались кососимметричностью компонент $\varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}}$ и $A^{i_1 \dots i_r}$ по $i_1 \dots i_r$).

Поскольку компоненты $\varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}}$ кососимметричны по всем индексам (и, значит, равны нулю, если хотя бы два индекса совпадают), то мы можем считать, что в последней сумме суммирование распространено лишь на индексы $i_1, \dots, i_r$, отличные от индексов $j_1, \dots, j_{n-r}$. Но так как в (единственно интересном) случае, когда индексы $j_1, \dots, j_{n-r}$ все различны, это вместе с условием $i_1 < \dots < i_r$ однозначно определяет индексы $i_1, \dots, i_r$, то, следовательно, эта сумма содержит только одно слагаемое.

Тем самым доказано, что в любом ортонормированном базисе пространства $\mathscr{V}$ компоненты $(*A)^{j_1 \dots j_{n-r}}$, $1 \leqslant j_1 < \dots < j_{n-r} \leqslant n$, тензора $*A$ выражаются через компоненты $A^{i_1 \dots i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n$, тензора A по формуле

$$(*A)^{j_1 \dots j_{n-r}} = \varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} A^{i_1 \dots i_r},$$

где все индексы $i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r}$ различны (и, значит, составляют некоторую перестановку чисел $1, \dots, n$). Поскольку в силу кососимметричности

$$\varepsilon^{i_1 \dots i_r j_1 \dots j_{n-r}} = (-1)^{w} \varepsilon^{1 \dots n},$$

где w, как и выше, число инверсий в перестановке $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{n-r})$, и поскольку для положительно ориентированного базиса $\varepsilon^{1 \dots n} = 1$, тем самым доказано, что в положительно ориентированном ортонормированном базисе

$$(*A)^{j_1 \dots j_{n-r}} = (-1)^{w} A^{i_1 \dots i_r}.$$

Применительно к $A = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$ это, очевидно, дает (16).

Таким образом, мы корректно построили некоторое линейное отображение (15) и показали, что в любом положительно ориентированном ортонормированном базисе $e_1, \dots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ оно действует по формуле (16).

Поскольку, как уже выше было замечено, отображение, определенное формулой (16), является, очевидно, изоморфизмом, теорема 1 тем самым полностью доказана. □

Изоморфизм (15) называется *оператором Ходжа*.

Наглядно геометрически изоморфизм (15) сопоставляет каждому r-вектору, рассматриваемому как r-мерная ориентированная площадка, ортогональную площадку дополнительной размерности, $n-r$-мерный объем которой равен r-мерному объему данной площадки.

Замечание 3. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ — два положительно ориентированных ортонормированных базиса пространства $\mathscr{V}$ и пусть C — соответствующая матрица перехода. Тогда для любых индексов $i'_1, \ldots, i'_r$, $1 \leqslant i'_1 < \ldots < i'_r \leqslant n$, векторы $e_{i_1}, \ldots, e_{i_r}$ и $e_{i'_1}, \ldots, e_{i'_r}$ будут удовлетворять условиям предложения 1 лекции 7, и потому, согласно этому предложению, будет иметь место равенство

$$e_{i'_1} \wedge \ldots \wedge e_{i'_r} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \ldots \sum C \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ i'_1 & \ldots & i'_r \end{pmatrix} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r},$$

где $C \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ i'_1 & \ldots & i'_r \end{pmatrix}$ — минор матрицы C, соответствующий строкам и столбцам с номерами $i_1, \ldots, i_r$ и $i'_1, \ldots, i'_r$ соответственно. Поэтому

$$*(e_{i'_1} \wedge \ldots \wedge e_{i'_r}) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \ldots \sum C \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ i'_1 & \ldots & i'_r \end{pmatrix} [*(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r})],$$

т. е. в понятных обозначениях

$$(-1)^{w'} e_{j'_1} \wedge \ldots \wedge e_{j'_{n-r}} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant n} \ldots \sum (-1)^{w} C \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_r \\ j'_1 & \ldots & j'_r \end{pmatrix} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-r}}.$$

Поскольку, с другой стороны,

$$e_{j'_1} \wedge \ldots \wedge e_{j'_{n-r}} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{n-r} \leqslant n} \ldots \sum C \begin{pmatrix} j_1 & \ldots & j_{n-r} \\ j'_1 & \ldots & j'_{n-r} \end{pmatrix} e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-r}},$$

этим доказано, что

$$C\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r \\ i'_1 & \dots & i'_r \end{pmatrix} = (-1)^{w+w'} C\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{n-r} \\ j'_1 & \dots & j'_{n-r} \end{pmatrix}.$$

Здесь справа стоит произвольный минор порядка r собственной ортогональной матрицы C, а слева — его алгебраическое дополнение. Таким образом, мы доказали, что *любой минор собственной ортогональной матрицы равен своему алгебраическому дополнению.* Обратно из этого утверждения (прямое вычислительное доказательство которого отнюдь не просто) непосредственно вытекает, что формула (16) корректно определяет изоморфизм (15).

На базисном векторе 1 линеала $\Lambda^0\mathscr{V} = \mathbf{R}$ оператор Ходжа действует по формуле $*1 = \mathbf{e}$, т. е. по формуле

$$*1 = e_1 \wedge \dots \wedge e_n,$$

а на базисных векторах $e_1, \dots, e_n$ линеала $\Lambda^1\mathscr{V} = \mathscr{V}$ (составляющих положительно ориентированный ортонормированный базис) — по формуле

$$*e_i = (-1)^i e_1 \wedge \dots \wedge \hat{e}_i \wedge \dots \wedge e_n, \qquad i = 1, \dots, n,$$

где, как всегда, знак $\hat{}$ означает, что соответствующий множитель должен быть опущен.

Поскольку оператор $*$ определен для любых r, мы, в частности, можем применить его к тензору $*A$, где $A \in \Lambda^r\mathscr{V}$, и получить тензор $**A \in \Lambda^1\mathscr{V}$. При этом оказывается, что

$$(17) \qquad **A = (-1)^{(n+1)r} A \quad \text{для любого} \quad A \in \Lambda^r\mathscr{V}.$$

Действительно ясно, что формулу (17) достаточно доказать лишь для базисных r-векторов $A = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, $1 \leqslant i_1 < \dots < i_r < n$. Но если $A = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_r}$, то, согласно формуле (16),

$$**A = (-1)^{w+w'} A,$$

где w — число инверсий в перестановке $(i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_{n-r})$, а w' — число инверсий в перестановке $(j_1, \dots, j_{n-r}, i_1, \dots, i_r)$. С другой стороны, если a_s — такой номер, что

$$j_{a_s} < i_s < j_{a_s+1}, \qquad s = 1, \dots, r$$

(при $i_1 < j_1$ считается, что $a_1 = 0$, а при $j_{n-r} < i_r$ — что $a_r = n - r$), то

$$w = a_1 + \ldots + a_r$$

и

$$w' = (n - r - a_1) + \ldots + (n - r - a_r)$$

(напомним, что по условию $i_1 < \ldots < i_r$ и $j_1 < \ldots < j_{n-r}$). Поэтому $w + w' = (n - r) r = (n + 1) r - (r^2 - r)$ и, значит,

$$(-1)^{w+w'} = (-1)^{(n+1)r},$$

что и доказывает формулу (17). □