Лекция 12а

Псевдоевклидовы пространства. — Псевдоортонормированные базисы и псевдоортогональные матрицы. — Собственно псевдоевклидова геометрия плоскости. — Углы на псевдоевклидовой плоскости. — Парадокс близнецов.

Определение 1. Линейное пространство $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{R}$ с симметрическим скалярным умножением называется *псевдоевклидовым*. Аффинное пространство $\mathscr{A}$ над полем $\mathbb{R}$ называется *псевдоевклидовым*, если структура псевдоевклидова пространства введена в его ассоциированный линеал $\mathscr{V}$.

Псевдоевклидово пространство $\mathscr{V}$ (или $\mathscr{A}$) с невырожденным скалярным умножением называется *невырожденным*.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать — если только явно не оговорено противное, — что все рассматриваемые псевдоевклидовы пространства невырождены.

Индекс инерции p скалярного умножения в $\mathscr{V}$ называется *индексом* (невырожденного) псевдоевклидова пространства $\mathscr{V}$ (или $\mathscr{A}$), а пара (p, q), где $q = n - p$, $n = \dim \mathscr{V}$, — его *типом* (или *сигнатурой*).

Евклидово пространство (в смысле определения 3 лекции I.12) — это невырожденные псевдоевклидовы пространства индекса n.

Свойства псевдоевклидовых пространств типов (p, q) и (q, p) получаются друг из друга тривиальными переформулировками. Поэтому обычно предполагают, что $p \leqslant q$, т. е. что $2p \leqslant n$.

Псевдоевклидово пространство индекса 0 (т. е. с отрицательно определенным скалярным умножением) называется *антиевклидовым*. Его геометрия переходит в евклидову после умножения всех скалярных произведений на -1.

Замечание 1. Некоторые авторы псевдоевклидовы пространства называют евклидовыми, употребляя термин «псевдоевклидовы» лишь для пространств с $p \geqslant 1$, $q \geqslant 1$ и $p + q = n$ и называя евклидовы в нашем смысле пространства собственно евклидовыми. Вырожденные псевдоевклидовы пространства (для которых $p + q < n$) они называют полуевклидовыми.

Пространство-время специальной теории относительности (обычно называемое *пространством Минковского*) является четырехмерным псевдоевклидовым пространством типа (1, 3). Его точки называются *событиями*. Начало отсчета интерпретируется при этом как событие, происходящее «здесь и сейчас».

Для любого вещественного числа a мы положим

$$\sqrt{a}=\begin{cases}\sqrt{a}, & \text{если } a\geqslant 0,\\ i\sqrt{-a}, & \text{если } a\leqslant 0,\end{cases}$$

где слева имеется в виду так называемый «арифметический» корень. Тогда для любого вектора x псевдоевклидова пространства $\mathscr{V}$ будет определено число $|x|=\sqrt{(x, x)}$, называемое его *длиной*. Для любых точек A, B точечного псевдоевклидова пространства $\mathscr{A}$ длина вектора $\overrightarrow{AB}$ называется *длиной отрезка* $\overline{AB}$ и обозначается символом $|AB|$.

При $(x, x)<0$ вместо длины $|x|$ (являющейся мнимым числом) иногда удобно рассматривать положительное вещественное число $|x|_{\text{вещ}}=\sqrt{|(x, x)|}$.

В пространстве Минковского число $|AB|$ называется *пространственно-временным интервалом* между событиями A и B. Вещественный интервал называется *времениподобным*, мнимый — *пространственноподобным*, а равный нулю — *светоподобным*. Те же названия применяются к вектору $\overrightarrow{AB}$ и прямой AB. Таким образом, вектор времениподобен, если его длина вещественна, пространственноподобен, если его длина мнима, и светоподобен, если его длина равна нулю (вектор изотропен). Эту терминологию мы будем использовать и в псевдоевклидовом пространстве любого типа.

Векторы a и b псевдоевклидова пространства мы будем называть векторами *одного характера*, если они оба либо времениподобны, либо пространственноподобны, либо изотропны.

Множество всех изотропных векторов псевдоевклидова линейного пространства называется *изотропным конусом*. В точечном пространстве изотропным конусом с вершиной O называется множество всех изотропных прямых (т. е. прямых с изотропными направляющими векторами), проходящих через точку O.

В пространстве Минковского изотропный конус называется *световым*.

Определение 2. Базис $e_1, \ldots, e_n$ невырожденного псевдоевклидова пространства $\mathscr{V}$ типа (p, q) называется *псевдоортонормированным*, если

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, \text{ когда } i \neq j, \\ 1, \text{ когда } i = j \text{ и } i = 1, \ldots, p, \\ -1, \text{ когда } i = j \text{ и } i = p+1, \ldots, n. \end{cases}$$

В псевдоортонормированном базисе скалярное произведение (x, y) векторов $x = x^i e_i$ и $y = y^j e_j$ выражается формулой

$$(x, y) = x^1 y^1 + \ldots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \ldots - x^n y^n.$$

В частности,

$$(x, x) = (x^1)^2 + \ldots + (x^p)^2 - (x^{p+1})^2 - \ldots - (x^n)^2.$$

Предложение 2 лекции 12 означает, что в *любом псевдоевклидовом пространстве существуют псевдоортогональные базисы.*

Поскольку отображение по равенству координат в двух псвдоортогональных базисах является, очевидно, изометрией, отсюда следует, что *любые два псевдоевклидова пространства одного и того же типа* (p, q) *изометричны* (а разных типов — в силу закона инерции — нет).

Матрица перехода от одного псевдоортонормированного базиса к другому называется *псевдоортогональной матрицей типа* (p, q). Все такие матрицы образуют группу, называемую *псевдоортогональной группой типа* (p, q) и обозначаемую символом $O(p, q)$.

Ясно, что группы $O(p, q)$ и $O(q, p)$ изоморфны. Группа $O(0, n)$ является не чем иным, как известной нам из первого семестра ортогональной группой $O(n)$.

Группа $O(1, 3)$ называется *общей группой Лоренца.*

Ковариантные координаты $x_1, \ldots, x_n$ вектора $x = x^i e_i$ в псевдоортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_n$ определяются формулой

$$x_i = \begin{cases} x^i, \text{ если } i = 1, \ldots, p, \\ -x^i, \text{ если } i = p+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Скалярное произведение выражается в ковариантных координатах той же формулой, что и в контравариантных:

$$(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \ldots - x_n y_n.$$

В частности,

$$(x, x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2$$

для каждого вектора $x \in \mathscr{V}^n$.

При $n = 1$ (на прямой) возможны три типа псевдоевклидовых геометрий: евклидова, антиевклидова (лишь формально отличающаяся от евклидовой) и *вырожденная* (в которой расстояние между любыми двумя точками равно нулю). На прямых псевдоевклидова пространства произвольной размерности евклидова геометрия реализуется на времениподобных, антиевклидова — на пространственноподобных, а вырожденная — на светоподобных прямых.

При $n = 2$ (на плоскости) кроме евклидовой и антиевклидовой геометрий имеется только одна невырожденная псевдоевклидова геометрия типа $(1, 1)$. Она называется *собственно псевдоевклидовой геометрией* плоскости.

Изучим эту геометрию подробнее.

Векторы некоторого фиксированного псевдоортонормированного базиса на собственно псевдоевклидовой плоскости — как и на евклидовой плоскости — будем обозначать символами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, а соответствующие координаты — символами x и y.

Таким образом,

$$(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{i}) = 1, \quad (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}) = 0, \quad (\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}) = -1$$

и

$$|\boldsymbol{r}|^2 = x^2 - y^2$$

для любого вектора $\boldsymbol{r}$ с координатами x, y (т. е. такого, что $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$).

Удобно эту геометрию сопоставить с евклидовой геометрией, в которой векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ ортонормированы. Мы будем называть эту геометрию *сопутствующей евклидовой геометрией*. Заметим, что она зависит от выбора базиса $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$.

Изотропные прямые собственно псевдоевклидовой геометрии имеют уравнения $y = \pm x$, т. е. являются — в сопутствующей евклидовой геометрии — биссектрисами координатных углов. Таким образом, на плоскости изотропный конус является парой прямых.

Прямые $y = kx$ при $|k| > 1$ пространственноподобны, а при $|k| < 1$ времениподобны.

Две прямые $y = k_1x$ и $y = k_2x$ тогда и только тогда ортогональны (т. е. ортогональны их направляющие векторы $(1, k_1)$ и $(1, k_2)$), когда $k_1k_2 = 1$, т. е. когда в сопутствующей евклидовой геометрии они симметричны относительно биссектрис координатных углов. Таким образом, вращение одной из этих прямых вызывает встречное вращение второй прямой, причем, когда первая прямая приходит в совпадение с изотропной прямой, вторая прямая совпадает с ней же.

В частности, мы видим, что *каждая изотропная прямая ортогональна сама себе.*

Для любого вещественного числа a множество всех точек A, для которых $|OA| = \sqrt{a}$, называется *окружностью радиуса* $\sqrt{a}$. В сопутствующей евклидовой геометрии окружность радиуса $\sqrt{a} \neq 0$ является равнобочной гиперболой

$$x^2 - y^2 = a,$$

действительной осью которой является ось ординат, если $a < 0$, и ось абсцисс, если $a > 0$.

Окружностью радиуса 0 является изотропный конус.

За эталон площади на псевдоевклидовой плоскости мы принимаем бивектор $\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{j}$. Поскольку определитель произвольной псевдоортогональной матрицы равен ± 1, этот эталон с точностью до знака не зависит от выбора базиса $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$.

Заметим, что этот эталон совпадает с эталоном площади в сопутствующей евклидовой геометрии. Таким образом, *площадь произвольной фигуры в псевдоевклидовой геометрии совпадает с ее площадью в сопутствующей евклидовой геометрии.*

Поэтому для ее вычисления мы можем применять все известные средства (например интегралы).

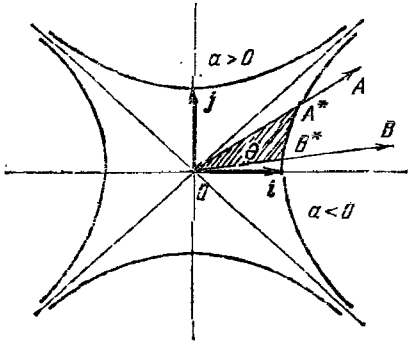
Отличные от нуля векторы $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ (или лучи OA и OB) на псевдоевклидовой плоскости называются *одноименными* (понятие, не имеющее аналогов в евклидовой плоскости!), если ни один из векторов

$$\mu\boldsymbol{a} + \nu\boldsymbol{b}, \quad \text{где} \quad \mu \geqslant 0, \ \nu \geqslant 0,$$

неизотропен (в частности, неизотропны сами векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$). Наглядно это означает, что лучи OA и OB пересекают одну и ту же ветвь окружностей радиуса ± 1 с центром в точке O.

Заметим, что одноименные векторы заведомо имеют один и тот же характер (оба либо времениподобны, либо пространственноподобны). При этом для любых неизотропных (и отличных от нуля) векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одного характера одноименны либо векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, либо векторы $\boldsymbol{a}$, $-\boldsymbol{b}$.

Угол $\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle AOB$ между векторами $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ (лучами OA и OB) на псевдоевклидовой плоскости определяется только для одноименных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. На евклидовой плоскости этот угол равен удвоенной площади кругового сектора, отсекаемого от круга радиуса 1 лучами OA и OB. На псевдоевклидовой плоскости угол AOB определяется как удвоенная площадь аналогичного гиперболического сектора OA^*B^*. [Для неодноименных векторов эта площадь бесконечна.]



Напомним, что функция

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

называется *гиперболическим косинусом*.

Предложение 1. *Для псевдоевклидова угла* $\theta = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *между одноименными векторами* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место формула*

$$\operatorname{ch}\theta = \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ времениподобны и, значит, $|\boldsymbol{a}| = a$ и $|\boldsymbol{b}| = b$, где $a > 0$ и $b > 0$.

Если в некотором псевдоортонормированном базисе вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты a_1, a_2, то вектор $\boldsymbol{a}'$, имеющий в том же базисе координаты a_2, a_1, будет, очевидно, пространственноподобным вектором длины $|\boldsymbol{a}'| = ia$, ортогональным вектору $\boldsymbol{a}$. Поэтому векторы

$$\boldsymbol{i} = \frac{\boldsymbol{a}}{a}, \qquad \boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{a}'}{a}$$

будут составлять псевдоортонормированный базис, обладающий тем свойством, что $\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{i}$, где $a > 0$.

Пусть

$$\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}.$$

Условие, что вектор $\boldsymbol{b}$ одноименен с вектором $\boldsymbol{a}$ (и, значит, — с вектором $\boldsymbol{i}$), означает, что $|b_2| < b_1$ (так что, в частности, $b_1 > 0$). При этом

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = ab_1, \quad |\boldsymbol{a}| = a, \quad |\boldsymbol{b}| = \sqrt{b_1^2 - b_2^2},$$

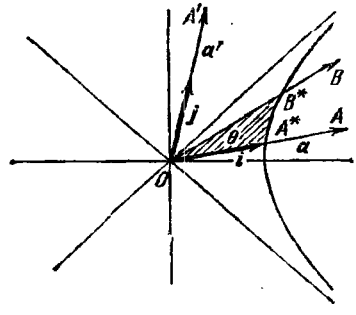
и, значит,

$$\frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|} = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 - b_2^2}} > 0.$$

Поскольку $\operatorname{ch}\theta > 0$ (на самом деле даже $\operatorname{ch}\theta \geqslant 1$), отсюда следует, что в рассматриваемом случае для доказательства формулы (1) достаточно доказать, что

$$\operatorname{ch}^2\theta = \frac{b_1^2}{b_1^2 - b_2^2}. \tag{2}$$

Обе стороны формулы (2) не меняются при изменении знака координаты b_2 (для левой части это следует из того, что при симметрии в оси абсцисс площадь гиперболического сектора A^*OB^* остается прежней). Поэтому без ограничения общности можем считать, что $b_2 \geqslant 0$.



По определению

$$\theta = 2 \text{ площ. } A^*OB^*,$$

где под площ. A^*OB^* мы можем понимать площадь гиперболического сектора A^*OB^* в сопутствующей евклидовой геометрии (в которой базис $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ ортонормирован). Поэтому

$$\theta = \int_0^\beta r^2\, d\varphi,$$

где β — евклидов угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (угол наклона луча OB), а r, φ — полярные координаты, согласованные с прямоугольными координатами x, y (т. е. такие, что $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$). Поскольку в коорди-

натах r, φ правая ветвь гиперболы $x^2-y^2=1$ (которую пересекают лучи OA и OB) имеет уравнение

$$r^2=\frac{1}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}, \tag{3}$$

этим доказано, что

$$\theta=\int_0^\beta\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\beta}, \tag{4}$$

т. е. что $\operatorname{th}\theta=\operatorname{tg}\beta$, где

$$\operatorname{th}\theta=\frac{e^\theta-e^{-\theta}}{e^\theta+e^{-\theta}}$$

— *гиперболический тангенс* угла θ. Так как

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{b_2}{b_1} \quad \text{и} \quad \operatorname{ch}^2\theta=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2\theta},$$

это доказывает формулу (2).

Пусть теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространственноподобны и, значит,

$$|\boldsymbol{a}|=ia \text{ и } |\boldsymbol{b}|=ib, \text{ где } a>0 \text{ и } b>0.$$

В этом случае можем найти такой псевдоортонормированный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, что

$$\boldsymbol{a}=a\boldsymbol{j} \text{ и } \boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}, \text{ где } b_2>0 \text{ и } |b_1|<b_2.$$

Кроме того, без ограничения общности мы можем предполагать, что $b_1>0$. Поэтому, если r, φ — полярные координаты, согласованные с координатами y, x (т. е. такие, что $x=r\sin\varphi$, $y=r\cos\varphi$), то для угла θ будет иметь место прежняя формула (4) (ибо с лучами OA и OB теперь пересекается верхняя ветвь гиперболы $x^2-y^2=-1$ и эта ветвь в координатах r, φ имеет уравнение (3)), а, значит, и формула $\operatorname{th}\theta=\operatorname{tg}\beta$. Но теперь $\operatorname{tg}\beta=\frac{b_1}{b_2}$, и поэтому

$$\operatorname{ch}\theta=\frac{b_2}{\sqrt{b_2^2-b_1^2}}$$

(напомним, что $b_2>0$ и $b_2^2-b_1^2>0$). Для завершения доказательства остается заметить, что в рассматриваемом случае

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-ab_2, \ |\boldsymbol{a}|=ia \text{ и } |\boldsymbol{b}|=i\sqrt{b_2^2-b_1^2}. \qquad \square$$

Следствие 1. *Для любых одноименных векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место равенство*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}| \operatorname{ch}\theta. \quad \square \tag{5}$$

Следствие 2. *Времениподобные векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда одноименны, когда*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0,$$

а пространственноподобные — тогда и только тогда, когда

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0.$$

Иначе говоря, *неизотропные векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *тогда и только тогда одноименны, когда все три числа* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$ *и* $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ *имеют один и тот же знак.*

Доказательство. Длины $|\boldsymbol{a}|$ и $|\boldsymbol{b}|$ времениподобных векторов положительны. Поэтому, если эти векторы одноименны, то справа в формуле (5) все числа положительны. Следовательно, $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0$. Аналогично, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ пространственноподобны, то $|\boldsymbol{a}| = ia$ и $|\boldsymbol{b}| = ib$, где $a > 0$ и $b > 0$. Поэтому в этом случае

$$|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}| = -ab \operatorname{ch}\theta < 0.$$

Обратные утверждения непосредственно вытекают из того, что неизотропные векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одного характера тогда и только тогда неодноименны, когда одноименны векторы $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$. $\square$

Следствие 3 (обращенное неравенство Коши — Буняковского). *Для любых векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *одного характера имеет место неравенство*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \geqslant (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}). \tag{6}$$

Доказательство. Для изотропных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неравенство (6) верно автоматически. Кроме того, если оно верно для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, то оно верно и для векторов $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{b}$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одноименны. Но тогда для них имеет место равенство (5), возводя которое в квадрат, мы и получаем (6) (ибо $\operatorname{ch}\theta \geqslant 1$). $\square$

Замечание 1. Для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, один из которых времениподобен, а другой пространственноподобен, справедливо обычное неравенство Коши — Буняковского вида

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leqslant |(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})| |(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})|.$$

Замечание 2. Для одноименных времениподобных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$

(7) $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \geqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$

а для одноименных пространственноподобных

(8) $$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \leqslant |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$$

(или, в другой записи, $|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \geqslant |\boldsymbol{a}|_{\text{вещ}} |\boldsymbol{b}|_{\text{вещ}}$).

Замечание 3. Равенство в формулах (6), (7) и (8) достигается лишь для пропорциональных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (так как только в этом случае $\theta = 0$ и $\operatorname{ch}\theta = 1$).

Следствие 4 (обращенное неравенство треугольника). *Для любых одноименных времениподобных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет место неравенство*

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \geqslant |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|.$$

(Заметим, что вектор $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ времениподобен.)

Доказательство. Согласно неравенству (7)

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + 2(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + |\boldsymbol{b}|^2 \geqslant$$
$$\geqslant |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2 = (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)^2. \quad \square$$

Замечание 4. Для пространственноподобных одноименных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ неравенство треугольника имеет аналогичный вид

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}|_{\text{вещ}} \geqslant |\boldsymbol{a}|_{\text{вещ}} + |\boldsymbol{b}|_{\text{вещ}}.$$

На первый взгляд кажется, что все эти результаты автоматически переносятся на векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ псевдоевклидова пространства $\mathscr{V}$ произвольной размерности — достаточно рассмотреть двумерное подпространство, порожденное этими векторами. Однако на самом деле ситуация здесь несколько более сложная, поскольку это подпространство может быть (по отношению к скалярному умножению, индуцированному скалярным умножением в пространстве $\mathscr{V}$) не только собственно псевдоевклидовым, но и евклидовым или антиевклидовым, и даже вырожденным. Если оно евклидово или антиевклидово, то для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будет иметь место обычное неравенство Коши — Буняковского $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \leqslant (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$, а угол $\theta = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ будет вычисляться по формуле $\theta = \arccos \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. Если оно собственно псевдоевклидово, а векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ одноименны, то для них будет иметь место обращенное неравенство Коши — Буняковского $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \geqslant (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$, а угол θ будет вычисляться по формуле $\theta = \operatorname{arch} \frac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$. Наконец, если это подпро-

странство вырождено (что вполне может быть для неизотропных и даже одноименных векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$), то неравенство Коши — Буняковского превращается в равенство $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$, а угол θ смысла не имеет.

Таким образом, зная лишь характер векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (т. е. знак скалярных квадратов $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})$ и $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$) и факт их одноименности или неодноименности (т. е. зная знак скалярного произведения $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$), мы, в общем случае, еще ничего не можем сказать о том, какое неравенство Коши — Буняковского выполнено для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (и, значит, — определен ли угол $\theta = \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ и по какой формуле он вычисляется). Однако здесь есть одно замечательное исключение.

Пусть $\mathscr{P}$ — произвольное подпространство линейного псевдоевклидова пространства $\mathscr{V}$. Мы будем называть подпространство $\mathscr{P}$ *невырожденным*, если ограничение на $\mathscr{P}$ скалярного умножения в $\mathscr{V}$ невырождено. Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда $\mathscr{P}$ обладает ортогональным базисом, состоящим из неизотропных векторов (или — что равносильно — псевдоортонормированным базисом). В вырожденном же подпространстве $\mathscr{P}$ любой ортогональный базис непременно содержит изотропный вектор (и тогда $\mathscr{P}$ содержится в ортогональном дополнении этого вектора). Поскольку нуль-пространством подпространства $\mathscr{P}$ служит пересечение $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}^{\perp}$, этим доказано, что подпространство $\mathscr{P}$ тогда и только тогда невырождено, когда $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}^{\perp} = 0$, т. е. (см. лекцию 5) когда

$$\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}^{\perp}.$$

В частности, мы видим, что *любой псевдоортонормированный базис невырожденного подпространства $\mathscr{P}$ можно дополнить до псевдоортонормированного базиса всего пространства $\mathscr{V}$* (достаточно объединить его с произвольным псевдоортонормированным базисом подпространства $\mathscr{P}^{\perp}$ также, очевидно, невырожденного).

Для типа (p', q') подпространства $\mathscr{P}$ отсюда вытекает, что он связан с типом (p, q) пространства $\mathscr{V}$ неравенствами

$$p' \leqslant p, \qquad q' \leqslant q.$$

Применим эти общие результаты к случаю, когда $(p, q) = (1, n-1)$, а $\mathscr{P}$ является двумерным подпространством, порожденным времениподобными векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как $p' \leqslant 1$, а $\dim \mathscr{P} = 2$, то подпространство

$\mathcal{P}$ заведомо не евклидово. Так как это подпространство содержит времениподобные векторы, то оно не может быть и антиевклидовым. Если оно вырождено, то ортогональное дополнение вектора $\boldsymbol{a}$ (являющееся, очевидно, $n-1$-мерным антиевклидовым пространством) будет содержать изотропный вектор, что невозможно. Следовательно, подпространство $\mathcal{P}$ может быть лишь собственной псевдоевклидовой плоскостью и, значит, для векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ будет иметь место обращенное неравенство Коши — Буняковского.

Этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. *В псевдоевклидовом пространстве индекса* $(1, n-1)$ *для любых времениподобных векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *имеет место обращенное неравенство Коши — Буняковского*

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})^2 \geqslant (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$$

и — в случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *одноименны, — обращенное неравенство треугольника*

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \geqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|. \quad \square$$

В пространстве Минковского времениподобные лучи OA изображают траектории (мировые линии) инерциально движущихся наблюдателей, причем длина $|OA|$ отрезка $\overline{OA}$ равна времени, протекщему от события O до события A, измеренному по часам, движущимся вместе с наблюдателем (это — так называемое *собственное время* наблюдателя). [Пространственноподобные лучи физической интерпретации не имеют.]

Одноименность двух времениподобных лучей OA и OB означает, что время для обоих наблюдателей течет в одну сторону — «в будущее».

Представим себе двух близнецов-наблюдателей — один инерциален и движется по своей мировой линии от точки O до точки A, а другой («космонавт») толчком стартует из точки O, инерциально (с выключенными двигателями) движется в точку B, достигнув точки B, снова толчком меняет скорость и, продолжая двигаться инерциально, приходит в ту же точку A. Так как $|OA| > |OB|+|BA|$, то при встрече возраст близнецов окажется различным — домосед будет старше своего брата-космонавта.

Это — известный парадокс близнецов, неоднократно обыгрывавшийся в научно-фантастической литературе.