Лекция 12

Теорема Якоби. — Квадратичные формы над полями комплексных и вещественных чисел. — Закон инерции. — Положительно определенные квадратичные функционалы и формы.

Напомним, что квадратичная матрица называется *треугольной* (точнее, *верхнетреугольной*), если все ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю. Определитель такой матрицы равен, очевидно, произведению ее диагональных элементов. Поэтому треугольная матрица тогда и только тогда невырождена, когда все ее диагональные элементы отличны от нуля. Особо важное значение имеют треугольные матрицы, все диагональные элементы которых равны единице. Такие матрицы мы будем называть *унитреугольными матрицами*.

Непосредственное вычисление показывает, что произведение двух (уни)треугольных матриц и матрица, обратная (уни)треугольной матрице, также являются (уни)треугольными матрицами.

Поскольку матрица основного преобразования базисов в алгоритме Лагранжа является унитреугольной матрицей

$$\begin{Vmatrix} 1 & -\frac{q_{12}}{q_{11}} & \dots & -\frac{q_{1n}}{q_{11}} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \end{Vmatrix},$$

мы видим, следовательно, что *в регулярном случае переход к Q-ортогональному базису осуществляется унитреугольной матрицей.*

Пусть A — произвольная квадратная матрица порядка n и пусть $1 \leqslant k \leqslant n$. Вычеркнув из матрицы A последние $n-k$ строк и $n-k$ столбцов, мы получим квадратную матрицу порядка k.

Определение 1. Эта матрица называется *главной подматрицей порядка k* матрицы A, а ее определитель — *главным минором порядка k* матрицы A.

Пусть Q и Q' — матрицы квадратичного функционала Q в двух базисах $e_1, \dots, e_n$ и $e'_1, \dots, e'_n$, связанных

унитреугольной матрицей перехода C. Тогда имеют место следующие очевидные утверждения:

а) Главная подматрица C_k порядка k матрицы C является матрицей перехода, связывающей базисы $e_1, \ldots, e_k$ и $e'_1, \ldots, e'_k$ подпространства $\mathscr{P}_k = [e_1, \ldots, e_k] = [e'_1, \ldots, e'_k]$.

б) Ограничение $Q|_{\mathscr{P}_k}$ функционала Q на подпространстве $\mathscr{P}_k$ является квадратичным функционалом, матрицей которого в базисе $e_1, \ldots, e_k$ является главная подматрица Q_k порядка k матрицы Q, а в базисе $e'_1, \ldots, e'_k$ — главная подматрица Q'_k порядка k матрицы Q'.

Отсюда следует, что

$$Q'_k = C_k^{\mathrm{T}} Q_k C_k$$

для любого $k = 1, \ldots, n$. Переходя к определителям и учитывая, что $\det C_k^{\mathrm{T}} = \det C_k = 1$, мы получаем, следовательно, что

$$\det Q'_k = \det Q_k \tag{1}$$

для любого $k = 1, \ldots, n$.

В частности, если

$$Q' = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & \lambda_n \end{Vmatrix},$$

то

$$\det Q_k = \lambda_1 \cdots \lambda_k$$

для любого $k = 1, \ldots, n$.

Этим доказано (мы переходим на язык квадратичных форм), что *если для квадратичной формы $Q(x^1, \ldots, x^n)$ имеет место регулярный случай, то коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ее нормального вида удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda_1 \cdots \lambda_k = D_k, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где D_k — главные миноры ее матрицы.

Заметим теперь, что, производя основное преобразование алгоритма Лагранжа, мы каждый раз получаем отличный от нуля коэффициент λ_i (например, при самом первом преобразовании получается коэффициент

$\lambda_1 = q_{11} \neq 0$). В регулярном случае процесс останавливается, когда после некоторого (скажем, r-го) шага мы получаем тождественный нуль (так что все остальные коэффициенты $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$ оказываются равными нулю). Отсюда и из соотношений (2), во-первых, вытекает, что в регулярном случае

$$D_1 \neq 0, \ \ldots, \ D_r \neq 0, \tag{3}$$

где r — ранг формы (функционала), и, во вторых, — что

$$\lambda_1 = D_1, \quad \lambda_2 = \frac{D_2}{D_1}, \ \ldots, \ \lambda_r = \frac{D_r}{D_{r-1}}.$$

Обратно, предположим, что для матрицы квадратичной формы имеют место неравенства (3), где r — ее ранг. Тогда, поскольку $q_{11} = D_1 \neq 0$, к форме применимо основное преобразование алгоритма Лагранжа. Согласно формулам (1) главные миноры полученной после преобразования матрицы Q' будут совпадать с главными минорами матрицы Q, и потому эта матрица по-прежнему будет обладать свойствами (3). Но главный минор D_2 матрицы Q' равен, очевидно, произведению $q'_{11}q'_{22}$ (где $q'_{11} = q_{11} = \lambda_1$), и значит, $q'_{22} \neq 0$. Следовательно, к ограничению функционала Q на подпространстве $[e'_2, \ldots, e'_n]$ снова применимо основное преобразование Лагранжа и т. д.

После r шагов мы получим матрицу вида

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \lambda_r \\ & & & & \boxed{G} \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

где $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_r \neq 0$ и G — некоторая матрица. Но так как матрицы квадратичного функционала во всех базисах имеют один и тот же ранг r, то матрица (4) также имеет ранг r, что, очевидно, возможно только тогда, когда все элементы матрицы G равны нулю.

Таким образом, матрица (4) является матрицей квадратичной формы в нормальном виде, а поскольку мы получили ее лишь основными преобразованиями алгоритма Лагранжа, то, следовательно, для исходной формы имеет место регулярный случай.

Тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1 (*теорема Якоби*). *Для квадратичной формы ранга r тогда и только тогда имеет место регулярный случай, когда первые r главных миноров ее матрицы отличны от нуля:*

$$D_1 \neq 0, \ \ldots, \ D_r \neq 0.$$

Алгоритмом Лагранжа такая форма приводится к виду

$$D_1 (x^1)^2 + \frac{D_2}{D_1} (x^2)^2 + \ldots + \frac{D_r}{D_{r-1}} (x^r)^2. \quad \square$$

Эта теорема часто бывает очень полезна.

Дальнейшее упрощение нормального вида

$$\lambda_1 (x^1)^2 + \ldots + \lambda_r (x^r)^2 \tag{5}$$

квадратичной формы зависит от арифметических свойств поля $\mathbb{K}$. Самый простой случай возникает при $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. В этом случае преобразованием вида

$$\begin{gathered} y^1 = \sqrt{\lambda_1} x^1, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^r = \sqrt{\lambda_r} x^r, \\ y^{r+1} = x^{r+1}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y^n = x^n \end{gathered}$$

мы можем привести форму (5) к виду (мы опускаем штрихи в обозначении координат)

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^r)^2. \tag{6}$$

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Любую квадратичную форму над полем $\mathbb{C}$ (т. е. с коэффициентами из $\mathbb{C}$) линейным невырожденным преобразованием переменных (тоже с коэффициентами из $\mathbb{C}$) можно привести к виду* (6), *где r — ранг формы.* $\square$

Иначе говоря, любая квадратичная форма $Q(x^1, \ldots, x^n)$ ранга r над полем $\mathbb{C}$ имеет вид

$$\varphi_1 (x)^2 + \ldots + \varphi_r (x)^2,$$

где $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_r(x)$ — линейно независимые линейные формы от $x^1, \ldots, x^n$.

Следствие (теорема классификации квадратичных форм над полем $\mathbb{C}$). *Две квадратичные формы над полем $\mathbb{C}$ тогда и только тогда эквивалентны, когда их ранги одинаковы.* □

Над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел мы можем сделать преобразование

$$\begin{aligned} y^1 &= \sqrt{|\lambda_1|}\, x^1, \\ &\cdots\cdots \\ y^r &= \sqrt{|\lambda_r|}\, x^r, \\ y^{r+1} &= x^{r+1}, \\ &\cdots\cdots \\ y^n &= x^n, \end{aligned}$$

приводящее форму (5) (после, быть может, дополнительной перестановки координат) к виду (мы снова опускаем штрихи у координат)

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^r)^2, \tag{7}$$

где r — ранг формы, а p — некоторое число (удовлетворяющее неравенствам $0 \leqslant p \leqslant r$).

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. *Любую квадратичную форму над полем $\mathbb{R}$ линейным невырожденным преобразованием переменных можно привести к виду* (7), *где r — ранг формы, а $0 \leqslant p \leqslant r$.* □

В связи с предложением 2 немедленно возникает вопрос, нельзя ли данную квадратичную форму привести к двум формам вида (7) с различными p, т. е., другими словами, не могут ли две формы вида (7) с различными p быть эквивалентны (над полем $\mathbb{R}$). Оказывается, что ответ на этот вопрос отрицателен:

Предложение 3 (закон инерции квадратичных форм). *Если две формы*

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^r)^2 \tag{8}$$

и

$$(y^1)^2 + \ldots + (y^q)^2 - (y^{q+1})^2 - \ldots - (y^r)^2 \tag{9}$$

эквивалентны (*над полем* $\mathbb{R}$), *то* $p = q$.

Доказательство. Эквивалентность форм (8) и (9) означает, что они являются выражениями в двух различных базисах $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ одного и того же квадратичного функционала Q, заданного в n-мерном линейном пространстве $\mathscr{V}$. Пусть $\mathscr{P}$ — подпространство пространства $\mathscr{V}$, порожденное векторами $e_1, \ldots, e_p$, а $\mathscr{Q}$ — подпространство пространства $\mathscr{V}$, порожденное векторами $f_{q+1}, \ldots, f_n$:

$$\mathscr{P} = [e_1, \ldots, e_p], \quad \mathscr{Q} = [f_{q+1}, \ldots, f_n].$$

Поскольку в базисе $e_1, \ldots, e_n$ функционал Q выражается формой (8), для любого отличного от нуля вектора $x \in \mathscr{P}$ имеет место соотношение

$$Q(x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 > 0.$$

Аналогично, для любого вектора $y \in \mathscr{Q}$ мы имеем

$$Q(y) = -(y^{q+1})^2 - \ldots - (y^r)^2 \leqslant 0.$$

Поэтому $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q} = 0$, т. е. подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ дизъюнктны, и, значит (следствие 2 теоремы 1 лекции 1), для их размерностей справедливо неравенство

$$\dim \mathscr{P} + \dim \mathscr{Q} \leqslant n,$$

т. е. неравенство

$$p + (n - q) \leqslant n,$$

равносильное неравенству

$$p \leqslant q.$$

Аналогично доказывается, что $q \leqslant p$. Следовательно, $p = q$. □

Предложение 3 обеспечивает корректность следующего определения:

Определение 2. Число p «положительных квадратов» в приведенной форме (7) называется *положительным индексом инерции* данной квадратичной формы (квадратичного функционала), а число $r - p$ «отрицательных квадратов» — ее (его) *отрицательным индексом инерции.*

Кроме того, из предложения 3 немедленно вытекает следующее следствие:

Следствие (теорема классификации квадратичных форм над полем $\mathbb{R}$). *Две квадратичные формы над полем* $\mathbb{R}$ *тогда и только тогда эквива-*

лентны, когда совпадают их ранги и индексы инерции. □

Особо важное значение в линейных пространствах над полем $\mathbb{R}$ имеют квадратичные функционалы Q, обладающие тем свойством, что $Q(x) > 0$ при $x \neq 0$. Их значение определяется тем, что соответствующие симметрические билинейные функционалы — это в точности всевозможные скалярные умножения на $\mathcal{V}$ в смысле определения 2 лекции I.12 (евклидовы структуры).

Определение 3. Квадратичный функционал Q на вещественном линейном пространстве $\mathcal{V}$ называется *положительно определенным*, если $Q(x) > 0$ для любого вектора $x \neq 0$.

Квадратичная форма $Q(x^1, \ldots, x^n)$ называется *положительно определенной*, если она является выражением положительно определенного функционала в некотором базисе, т. е., иными словами, если $Q(x^1, \ldots, x^n) > 0$ при $(x^1, \ldots, x^n) \neq (0, \ldots, 0)$.

Матрица Q называется *положительно определенной*, если она является матрицей положительно определенного квадратичного функционала (квадратичной формы), т. е., иными словами, является матрицей метрических коэффициентов некоторого базиса евклидова пространства (см. лекцию I.12).

Предложение 4. *Квадратичный функционал (квадратичная форма) тогда и только тогда положительно определен (определена), когда его (ее) ранг и положительный индекс инерции равны n:*

$$r = n, \qquad p = n.$$

Доказательство. Если $p = r = n$, то в некотором базисе функционал Q выражается формой

$$(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2,$$

и, значит, $Q(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x^1 = 0, \ldots, x^n = 0$, т. е. когда $x = 0$.

Обратно, если $p < n$ или $r < n$, то в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ функционал Q выражается формой вида

$$Q'(x^1, \ldots, x^{n-1}) + \varepsilon (x^n)^2,$$

где $Q'(x^1, \ldots, x^{n-1})$ — квадратичная форма от координат $x^1, \ldots, x^{n-1}$, а $\varepsilon \leqslant 0$. Тогда $Q(e_n) = \varepsilon \leqslant 0$, и, следовательно, функционал Q не положительно определен. □

Это предложение требует предварительного приведения формы к нормальному виду и потому на практике, как правило, бесполезно. Более интересно следующее предложение, дающее необходимые и достаточные условия положительной определенности квадратичной формы непосредственно по ее матрице:

Предложение 5 (критерий Сильвестра). *Матрица Q тогда и только тогда положительно определена, когда все ее главные миноры положительны:*

$$q_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} q_{11} & \ldots & q_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & \ldots & q_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Доказательство. Если все главные миноры матрицы Q положительны (и, следовательно, отличны от нуля), то по теореме 1 для квадратичной формы с матрицей Q имеет место регулярный случай и эта форма приводится к виду

$$D_1 (x^1)^2 + \frac{D_2}{D_1} (x^2)^2 + \ldots + \frac{D_n}{D_{n-1}} (x^n)^2,$$

где $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, ..., $D_n > 0$. Таким образом, $p = r = n$, и потому форма (а значит, и матрица) положительно определена.

Обратно, если форма с матрицей Q положительно определена, то она приводится к сумме n квадратов, т. е. к форме с единичной матрицей E. Поэтому матрица Q имеет вид

$$Q = C^{\mathrm{T}} C,$$

где C — некоторая невырожденная матрица. Следовательно,

$$\det Q = (\det C)^2 > 0.$$

Этим доказано, что *определитель положительно определенной матрицы положителен.*

С другой стороны, положив в квадратичной форме $Q(x^1, \ldots, x^n)$ от n переменных $n-k$ последних переменных $x^{k+1}, \ldots, x^n$ равными нулю, мы получим квадратичную форму

$$Q_k(x^1, \ldots, x^k) = Q(x^1, \ldots, x^k, 0, \ldots, 0)$$

от k переменных $x^1, \ldots, x^k$, для которой будут, очевидно, справедливы следующие утверждения:

а) Если форма $Q(x^1, \ldots, x^n)$ положительно определена, то форма $Q_k(x^1, \ldots, x^k)$ также положительно определена.

б) Матрицей формы $Q_k(x^1, \ldots, x^k)$ служит главная подматрица Q_k порядка k матрицы формы $Q(x^1, \ldots, x^n)$.

Следовательно, в силу сделанного выше замечания все главные миноры D_k, $k = 1, \ldots, n$, положительно определенной матрицы положительны. □

Предложение 5 отвечает, в частности, на поставленный в лекции I. 6 вопрос о необходимых и достаточных условиях, которым должна удовлетворять квадратная матрица для того, чтобы она была матрицей коэффициентов некоторого базиса евклидова пространства.