Лекция 10

Кососимметрические билинейные функционалы. — Пфаффиан кососимметрической матрицы. — Симплектические пространства. — Симплектическая группа. — Изотропные подпространства.

Изучим более внимательно кососимметрические билинейные функционалы на линейном пространстве $\mathscr{V}$.

В заданном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ каждый кососимметрический билинейный функционал A может быть выражен через ковекторы $e^1, \ldots, e^n$ сопряженного базиса пространства $\mathscr{V}'$ посредством формул

$$A = a_{ij}(e^i \otimes e^j) = \sum_{i<j} a_{ij}(e^i \wedge e^j), \tag{1}$$

коэффициенты $a_{ij} = A(e_i, e_j)$ которых для любых $i, j = 1, \ldots, n$ удовлетворяют соотношению

$$a_{ji} = -a_{ij},$$

т. е составляют кососимметрическую матрицу

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a1n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

которая — см. лекцию 5 — называется матрицей функционала A в базисе $e_1, \ldots, e_n$, а ее ранг — рангом функционала A.

Замечание 1. Столбцы матрицы (2) состоят из координат ассоциированных ковекторов $x \mapsto A(x, e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, и потому ее ранг равен размерности линейной оболочки этих ковекторов. Поскольку эта линейная оболочка является не чем иным, как ранговым пространством функционала A (являющимся для функционалов от векторов подпространством сопряженного пространства $\mathscr{V}'$), ранг кососимметрического билинейного функционала A совпадает, следовательно, с его рангом как кососимметрического тензора (см. лекцию 9а).

Значение $A(x, y)$ функционала A на любых векторах $x = x^i e_i$ и $y = y^j e_j$ пространства $\mathscr{V}$ выражается кососимметрической билинейной формой $a_{ij}x^i y^j$ от координат этих векторов, что в параллель к формулам (1) можно

записать следующими двумя равносильными способами:

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = a_{ij}x^i y^j = \sum_{i<j} a_{ij}(x^i y^j - y^j x^i). \tag{3}$$

В матричных обозначениях первая из формул (3) имеет вид

$$A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = x^{\mathrm{T}} A y,$$

где x и y — столбцы координат векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, а A — матрица (2).

Предложение 1. *Для любого кососимметрического билинейного функционала A существует базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$, в котором матрица этого функционала имеет вид*

$$\left\| \begin{matrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & 0 & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{matrix} \right\|. \tag{4}$$

Доказательство. Проведем индукцию по размерности n пространства $\mathscr{V}$, учитывая, что при $n = 0$ предложение 1 заведомо справедливо (впрочем, оно, очевидно, справедливо и при $n = 1$).

Если $A = 0$, доказывать нечего. Пусть $A \neq 0$, т. е. пусть существуют такие (автоматически линейно независимые) векторы $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{y}_0$, что $A(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) \neq 0$. Мы положим

$$\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_0, \quad \boldsymbol{e}_2 = \frac{\boldsymbol{y}_0}{A(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0)}.$$

Тогда $A(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2) = 1$ (а $A(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = -1$).

Ясно, что множество $\mathscr{P}$ всех векторов $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$, для которых

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_1) = 0 \quad \text{и} \quad A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_2) = 0,$$

является подпространством пространства $\mathscr{V}$.

Кроме того, для любого вектора $x \in \mathscr{V}$ вектор $x - A(x, e_2)e_1 + A(x, e_1)e_2$ принадлежит, очевидно, подпространству $\mathscr{P}$, а если $ae_1 + be_2 \in \mathscr{P}$, то $a = A(ae_1 + be_2, e_2) = 0$ и, аналогично, $b = 0$. Следовательно,

$$\mathscr{V} = [e_1, e_2] \oplus \mathscr{P}.$$

В частности, мы видим, что $\dim \mathscr{P} = n - 2$.

Следовательно, по предположению индукции, примененному к ограничению $A|_{\mathscr{P}}$ функционала A на $\mathscr{P}$, в подпространстве $\mathscr{P}$ существует базис $e_3, \ldots, e_n$, в котором матрица функционала $A|_{\mathscr{P}}$ имеет вид (4). Поэтому в базисе $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ матрица функционала A также имеет вид (4). □

Следствие 1. *Ранг r произвольного кососимметрического функционала A является четным числом.* □

На языке бивекторов предложение 1 означает, что для любого кососимметрического билинейного функционала A ранга $r = 2m$ в пространстве $\mathscr{V}$ существует такой базис $e_1, \ldots, e_n$, что

$$A = e^1 \wedge e^2 + e^3 \wedge e^4 + \ldots + e^{2m-1} \wedge e^{2m};$$

на языке билинейных форм — что любая кососимметрическая билинейная форма линейным невырожденным преобразованием неизвестных может быть приведена к нормальному виду

$$(x^1y^2 - x^2y^1) + (x^3y^4 - x^4y^3) + \ldots + (x^{2m-1}y^{2m} - x^{2m}y^{2m-1});$$

на языке матриц, — см. формулу (5) лекции 5 — что любая кососимметрическая матрица может быть представлена в виде

$$A = C^{\mathrm{T}} DC, \tag{5}$$

где D — матрица вида (4) (а C — некоторая невырожденная матрица).

Из формулы (5) непосредственно следует, что *определитель* $\det A$ *любой кососимметрической матрицы A является точным квадратом.* Действительно, перейдя в (5) к определителям, мы получим, что

$$\det A = (\det C)^2 \det D,$$

и $\det D$ равен либо нулю, либо (при $r = n$) единице. □

Оказывается, что имеет место следующее значительно более сильное утверждение:

Предложение 2. Для любого $m \geqslant 1$ существует такой многочлен $\operatorname{Pf} A$ *с целыми коэффициентами от элементов кососимметрической матрицы A порядка $2m$, что*

$$\det A = (\operatorname{Pf} A)^2, \tag{6}$$

причем $\operatorname{Pf} A = 1$, *если матрица A имеет вид*

$$\begin{Vmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

Этими условиями многочлен $\operatorname{Pf} A$ *определен единственным образом.*

Доказательство. Разъясним прежде всего равенство (6).

Пусть $\mathbf{P}$ — кольцо многочленов с целыми коэффициентами от $m(2m-1)$ независимых переменных a_{ij}, где $1 \leqslant i < j \leqslant 2m$; и пусть $a_{ij} = -a_{ji}$ при $i > j$ и $a_{ii} = 0$. Пусть, далее, A — кососимметрическая матрица порядка $2m$ с элементами a_{ij}. Тогда $\det A$ является элементом кольца $\mathbf{P}$ и предложение 2 утверждает, что в $\mathbf{P}$ существует единственный многочлен $\operatorname{Pf} A$, для которого имеет место формула (6) и который при a_{ij}, отвечающих матрице (7), принимает значение 1.

Чтобы доказать существование этого многочлена, мы введем в рассмотрение поле отношений кольца $\mathbf{P}$, т. е. поле рациональных функций от переменных a_{ij}, $1 \leqslant i < j \leqslant 2m$, и будем рассматривать матрицу A как матрицу над этим полем. (Обратим внимание, что таким образом, мы — впервые! — существенно пользуемся полем $\mathbb{K}$, отличным от поля $\mathbb{R}$.) Согласно сделанному выше замечанию $\det A = (\det C)^2$, где C — матрица из представления (5) матрицы A. Поскольку элементы матрицы C принадлежат тому же полю, что и элементы матрицы A, эти элементы, — а, значит, и определитель матрицы C — являются рациональными функциями от a_{ij}. Это означает, что

$$\det C = \frac{h(A)}{g(A)},$$

где $h(A)$ и $g(A)$ — некоторые многочлены от a_{ij} с це-

лыми коэффициентами, не имеющие общих множителей (отличных от единицы). Но тогда в кольце многочленов $\mathbf{P}$ будет иметь место равенство

$$g(A)^2 \det A = h(A)^2,$$

из которого следует (ввиду известной из алгебры теоремы о единственности разложения многочленов с целыми коэффициентами на неприводимые множители), что каждый неприводимый множитель многочлена $g(A)$ должен делить многочлен $h(A)$. Следовательно, многочлен $g(A)$ тождественно равен единице.

Этим доказано, что $\det C$ является многочленом $h(A)$ от a_{ij} с целыми коэффициентами.

Поскольку $h(A)^2 = \det A$, то на матрице (7) многочлен $h(A)$ принимает либо значение $+1$, либо значение -1. В первом случае мы положим $\operatorname{Pf} A = h(A)$, а во втором $\operatorname{Pf} A = -h(A)$.

Тем самым существование многочлена $\operatorname{Pf} A$ полностью доказано.

Для доказательства его единственности достаточно заметить, что — в силу той же теоремы алгебры о единственности разложения многочленов на неприводимые множители — соотношение (6) определяет многочлен $\operatorname{Pf} A$ с точностью до знака однозначно и что этот знак фиксируется условием, что на матрице (7) этот многочлен равен единице. □

Многочлен $\operatorname{Pf} A$ называется *пфаффианом* кососимметрической матрицы A.

Непосредственное вычисление определителей показывает, что

$$\operatorname{Pf} A = a_{12} \qquad \text{при} \quad n = 2,$$

$$\operatorname{Pf} A = a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{25} \qquad \text{при} \quad n = 4.$$

Подчеркнем, что поскольку коэффициенты многочлена $\operatorname{Pf} A$ являются целыми числами, он имеет смысл для кососимметрических матриц A над *произвольным* полем $\mathbf{K}$, и для таких матриц сохраняется соотношение (6).

Легко видеть, что *для любой матрицы C и любой кососимметрической матрицы A имеет место равенство*

$$\operatorname{Pf}(C^{\mathrm{T}}AC) = \det C \operatorname{Pf} A. \tag{8}$$

Действительно, пусть C — матрица, элементы c_{ij} которой являются независимыми переменными, и пусть, как и выше, A — кососимметрическая матрица, элементы a_{ij},

$i < j$, которой также представляют собой независимые переменные (отличные от переменных c_{ij}). Тогда в кольце целочисленных многочленов от переменных a_{ij}, $i < j$, и c_{ij} будет иметь место равенство

$$\det(C^{\top}AC) = (\det C)^2 \det A,$$

а, значит, и равенство

$$\operatorname{Pf}(C^{\top}AC)^2 = (\det C \operatorname{Pf} A)^2$$

(поскольку

$$(C^{\top}AC)^{\top} = C^{\top}A^{\top}C^{\top\top} = -C^{\top}AC,$$

матрица $C^{\top}AC$ кососимметрична). Поэтому

$$\operatorname{Pf}(C^{\top}AC) = \varepsilon \det C \operatorname{Pf} A, \tag{9}$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Но при значениях переменных a_{ij} и c_{ij}, обращающих матрицы A и C соответственно в матрицы (7) и E, левая часть равенства (9) равна 1, а правая ε. Поэтому $\varepsilon = 1$.

Тем самым формула (8) доказана для матриц A и C с алгебраически независимыми элементами, а потому и для любых матриц A и C. □

Определение 1. Линейное пространство $\mathscr{V}$ с невырожденным кососимметрическим скалярным умножением G называется *симплектическим пространством* (а скалярное умножение в нем — *симплектическим умножением*).

Размерность n симплектического пространства необходимо четна:

$$n = 2m.$$

Если характеристика $\operatorname{char} \mathbb{K}$ поля $\mathbb{K}$ не равна двум, то в каждом симплектическом пространстве $\mathscr{V}$ *любой вектор* $\boldsymbol{x}$ *изотропен* (т. е. $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$).

Базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2m}$ симплектического пространства называется *симплектическим*, если

$$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = \begin{cases} 1, & \text{когда} \quad i \leqslant m \text{ и } j = m + i, \\ 0 & \text{для всех остальных} \quad i \text{ и } j > i, \end{cases}$$

т. е. если метрические коэффициенты $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ этого базиса составляют матрицу вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{10}$$

где E — единичная матрица порядка m.

Согласно предложению 1 в любом симплектическом пространстве $\mathscr{V}$ существует базис, для которого числа $g_{ij}=(e_i, e_j)$ составляют матрицу вида (7), т. е. такой, что

$$(11)\qquad (e_i, e_j)=\begin{cases} 1, & \text{если } i \text{ нечетно и } j=i+1, \\ 0 & \text{для всех остальных } i \text{ и } j>i. \end{cases}$$

Положив

$$e'_i=\begin{cases} e_{2i-1}, & \text{если } 1\leqslant i\leqslant m, \\ e_{2(i-m)}, & \text{если } m+1\leqslant i\leqslant 2m, \end{cases} \quad i=1, \ldots, 2m=n,$$

мы, очевидно, получим симплектический базис $e'_1, \ldots, e'_n$.

Тем самым доказано, что *в любом симплектическом пространстве существует симплектический базис.*

Замечание 2. Некоторые авторы не перенумеровывают базисы, доставляемые предложением 1, и называют симплектическими базисы, удовлетворяющие соотношению (11).

В симплектическом базисе симплектическое произведение векторов $x=x^ie_i$ и $y=y^je_j$ выражается формулой

$$(12)\qquad (x, y)=(x^1y^{m+1}-x^{m+1}y^1)+\ldots+(x^my^{2m}-x^{2m}y^m).$$

В соответствии с общим определением из лекции 5 линейное биективное отображение $\varphi\colon \mathscr{V}\to\mathscr{W}$ симплектических пространств называется *изометрией* (или *симплектическим изоморфизмом*), если оно сохраняет симплектические произведения, т. е. если

$$(\varphi x, \varphi y)=(x, y)$$

для любых векторов $x, y\in\mathscr{V}$.

Из формулы (12) непосредственно вытекает, что для любых симплектических пространств $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ одной и той же размерности отображение $\mathscr{V}\to\mathscr{W}$ по равенству координат в любых двух симплектических базисах этих пространств является изоморфизмом. Следовательно, подобно евклидовым пространствам, *любые два симплектических пространства одной и той же размерности изоморфны.*

Мы видим, таким образом, что симплектические базисы играют в симплектических пространствах роль ортонормированных базисов евклидовых пространств.

Матрицы, являющиеся матрицами перехода от одного симплектического базиса к другому, называются *симп-*

лектическими матрицами. Так же, как их евклидовы аналоги — ортогональные матрицы (см. лекцию I. 13), симплектические матрицы данного порядка n (необходимо четного) образуют группу, которая называется *симплектической группой* порядка n над полем $\mathbb{K}$ и обозначается символом $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{K})$, где $2m = n$.

Если C — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ и если G — матрица $\|g_{ij}\|$, $g_{ij} = (e_i, e_j)$, а G' — матрица $\|g_{i'j'}\|$, $g_{i'j'} = (e_{i'}, e_{j'})$, то согласно общей формуле, связывающей матрицы билинейного функционала в различных базисах (см. лекцию 5),

$$G' = C^{\mathrm{T}} G C.$$

Применив эту формулу к случаю, когда базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ симплектичны и, значит, матрицы G и G' являются матрицей (10), мы немедленно получим, что *матрица C порядка $n = 2m$ тогда и только тогда является симплектической матрицей, когда имеет место равенство*

$$C^{\mathrm{T}} J C = J, \tag{13}$$

где J — матрица (10).

Положив

$$C = \begin{Vmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{Vmatrix},$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 — матрицы порядка m, мы без труда найдем — пользуясь возможностью перемножать матрицы поклеточно, — что условие (13) равносильно соотношениям

$$\begin{aligned} &C_1^{\mathrm{T}} C_3 = C_3^{\mathrm{T}} C_1, \quad C_2^{\mathrm{T}} C_4 = C_4^{\mathrm{T}} C_2, \\ &C_1^{\mathrm{T}} C_4 - C_3^{\mathrm{T}} C_2 = E. \end{aligned} \tag{14}$$

(Заметим, что первые два из этих соотношений означают, что матрицы $C_1^{\mathrm{T}} C_3$ и $C_2^{\mathrm{T}} C_4$ симметричны.)

Перейдя в формуле (13) к определителям, мы — так же, как для ортогональных матриц, — получим, что $(\det C)^2 = 1$, т. е. что $\det C = \pm 1$. Однако — в отличие от ортогональных матриц — равенство $\det C = -1$ на самом деле невозможно, т. е. *каждая симплектическая матрица C унимодулярна*:

$$\det C = 1.$$

Действительно, в силу формул (8) и (13)

$$\operatorname{Pf} J = \operatorname{Pf}(C^{\mathsf{T}} J C) = \det C \operatorname{Pf} J,$$

и, значит, $\det C = 1$.

Замечание 3. В силу нашей нормировки пфаффиана

$$\operatorname{Pf} J = (-1)^{m+1}.$$

Следует иметь в виду, что многие авторы нормируют пфаффиан требованием, чтобы $\operatorname{Pf} J = 1$.

Геометрия симплектических пространств (над произвольным полем $\mathbb{K}$) может быть теперь развита сколь угодно глубоко. За недостатком времени и места мы ограничимся лишь несколькими простыми утверждениями об *изотропных подпространствах* (т. е. подпространствах $\mathcal{P}$, обладающих тем свойством, что $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\perp}$), в которых симплектическая геометрия наиболее далеко уходит от привычной евклидовой геометрии. При этом мы будем предполагать, что $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$. В силу этого предположения любой вектор пространства $\mathcal{V}$ будет изотропен (и, значит, будет порождать одномерное изотропное подпространство).

Предложение 3. *Размерность $p = \dim \mathcal{P}$ произвольного изотропного подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ не превосходит половины m размерности $n = 2m$ пространства $\mathcal{V}$. Любое изотропное подпространство $\mathcal{P}$ содержится в изотропном подпространстве максимальной возможной размерности m.*

Доказательство. Так как $\mathcal{P}$ изотропно, то $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{\perp}$. Следовательно,

$$\dim \mathcal{P} \leqslant \dim \mathcal{P}^{\perp} = n - \dim \mathcal{P},$$

и, значит, $2 \dim \mathcal{P} \leqslant n$. Это доказывает первое утверждение.

Для доказательства второго утверждения мы рассмотрим ограничение метрического тензора пространства $\mathcal{V}$ на подпространстве $\mathcal{P}^{\perp}$. Так как $(\mathcal{P}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{P}$, то — см. замечание 2 лекции 5 — это ограничение является кососимметрическим линейным функционалом ранга

$$\dim \mathcal{P}^{\perp} - \dim \mathcal{P} = n - 2p = 2(m - p).$$

Поэтому, согласно предложению 1, в подпространстве $\mathcal{P}^{\perp}$ существует базис $e_1, \ldots, e_{n-p}$, в котором матрица

этого функционала имеет вид (4) с $m-p$ клетками

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При этом p векторов $e_{2(m-p)+1}, \ldots, e_{n-p}$ будут составлять базис подпространства $(\mathcal{P}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{P}$. Добавив к этим векторам векторы $e_1, e_3, \ldots, e_{2(m-p)+1}$, мы получим m векторов, порождающих изотропное подпространство размерности m, содержащее подпространство $\mathcal{P}$. □

На основании предложения 3 мы будем называть изотропные подпространства $\mathcal{P}$ размерности m *максимальными*. Они характеризуются тем, что $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{P}$.

Для любого симплектического базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$ и любого подмножества K множества $\{1, \ldots, m\}$ векторы e_i, $i \in K$, и e_{m+j}, $j \notin K$, порождают m-мерное изотропное подпространство $\mathcal{P}_K$ пространства $\mathcal{V}$. Оставляя неизменным базис $e_1, \ldots, e_n$ и варьируя множество K, мы получим таким образом 2^m изотропных подпространств вида $\mathcal{P}_K$.

Предложение 4. *Для любого максимального изотропного подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ существует такое максимальное изотропное подпространство $\mathcal{P}^{\#}$, что*

$$\mathcal{V} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^{\#}.$$

Подпространство $\mathcal{P}^{\#}$ можно выбрать среди подпространств вида $\mathcal{P}_K$, отвечающих произвольному наперед заданному симплектическому базису $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_{\{1, \ldots, m\}}$ — подпространство, порожденное первыми m векторами $e_1, \ldots, e_m$ данного симплектического базиса, и пусть K — такое подмножество множества $\{1, \ldots, m\}$, что векторы e_i, $i \in K$, порождают в $\mathcal{P}_0$ подпространство $\mathcal{Q}$, дополнительное к подпространству $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}$ (см. замечание 1 лекции 3). Так как $\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P} \subset \mathcal{P} = \mathcal{P}^{\perp}$ и $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}_K = \mathcal{P}_K^{\perp}$, то

$$\mathcal{P}_0 = (\mathcal{P}_0 \cap \mathcal{P}) + \mathcal{Q} \subset (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_K)^{\perp},$$

и, значит, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_K \subset \mathcal{P}_0^{\perp} = \mathcal{P}_0$. Следовательно,

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_K = (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_0) \cap (\mathcal{P}_K \cap \mathcal{P}_0) = (\mathcal{P} \cap \mathcal{P}_0) \cap \mathcal{Q} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\dim \mathcal{P} + \dim \mathcal{P}_K = n$, этим доказано, что $\mathcal{V} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}_K$. □

Так как пространство $\mathcal{V}$ является пространством с невырожденным скалярным умножением, то оно естественно

изоморфно сопряженному пространству $\mathcal{V}'$, и легко видеть, что *композиция вложения* $\mathcal{P} \to \mathcal{V}$, *изоморфизма* $\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} \mathcal{V}'$ *и отображения ограничения* $\mathcal{V}' \to \mathcal{P}'$ *представляет собой изоморфизм*

$$\mathcal{P}^{\#} \xrightarrow{\sim} \mathcal{P}'. \tag{15}$$

Действительно, ядром гомоморфизма $\mathcal{V} \to \mathcal{P}'$ является, очевидно, подпространство $\mathcal{P}^{\perp}$, а так как $\mathcal{P}^{\perp} = \mathcal{P}$ и $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}^{\#} = 0$, то на подпространстве $\mathcal{P}^{\#}$ этот гомоморфизм инъективен и потому — ввиду равенства размерностей пространств $\mathcal{P}^{\#}$ и $\mathcal{P}'$ — является изоморфизмом. □

Отсюда следует, что *для любой пары* $(\mathcal{P}, \mathcal{P}^{\#})$ *взаимно дополнительных изотропных подпространств существует такой симплектический базис* $e_1, \ldots, e_n$ *пространства* $\mathcal{V}$, *что*

$$\mathcal{P} = [e_1, \ldots, e_m] \quad \text{и} \quad \mathcal{P}^{\#} = [e_{m+1}, \ldots, e_n]. \tag{16}$$

Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_m$ — произвольный базис подпространства $\mathcal{P}$, а $e_{m+1}, \ldots, e_n$ — базис подпространства $\mathcal{P}^{\#}$, переходящий при изоморфизме (15) в базис $e^1, \ldots, e^m$ пространства $\mathcal{P}'$, сопряженный базису $e_1, \ldots, e_m$. Тогда векторы $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$ составляют симплектический базис пространства $\mathcal{V}$, обладающий свойством (16). □

Это означает, что *любые две пары* $(\mathcal{P}, \mathcal{P}^{\#})$ *и* $(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{\#})$ *взаимно дополнительных изотропных подпространств одинаково расположены в пространстве* $\mathcal{V}$, т. е. существует изометрия $\varphi: \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, переводящая подпространство $\mathcal{P}$ в подпространство $\mathcal{Q}$, а подпространство $\mathcal{P}^{\#}$ в подпространство $\mathcal{Q}^{\#}$. (Изометрией φ будет отображение по равенству координат в таких симплектических базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$, что $\mathcal{P} = [e_1, \ldots, e_m]$, $\mathcal{Q} = [f_1, \ldots, f_m]$ и $\mathcal{P}^{\#} = [e_{m+1}, \ldots, e_n]$, $\mathcal{Q}^{\#} = [f_{m+1}, \ldots, f_n]$.)

Подчеркнем, что все эти результаты справедливы в предположении, что $\operatorname{char} \mathbb{K} \neq 2$.