Лекция 13

Проективные гиперквадрики. — Конусы в проективном пространстве. — Перечисление проективных гиперквадрик. — Гиперквадрики в комплексном и вещественно-комплексном проективном пространстве. — Цилиндры и конусы в аффинном пространстве. — Аффинные гиперквадрики. — Гиперквадрики, имеющие центр.

Пусть снова $\mathbb{K}$ — произвольное поле с $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$.

Напомним (см. лекцию 9), что каждое $n+1$-мерное линейное пространство $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{K}$ определяет соответствующее n-мерное проективное пространство $\mathsf{P} = \mathsf{P}(\mathscr{V})$, точками которого являются одномерные подпространства пространства $\mathscr{V}$ или, что равносильно, — классы отличных от нуля пропорциональных векторов из $\mathscr{V}$. Таким образом, каждый вектор $x \neq 0$ из $\mathscr{V}$ определяет некоторую точку $M = [x]$ из P, причем два вектора $x, y \in \mathscr{V} \setminus 0$ тогда и только тогда определяют одну и ту же точку $M \in \mathsf{P}$, когда $y = \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{K}$.

Задание в пространстве $\mathscr{V}$ базиса $e_0, e_1, \ldots, e_n$ позволяет сопоставить каждой точке M пространства P ее проективные координаты $X_0, X_1, \ldots, X_n$, определенные с точностью до пропорциональности и являющиеся не чем иным, как координатами в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$ произвольного вектора $x \in \mathscr{V}$, задающего точку M. (Сейчас нам удобно писать индексы у координат снизу.)

Пусть Q — произвольный квадратичный функционал на линейном пространстве $\mathscr{V}$. Из однородности этого функционала немедленно вытекает, что если для некоторого вектора $x \neq 0$ имеет место равенство

$$Q(x) = 0, \tag{1}$$

то аналогичное равенство имеет место и для любого пропорционального вектора. Поэтому условие (1) корректно определяет в пространстве P некоторое множество. Проективные координаты $X_0, X_1, \ldots, X_n$ точек этого множества характеризуются тем, что они удовлетворяют уравнению вида

$$Q(X_0, X_1, \ldots, X_n) = 0, \tag{2}$$

где $Q(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ — квадратичная форма, выражающая в базисе $e_0, e_1, \ldots, e_n$ значения функционала Q.

При $n = 2$ уравнения вида (2) задают линии второго порядка (см. определение 4 лекции I.29). В общем случае мы принимаем следующее определение:

Определение 1. Множество точек n-мерного проективного пространства $\mathbf{P}$, заданное уравнением вида (2) (или (1)), называется *гиперповерхностью второго порядка* (или, короче, *проективной гиперквадрикой*).

Таким образом, при $n = 2$ гиперповерхностями являются линии.

При $n = 3$ префикс «гипер» опускается.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы перенести на случай любого n результаты первого семестра, касающиеся линий второго порядка. Основным орудием здесь служит теорема Лагранжа из лекции 11.

Теорема 1 (о приведении к нормальному виду уравнений проективных гиперквадрик). *Для любой гиперквадрики n-мерного проективного пространства над полем* $\mathbb{K}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, *существует система проективных координат, в которой ее уравнение имеет вид*

$$\lambda_0 X_0^2 + \ldots + \lambda_r X_r^2 = 0, \tag{3}$$

где $0 \leqslant r \leqslant n$ *и* $\lambda_0, \ldots, \lambda_r \neq 0$.

Доказательство. Эта теорема является очевидной переформулировкой теоремы Лагранжа. □

Заметим, что число $r + 1$ в (3) является не чем иным, как рангом квадратичной формы Q.

При $r = n$ гиперквадрика (3) называется *невырожденной.*

Так как для любого k-мерного подпространства $\mathscr{P}_0$ пространства $\mathscr{V}$ и любого вектора $x \neq 0$, не принадлежащего $\mathscr{P}_0$, существует единственное $k + 1$-мерное подпространство, содержащее $\mathscr{P}_0$ и x, то для любой $k - 1$-мерной плоскости Π_0 проективного пространства $\mathbf{P}(\mathscr{V})$ и любой его точки M, не принадлежащей плоскости Π_0, существует единственная k-мерная плоскость, содержащая Π_0 и M.

Мы будем эту плоскость обозначать символом $M\Pi_0$.

[К числу плоскостей мы причисляем как точки (считая их плоскостями размерности 0), так и пустое множество $\varnothing$ (считая его плоскостью размерности -1). Для любой точки M плоскость $M\varnothing$ совпадает с M.]

Пусть Φ — произвольная гиперповерхность пространства $\mathbf{P}(\mathscr{V})$. (Так же, как для линий на плоскости, — см.

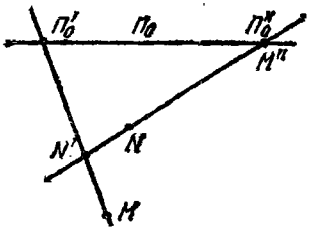
лекцию I.17 — мы не даем общего определения понятия гиперповерхности. В дальнейшем под гиперповерхностью можно по желанию понимать либо произвольное множество, либо гиперквадрику.)

Заметим, что случай $\Phi = \varnothing$ мы не исключаем.

Определение 2. Плоскость Π_0 пространства $\mathsf{P}(\mathscr{V})$ называется *вершинной плоскостью* гиперповерхности Φ, если

а) для любой точки $M \in \Phi \setminus \Pi_0$ плоскость $M\Pi_0$ содержится в гиперповерхности Φ;

б) не существует плоскости большей размерности, содержащей плоскость Π_0 и обладающей свойством а).



[В первом издании этой книги вершинные плоскости назывались *осевыми*.]

Так как свойством а) обладает, конечно, пустая плоскость $\varnothing$, то *вершинная плоскость существует для любой гиперповерхности* Φ.

Пусть Π_0' и Π_0'' — две различные вершинные плоскости одной и той же гиперповерхности Φ и пусть Π_0 — плоскость наименьшей размерности, содержащая обе плоскости Π_0' и Π_0''. Пусть, далее, $M \in \Phi \setminus \Pi_0$ и пусть N — произвольная точка плоскости $M\Pi_0$.

Так как $\Pi_0' \neq \Pi_0''$, то по крайней мере одна из плоскостей Π_0' и Π_0'' непуста. Предположив, что $\Pi_0'' \neq \varnothing$, и произвольно выбрав точку $M'' \in \Pi_0''$, рассмотрим прямую NM''. Эта прямая пересекает плоскость $M\Pi_0'$ в некоторой точке N'. Так как $M\Pi_0' \subset \Phi$, то $N' \in \Phi$, и потому $N'\Pi_0'' \subset \Phi$ (если, конечно, $N' \notin \Pi_0''$). В частности, $N'M'' \subset \Phi$, т. е. $NM'' \subset \Phi$. Следовательно, $N \in \Phi$. Поскольку этот вывод остается, очевидно, в силе и при $N' \in \Pi_0''$, тем самым доказано, что $M\Pi_0 \subset \Phi$, т. е. что плоскость Π_0 обладает свойством а).

С другой стороны, так как $\Pi_0' \neq \Pi_0''$ (и $\Pi_0'' \neq \varnothing$), то $\dim \Pi_0 > \dim \Pi_0'$. Таким образом, для плоскости Π_0' мы нашли плоскость Π_0 большей размерности, также обладающей свойством а). Поскольку это противоречит свойству б), первоначальное предположение о существова-

нии двух различных вершинных плоскостей Π_0' и Π_0'' верным быть не может. Следовательно, *вершинная плоскость произвольной гиперповерхности* Φ *единственна.*

[Изложенное рассуждение иллюстрируется чертежом на предыдущей странице. Верность этого чертежа, т. е. выполнение всех инциденций (например, существование точки N'), доказывается с помощью следствия 2 теоремы 1 лекции 1 на основе интерпретации плоскостей проективного пространства $\mathsf{P}(\mathscr{V})$ как подпространств (на единицу большей размерности) линейного пространства $\mathscr{V}$. Проведите аккуратно соответствующее доказательство!]

Определение 3. Гиперповерхность Φ с непустой вершинной плоскостью Π_0 называется *конусом*. Число $1 + \dim \Pi_0$ называется *кратностью* конуса Φ.

Впрочем, гиперповерхности, не являющиеся конусами (т. е. обладающие пустой вершинной плоскостью) иногда удобно называть *конусами кратности* 0.

Для конуса Φ кратности 1 вершинной плоскостью Π_0 является точка, и Φ состоит из прямых, проходящих через эту точку, т. е. является элементарно-геометрическим конусом с вершиной Π_0. Это оправдывает нашу терминологию. [В первом издании этой книги конусы назывались *цилиндрами*. Выбор этой терминологии объясняется тем, что в этом случае, когда пространство $\mathsf{P}(\mathscr{V})$ аффинно-проективно (т. е. в нем выбрана несобственная гиперплоскость), гиперповерхность Φ будет цилиндром в элементарно-геометрическом смысле, если точка Π_0 окажется несобственной точкой. Вместе с тем в дальнейшем проективные координаты мы, как правило, будем выбирать так, чтобы плоскость Π_0 содержалась в координатной гиперплоскости $X_0 = 0$. Поскольку в аффинно-проективных координатах уравнение $X_0 = 0$ задает несобственную гиперплоскость, такой выбор координат означает, что точки плоскости Π_0 мы наглядно представляем себе в виде несобственных точек и, значит, гиперповерхность Φ — в виде элементарно-геометрического цилиндра.

С этим представлением был связан и выбор эпитета «осевая» для плоскости Π_0, поскольку для цилиндра кратности 1 — когда Π_0 является точкой — элементарно-геометрическая ось этого цилиндра является не чем иным, как прямой с несобственной точкой Π_0. Однако по многим

другим соображениям «конусная» терминология представляется все же более предпочтительной.

Заметим, что, согласно определению 2, любая $k-1$-мерная $(0 \leqslant k \leqslant n)$ плоскость Π_0 пространства $\mathbf{P}(\mathscr{V})$ является k-кратным конусом! Хотя такое представление, конечно, несколько расходится с наглядным, с этим приходится мириться.

Пусть Φ — конус кратности k и Π_0 — его вершинная плоскость (размерности $k-1$). Для любой $n-k$-мерной плоскости Π, *скрещивающейся* с плоскостью Π_0 (т. е. с ней не пересекающейся), пересечение $\Phi \cap \Pi$ (рассматриваемое как гиперповерхность в Π) имеет, очевидно, пустую вершинную плоскость, т. е. является конусом кратности 0. (Действительно, для любой точки M_0 вершинной плоскости гиперповерхности $\Phi \cap \Pi$ плоскость $M_0\Pi_0$ будет — докажите! — удовлетворять по отношению к гиперповерхности Φ условию а) определения 2, что невозможно.)

Пересечение $\Phi \cap \Pi$ называется *основанием* конуса Φ. Говорят также, что Φ является конусом *над* $\Phi \cap \Pi$.

[Если Π' — другая $n-k$-мерная плоскость, скрещивающаяся с плоскостью Π_0, то для любой точки $M \in \Pi$ плоскость $M\Pi_0$ пересекает плоскость Π' в единственной точке M'. Получающееся отображение $M \longmapsto M'$ плоскости Π на плоскость Π' является, как легко видеть, проективным отображением, переводящим $\Phi \cap \Pi$ в $\Phi \cap \Pi'$. Это означает, что с точностью до проективной эквивалентности основание $\Phi \cap \Pi$ не зависит от выбора гиперплоскости Π.]

Для данных скрещивающихся плоскостей Π_0 и Π (размерностей, соответственно, $k-1$ и $n-k$) всегда существует — докажите! — система проективных координат $X_0, \ldots, X_n$, в которой плоскость Π задается уравнениями

$$X_{r+1}=0, \ldots, X_n=0, \text{ где } r=n-k, \tag{4}$$

а плоскость Π_0 — уравнениями

$$X_0=0, \ldots, X_n=0. \tag{5}$$

Эта система координат обладает тем свойством, что для любой точки $M \in \Pi_0$ с координатами $X_0, \ldots, X_n$ плоскость $M\Pi_0$ состоит из точек, имеющих координаты вида $\rho X_0, \ldots, \rho X_r, X'_{r+1}, \ldots, X'_n$, где ρ и $X'_{r+1}, \ldots, X'_n$ — произвольные числа (подчиненные лишь тому условию, что хотя бы одно из них отлично от нуля).

Отсюда следует, что если в плоскости П (в которой $X_0, \ldots, X_r$ являются, очевидно, проективными координатами) основание конуса Ф с осевой плоскостью $П_0$ имеет уравнение

$$F(X_0, \ldots, X_r) = 0, \tag{6}$$

то то же самое уравнение (но рассматриваемое как уравнение от $X_0, \ldots, X_n$) будет уравнением конуса Ф во всем пространстве. Обратно, если в координатах $X_0, \ldots, X_n$ уравнение некоторой гиперповерхности Ф имеет вид (6), то плоскость $П_0$ с уравнениями (5) будет обладать по отношению к гиперповерхности Ф свойством а) из определения 2, и, значит, гиперповерхность Ф будет конусом кратности $\geqslant k = n - r$. При этом, если в плоскости П с уравнениями (4) уравнение (6) задает конус Ф′ кратности 0, то *гиперповерхность Ф будет конусом кратности k над Ф′*.

Применение этих общих понятий и результатов к гиперквадрикам основывается на следующем предложении:

Предложение 1. *Каждая невырожденная гиперквадрика является конусом кратности* 0.

Доказательство. Если гиперквадрика (2) представляет собой конус кратности $\geqslant 1$, то без ограничения общности мы можем считать, что координаты $X_0, \ldots, X_n$ выбраны так, что его вершинная плоскость $П_0$ содержит точку $(0: \ldots : 0 : 1)$ и, значит, для любой точки $(X_0^{(0)} : \ldots : X_{n-1}^{(0)} : X_n^{(0)})$ этой гиперквадрики все точки вида $(X_0^{(0)} : \ldots : X_{n-1}^{(0)} : X_n)$ также ей принадлежат. Записав квадратичную форму $Q(X_0, \ldots, X_n)$ в виде

$$Q(X_0, \ldots, X_n) = aX_n^2 + b(X_0, \ldots, X_{n-1})X_n + \\ + Q_0(X_0, \ldots, X_{n-1}),$$

где a — константа (элемент поля $\mathbb{K}$), $b(X_0, \ldots, X_{n-1})$ — линейная форма от $X_0, \ldots, X_{n-1}$, а $Q_0(X_0, \ldots, X_{n-1})$ — квадратичная форма от $X_0, \ldots, X_{n-1}$, мы получим, таким образом, что для любой точки $(X_0^{(0)} : \ldots : X_{n-1}^{(0)} : X_n^{(0)})$ гиперквадрики многочлен

$$aX_n^2 + b(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)})X_n + Q_0(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)})$$

от X_n должен быть тождественно равен нулю, и, следовательно, — что все его коэффициенты равны нулю.

Поэтому, в частности, $a=0$, т. е. $Q(X_0, \ldots, X_n)=b(X_0, \ldots, X_{n-1})X_n+Q_0(X_0, \ldots, X_{n-1})$.

В случае, когда форма $b(X_0, \ldots, X_{n-1})$ не равна тождественно нулю, существуют такие числа $X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)}$, не все равные нулю, что $b(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)}) \neq 0$. Тогда точка $(X_0^{(0)} : \ldots : X_{n-1}^{(0)} : X_n^{(0)})$, где

$$X_n^{(0)}=-\frac{Q_0(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)})}{b(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)})},$$

будет принадлежать рассматриваемой гиперквадрике и, значит, многочлен

$$b(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)})X_n+Q_0(X_0^{(0)}, \ldots, X_{n-1}^{(0)})$$

от X_n будет тождественно равен нулю, что невозможно.

Полученное противоречие доказывает, что линейная форма $b(X_0, \ldots, X_{n-1})$ тождественно равна нулю, и, следовательно,

$$Q(X_0, \ldots, X_n)=Q_0(X_0, \ldots, X_{n-1}).$$

Поэтому $r \leqslant n-1$, и, значит, гиперквадрика (2) вырождена. □

Возможность приведения уравнения гиперквадрики к виду (3) показывает теперь, что *любая гиперквадрика* (2) *является конусом кратности* $n-r$ *над невырожденной гиперквадрикой* r*-мерного проективного пространства.*

Поскольку свойство быть конусом данной кратности k проективно инвариантно (не зависит от системы координат и от выбора уравнения), отсюда следует, что *для любых двух уравнений* $Q_1=0$ *и* $Q_2=0$ *гиперквадрики* n*-мерного проективного пространства квадратичные формы* Q_1 *и* Q_2 *имеют один и тот же ранг* (свойство инвариантности ранга).

[Заметим, что квадратичные формы Q_1 и Q_2 вполне могут быть различны. Например, над полем $\mathbb{R}$ все положительно определенные квадратичные формы определяют одну и ту же — пустую — гиперквадрику.]

Окончательный результат произведенного исследования мы сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2 (о перечислении проективных гиперквадрик над произвольным полем $\mathbb{K}$). *Каждая гиперквадрика* n*-мерного проективного про-*

странства над полем $\mathbb{K}$, $\operatorname{char}\mathbb{K} \neq 2$, *либо невырождена, либо является* k*-кратным* $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *конусом над невырожденной гиперквадрикой* $n-k$*-мерного пространства.*

Одномерным проективным пространством является прямая, а невырожденной гиперквадрикой в ней — пара различных точек (или пустое множество). Поэтому при $k=n-1$ соответствующий $n-1$-кратный конус представляет собой пару различных гиперплоскостей (или является $n-2$-мерной плоскостью).

При $k=n$ уравнение $X_0^2=0$ определяет в n-мерном проективном пространстве «дважды взятую» гиперплоскость $X_0=0$, являющуюся n-кратным конусом под дважды взятым пустым множеством. Это также подходит под общую формулировку, так как нульмерным проективным пространством является точка, а гиперплоскостью в нем — пустое множество.

При $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ все коэффициенты $\lambda_0, \ldots, \lambda_r$ в уравнении (3) мы можем считать равными единице. Поэтому для любого r, $0 \leqslant r \leqslant n$, будет иметься только одна гиперквадрика (3), и в силу инвариантности ранга эти гиперквадрики при различных r будут проективно не эквивалентны. Этим доказана следующая теорема:

Теорема 3 (о классификации проективных гиперквадрик над полем $\mathbb{C}$). *В комплексном* n*-мерном проективном пространстве имеется только* $n+1$ *проективно неэквивалентных гиперквадрик: одна невырожденная гиперквадрика и для любого* r, $0 \leqslant r \leqslant n-1$, *конус кратности* $n-r$ *над невырожденной гиперквадрикой* r*-мерного пространства.*

В случае $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, как мы знаем, геометрическая ситуация не адекватна алгебраической (существуют одинаковые гиперквадрики с различными уравнениями) и приходится вводить *вещественно-комплексные пространства* (т. е. переходить в *ситуацию* $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$; см. лекцию I. 20).

Подчеркнем, что алгебраическая ситуация при этом не меняется: все преобразования координат по-прежнему будут преобразованиями над $\mathbb{R}$ и все уравнения будут иметь вещественные коэффициенты.

Поэтому в ситуации $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ уравнение (3) мы можем привести к виду

$$(7) \qquad X_0^2+\ldots+X_p^2-X_{p+1}^2-\ldots-X_r^2=0, \qquad 0 \leqslant r \leqslant n$$

(допускается значение $p=-1$, при котором уравнение (7) принимает вид $-X_0^2-\ldots-X_r^2=0$), причем за счет умножения уравнения на -1 мы можем без ограничения общности считать, что

$$-1\leqslant p\leqslant\left[\frac{r+1}{2}\right]-1,$$

где $\left[\frac{r+1}{2}\right]$ — целая часть числа $\frac{r+1}{2}$ (если $r=2m+1$, то $\left[\frac{r+1}{2}\right]=m+1$, а если $r=2m$, то $\left[\frac{r+1}{2}\right]=m$).

При $r=n$ уравнение (7) имеет вид

$$X_0^2+\ldots+X_p^2-X_{p+1}^2-\ldots-X_n^2=0, \tag{8}$$

и соответствующая гиперквадрика называется *невырожденной гиперквадрикой индекса p*.

При $p=-1$ гиперквадрика (8) не имеет вещественных точек и называется *мнимой*. При $p=0$ гиперквадрика (8) называется *овальной*.

Чтобы выяснить геометрический смысл индекса p, мы введем следующее определение:

Определение 4. Гиперквадрика вещественно-комплексного проективного пространства называется *s-планарной* ($s\geqslant-1$), если она не содержит ни одной $s+1$-мерной вещественной плоскости, но через любую ее вещественную точку проходит хотя бы одна вещественная s-мерная плоскость, целиком содержащаяся в гиперквадрике.

В трехмерном пространстве двуполостный гиперболоид 0-планарен, а однополостный 1-планарен.

Гиперквадрика -1-планарна тогда и только тогда, когда она не содержит вещественных точек (является мнимой гиперквадрикой индекса -1).

Таким образом, $s=-1$ тогда и только тогда, когда $p=-1$, так что при $s=-1$ справедливо равенство $p=s$.

Оказывается, что это равенство имеет место всегда:

Предложение 2. *Невырожденная гиперквадрика тогда и только тогда p-планарна, когда ее индекс равен p.*

Мы докажем это предложение в следующей лекции (см. замечание 1 лекции 13а).

Поскольку p-планарность является, очевидно, проективно инвариантным свойством, из предложения 2 следует, что все невырожденные гиперквадрики (8) проективно не эквивалентны.

При $r<n$ гиперквадрика (7) является $n-r$-кратным конусом над невырожденной гиперквадрикой в

r-мерном пространстве, задаваемой тем же уравнением (7). Поэтому все гиперквадрики (7) также проективно не эквивалентны.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 4 (о классификации гиперквадрик в вещественно-комплексном n-мерном проективном пространстве). *В вещественно-комплексном n-мерном ($n > 0$) проективном пространстве имеется только $\left[\frac{n+1}{2}\right]+1$ проективно не эквивалентных, не являющихся конусами, гиперквадрик. Эти гиперквадрики различаются своими индексами $p=-1, \ldots, \left[\frac{n+1}{2}\right]-1$, причем при $p=-1$ гиперквадрика мнима, а при $p=0$ овальна.*

Все остальные гиперквадрики являются k-кратными ($1 \leqslant k \leqslant n$) конусами над невырожденными гиперквадриками $n-k$-мерного пространства (при $k=n$ — двойными гиперплоскостями). □

Аналогичная теорема имеет место, конечно, и в аффинно-проективном пространстве, получающемся из проективного пространства выбором некоторой гиперплоскости в качестве несобственной. В дополнение ко всему прежнему гиперквадрики в таком пространстве будут различаться еще и их расположением относительно несобственной гиперплоскости. В частности, в едином классе конусов выделяются теперь *цилиндры* (конусы с несобственной вершинной плоскостью). Поэтому классификация гиперквадрик даже в комплексном аффинно-проективном пространстве хотя и тривиальна, но довольно громоздка. Соответствующих теорем мы по этой причине не будем даже формулировать.

Удалив из аффинно-проективного пространства несобственную гиперплоскость, мы получим аффинное пространство. Поэтому классификацию гиперквадрик в аффинном пространстве можно получить из их классификации в аффинно-проективном пространстве, причем число классов только уменьшится. Однако для большей геометрической ясности мы предпочтем получить эту классификацию непосредственно.

Пусть $\mathscr{A}$ — аффинное n-мерное пространство (над пока произвольным полем $\mathbb{K}$ характеристики, отличной от двух) и $\mathscr{V}$ — ассоциированный линеал. Пусть, далее, Φ — произвольная гиперповерхность в $\mathscr{A}$.

Определение 5 (ср. с определением 2). Подпространство $\mathscr{P}$ линеала $\mathscr{V}$ называется *осью* гиперповерхности Φ, если

а) для любой точки M_0 гиперповерхности Φ все точки плоскости, проходящей через точку M_0 параллельно подпространству $\mathscr{P}$, принадлежат Φ (эта плоскость называется *образующей* гиперповерхности Φ);

б) не существует подпространства большей размерности, содержащего подпространство $\mathscr{P}$ и обладающего свойством а).

Если $f(x)=0$ — уравнение гиперповерхности Φ, то условие а) означает, что

$$f(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0+a)=0 \text{ для любого вектора } a \in \mathscr{P}.$$

Поэтому, если два подпространства $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ удовлетворяют условию а), то их сумма $\mathscr{P}_1+\mathscr{P}_2$ также будет удовлетворять этому условию. Следовательно (ср. аналогичный вывод для вершинных плоскостей гиперповерхностей проективного пространства), *ось $\mathscr{P}$ произвольной гиперповерхности Φ единственна.*

Если $\dim \mathscr{P} > 0$ (т. е. $\mathscr{P} \neq 0$), то гиперповерхность Φ называется *цилиндром*, а число $k=\dim \mathscr{P}$ — *кратностью* цилиндра Φ.

Впрочем, как и в случае конусов проективного пространства, гиперповерхности Φ с $\dim \mathscr{P}=0$ иногда удобно называть *цилиндрами кратности* 0.

Для любой r-мерной ($r=n-k$) плоскости Π, направляющее подпространство которой дополнительно к оси $\mathscr{P}$ цилиндра Φ, пересечение $\Phi \cap \Pi$ (рассматриваемое как гиперповерхность в аффинном пространстве Π) будет, очевидно, цилиндром кратности 0. Это пересечение называется *основанием* цилиндра Φ. Говорят также, что Φ является *цилиндром над* $\Phi \cap \Pi$.

Если система $Oe_1 \ldots e_n$ аффинных координат в пространстве $\mathscr{A}$ выбрана так, что векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ порождают подпространство $\mathscr{P}$, то левая часть уравнения $f(x_1 \ldots, x_n)=0$ гиперповерхности Φ не будет зависеть от $x_{r+1}, \ldots, x_n$, т. е. это уравнение будет иметь вид

$$f(x_1, \ldots, x_r)=0. \tag{9}$$

При этом в координатной плоскости

$$\Pi\colon x_{r+1}=0, \ldots, x_n=0 \tag{10}$$

уравнение (9) будет определять (в системе координат $Oe_1 \ldots e_r$) основание $\Phi \cap \Pi$ цилиндра Φ.

Обратно, если в некоторой системе аффинных координат гиперповерхность Φ имеет уравнение вида (9), то эта гиперповерхность является цилиндром кратности $\geqslant k = n - r$, причем если в координатной плоскости (10) уравнение (9) задает гиперповерхность Φ' с нульмерной осью (т. е. задает цилиндр кратности 0), то *гиперповерхность Φ будет цилиндром кратности k над Φ'.*

Определение 6. Гиперповерхность Φ аффинного пространства $\mathcal{A}$ называется *конусом*, если

а) существует такая точка $M_0 \in \Phi$ (называемая *вершиной* конуса), что для любой точки $M \neq M_0$ гиперповерхности Φ прямая M_0M целиком содержится в Φ;

б) предусмотренная условием а) точка M_0 единственна.

Изучим в общем виде гиперповерхности Φ, удовлетворяющие лишь условию а) определения 6. (Такие гиперповерхности мы будем называть *обобщенными конусами.*)

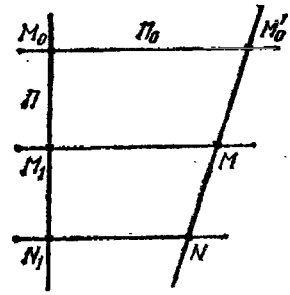
[Заметим, что здесь наша терминология отличается от принятой в случае проективного пространства.]

Пусть Φ — цилиндр, основанием $\Phi \cap \Pi$ которого является конус, и пусть

M_0 — вершина конуса $\Phi \cap \Pi$;

M_0' — произвольная точка образующей Π_0 цилиндра Φ, проходящей через точку M_0;

M — произвольная точка цилиндра Φ, отличная от точки M_0';



N — произвольная точка прямой $M_0'M$;

M_1 — точка пересечения с плоскостью Π образующей цилиндра Φ, проходящей через точку M;

N_1 — точка пересечения с плоскостью Π образующей цилиндра Φ, проходящей через точку N.

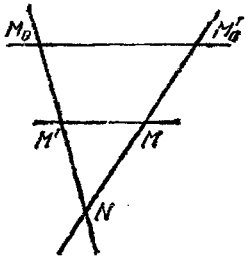
Если x_0 и x_1 — радиус-векторы точек M_0 и M_1, то радиус-векторы точек M_0' и M имеют вид $x_0 + a_0$ и $x_1 + a_1$, где a_0, $a_1 \in \mathcal{P}$ и, соответственно этому, радиус-вектор точки N имеет вид $(1-t)(x_0 + a_0) + t(x_1 + a_1)$, где $t \in \mathbb{K}$. Поскольку

$$(1-t)(x_0 + a_0) + t(x_1 + a_1) = \\ = ((1-t)x_0 + tx_1) + ((1-t)a_0 + ta_1),$$

где $(1-t)a_0+ta_1 \in \mathcal{P}$, а $(1-t)x_0+tx_1$ — радиус-вектор некоторой точки плоскости Π, отсюда следует, что вектор $(1-t)x_0+tx_1$ является как раз радиус-вектором точки N_1. Это означает, что точка N_1 является точкой прямой M_0M_1 (или — при $M_0=M_1$ — совпадает с M_0) и потому принадлежит конусу $\Phi \cap \Pi$. Следовательно, цилиндру Φ будет принадлежать любая точка плоскости, проходящей через точку N_1 параллельно подпространству $\mathcal{P}$, и, в частности, точка N.

Таким образом, для любой точки M_0' плоскости Π_0 и любой точки M гиперповерхности Φ, отличной от точки M_0', каждая точка прямой $M_0'M$ принадлежит Φ. По определению это означает, что Φ *является обобщенным конусом с вершиной* M_0'. (Заметим, что, таким образом, *вся плоскость* Π_0 *состоит из вершин обобщенного конуса* Φ.)

И обратно, оказывается, что *любой обобщенный конус является цилиндром, основанием которого является конус*. Действительно, легко видеть, что для доказательства этого утверждения достаточно показать, что для любых двух различных вершин M_0 и M_0' обобщенного конуса Φ и любой его точки M каждая точка M' прямой, проходящей через точку M параллельно прямой M_0M_0', принадлежит Φ. Но так как M_0' — вершина конуса, то вся прямая $M_0'M$ принадлежит Φ. В частности Φ принадлежит точка N пересечения прямой $M_0'M$ с прямой M_0M' (заметим, что прямые $M_0'M$ и M_0M' лежат в одной двумерной плоскости). Поэтому Φ принадлежат все точки прямой M_0N и, в частности, точка M'. □



Это доказательство не проходит в случае, когда прямые $M_0'M$ и M_0M параллельны. В этом случае нужно повторить рассуждение, меняя роли точек M_0 и M_0', т. е. принимая за N точку пересечения прямых M_0M и $M_0'M'$. Поскольку диагонали параллелограмма пересекаются, эта точка обязательно существует.

Полезно повторить изложенное рассуждение в аналитической форме.

Пусть

$$f(x)=0 \tag{11}$$

— уравнение обобщенного конуса Φ. Утверждение, что точка с радиус-вектором x_0 является вершиной конуса Φ, означает, что равенство $f(x)=0$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого $t \in \mathbb{K}$ имеет место равенство $f((1-t)x_0+tx)=0$. Символически,

$$(12) \qquad f(x)=0 \Leftrightarrow f((1-t)x_0+tx)=0 \quad \forall t \in \mathbb{K}.$$

В частности, начало отсчета O тогда и только тогда является вершиной обобщенного конуса Φ, когда

$$(13) \qquad f(x)=0 \Leftrightarrow f(tx)=0 \quad \forall t \in \mathbb{K}.$$

Если теперь M_0 и M_0' — две вершины конуса Φ, то без ограничения общности мы можем считать, что одна из этих вершин (скажем, M_0) является началом отсчета O и, значит, что функция $f(x)$ обладает свойствами (13) и (12) (где x_0 — радиус-вектор $\overrightarrow{M_0M_0'}$ точки M_0'), а потому и свойством

$$(14) \quad f(x)=0 \Leftrightarrow f(t((1-s)x_0+sx))=0 \quad \forall t,\ s \in \mathbb{K}.$$

С другой стороны, радиус-вектор x' произвольной точки M' прямой, проходящей через точку M параллельно прямой M_0M_0', выражается формулой $x'=x+lx_0$, где $l \in \mathbb{K}$, и, значит, имеет вид $t[(1-s)x_0+sx]$ при

$$t=1+l, \qquad s=\frac{1}{1+l}$$

(если, конечно, $1+l \neq 0$). Поэтому при $l \neq -1$

$$(15) \qquad f(x)=0 \Leftrightarrow f(x')=0,$$

так что точки M и M' одновременно принадлежат (или не принадлежат) обобщенному конусу Φ.

Чтобы охватить случай $l=-1$, достаточно заметить, что одновременно со свойством (14) функция $f(x)$ обладает также и свойством

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f((1-s)x_0+s(tx))=0 \quad \forall t,\ s \in \mathbb{K}.$$

Поскольку $(1-s)x_0+s(tx)=x+lx_0$ при

$$t=\frac{1}{1-l}, \quad s=1-l,$$

это доказывает (15) при $l \neq 1$ (и, в частности, при $l=-1$).

Тем самым наше утверждение об обобщенных конусах доказано и аналитически. □

В частности, мы видим, что *для любого обобщенного конуса все его вершины заполняют плоскость.* Размерность этой плоскости равна кратности этого конуса как цилиндра.

Условие (13), характеризующее вершину обобщенного конуса, являющуюся началом O отсчета радиус-векторов, заведомо выполнено, если *функция* $f(x)$ *однородна*, т. е. существует такое число m (*степень однородности* функции $f(x)$), что

$$f(tx) = t^m f(x)$$

для любого вектора $x \in \mathscr{V}$ и любого элемента $t \in \mathbb{K}$. Поэтому *для произвольной однородной функции* $f(x)$ *уравнение* (11) *задает в пространстве* $\mathscr{A}$ *обобщенный конус с вершиной* O.

Замечание 1. Обратное, конечно, неверно: если $\varphi(x) \neq 0$ для всех $x \in \mathscr{V}$, то уравнение $\varphi(x) f(x) = 0$, где $f(x)$ — однородная функция, задает тот же конус, что и уравнение $f(x) = 0$. Однако *если конус задается уравнением* (11), *в котором* $f(x)$ — *многочлен* (*от координат* $x_1, \ldots, x_n$ *вектора* x) *второй* (*или первой*) *степени, то этот многочлен необходимо однороден.* Действительно, пусть $f = f_0 + f_1 + f_2$, где f_0, f_1 и f_2 — однородные многочлены от $x_1, \ldots, x_n$ степени 0, 1 и 2 соответственно (так что f_0 — константа, f_1 — линейная форма, а f_2 — квадратичная форма от $x_1, \ldots, x_n$). Так как

$$f(tx) = f_0 + tf_1(x) + t^2 f_2(x),$$

то многочлен f тогда и только тогда обладает свойством (13), когда $f_0 = 0$ и

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0. \tag{16}$$

Но если многочлен f_1 не равен тождественно нулю и, значит, существует такой вектор x_0, что $f_1(x_0) f_2(x_0) \neq 0$ (мы предполагаем, что степень многочлена f равна двум, т. е. что форма f_2 не равна тождественно нулю), то при

$$t_0 = -\frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)}$$

будет иметь место равенство

$$f(t_0 x_0) = t_0 [f_1(x_0) + t_0 f_2(x_0)] = 0,$$

а, значит, в силу свойства (12), примененного к вектору $x = t_0 x_0$ и элементу $t = t_0^{-1}$ (элемент t определен, так как по условию $t_0 \neq 0$), и равенство $f(x_0) = 0$. Поэтому в силу (16)

$$f_1(x_0) = 0, \quad f_2(x_0) = 0,$$

что противоречит выбору вектора x_0. Следовательно, $f_1 = 0$, и, значит, многочлен $f = f_2$ однороден. □

Определение 7. Гиперповерхности, задаваемые уравнениями (11), в которых f — многочлен второй степени, называются *гиперповерхностями второго порядка* аффинного пространства $\mathcal{A}$ или, короче, — *аффинными гиперквадриками.*

Уравнение каждой аффинной гиперквадрики имеет, следовательно, вид

$$A(x) + 2\alpha(x) + a_{00} = 0, \tag{17}$$

где A — некоторый (отличный от нуля) квадратичный функционал:

$$A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

α — некоторый линейный функционал:

$$\alpha(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{i0} x_i$$

и a_{00} — некоторая константа. [Здесь x — радиус-вектор произвольной точки гиперквадрики, а $x_1, \ldots, x_n$ — его координаты (в некоторой системе $Oe_1 \ldots e_n$ аффинных координат). В соответствии с принятыми в первом семестре обозначениями вместо индекса 0 надо было бы писать индекс $n+1$, но по чисто типографским соображениям мы предпочли сменить обозначения.]

Согласно замечанию 1 *гиперквадрика* (16) *тогда и только тогда является конусом* (*обобщенным*) *с вершиной в начале координат, когда* $a_{00} = 0$ *и* $\alpha = 0$, *т. е. когда ее уравнение имеет вид*

$$A(x) = 0. \tag{18}$$

Переместив начало координат O в точку O', мы для каждой точки M пространства $\mathcal{A}$ получим новый радиус-вектор $x' = \overrightarrow{O'M}$, связанный с прежним радиус-век-

тором $x = \overrightarrow{OM}$ соотношением

$$x = x' + x_0,$$

где $x_0 = \overrightarrow{OO'}$. Поэтому уравнение (17) заменится уравнением

$$A(x' + x_0) + 2\alpha(x' + x_0') + a_{00} = 0,$$

т. е. поскольку $A(x' + x_0) = A(x') + 2A(x', x_0) + A(x_0) = A(x') + 2\alpha_0(x') + A(x_0)$, где α_0 — ассоциированный ковектор $x \mapsto A(x, x_0)$, — уравнением

$$A'(x) + 2\alpha'(x) + a_{00}' = 0$$

(мы убираем штрих в обозначении вектора x'), где

$$\begin{aligned} &A' = A, \\ (19)\qquad &\alpha' = \alpha_0 + \alpha, \\ &a_{00}' = A(x_0) + 2\alpha(x_0) + a_{00}. \end{aligned}$$

Определение 8. Точка с радиус-вектором x_0 называется *центром* гиперквадрики (17), если

$$\alpha_0 + \alpha = 0,$$

т. е. если для любого $i = 1, \ldots, n$

$$(20)\qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} + a_{i0} = 0,$$

где $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ — координаты вектора x_0.

[Заметим, что априори центр может зависеть от выбора уравнения (17).]

В частности, начало координат тогда и только тогда является центром гиперквадрики, когда ее уравнение имеет вид

$$(21)\qquad A(x) + a_{00} = 0.$$

Сравнив уравнения (18) и (21), мы немедленно получим, что *гиперквадрика* (17) *тогда и только тогда является обобщенным конусом, когда она обладает центром, ей принадлежащим.* При этом все центры такой гиперквадрики ей принадлежат (и являются не чем иным, как ее вершинами).

Соотношения (20) представляют собой систему n уравнений от n неизвестных $x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Если эта система имеет единственное решение, т. е. если существует

единственный центр, то гиперквадрика (17) называется *центральной*, а в противном случае — *нецентральной*.

Таким образом, *гиперквадрики* (17), *являющиеся конусами*, — *это в точности центральные гиперквадрики, центр которых им принадлежит*.

Конусы, являющиеся гиперквадриками, называются также *конусами второго порядка*.

Определителем системы (20) является определитель

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицы функционала A. Поэтому, если $\delta \neq 0$, то по правилу Крамера система (20) имеет единственное решение. Если же $\delta = 0$, то ранг r матрицы системы (17), т. е. ранг функционала A, меньше n. Поэтому (теорема Кронекера — Капелли) это система либо несовместна (центров нет), что имеет место, когда ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

равен $r+1$, либо определяет в пространстве $\mathscr{A}$ плоскость (*плоскость центров*) размерности $n-r$, когда ранг последней матрицы равен r.

Таким образом, *гиперквадрика* (17) *тогда и только тогда центральна, когда* $\delta \neq 0$, *т. е. когда ранг функционала* $\mathscr{A}$ *равен* n.

Если гиперквадрика (17) обладает хотя бы одним центром, то, поместив начало координат в этот центр, мы получим для нее уравнение вида (21). Если $a_{00} \neq 0$, то, разделив уравнение (21) на $-a_{00}$, мы получим уравнение вида $A(\boldsymbol{x}) = 1$. Этим доказано, что *каждая гиперквадрика, имеющая центр, может быть задана уравнением вида*

$$A(\boldsymbol{x}) = \varepsilon, \tag{22}$$

где $\varepsilon = 0, 1$.

При этом легко видеть, что *гиперквадрика* (22) *тогда и только тогда нецентральна* (ранг r функционала A меньше n), *когда она является цилиндром* (*кратности* $\geqslant 1$). Действительно (мы фактически повторяем доказательство предложения 1), если гиперквадрика (22) является цилиндром кратности $\geqslant 1$, то без ограничения общности можно считать, что координатный вектор $\boldsymbol{e}_n$

принадлежит ее оси $\mathscr{P}$. Тогда квадратичная форма $A(x_1, \ldots, x_n)$, выражающая в координатах функционал A, будет обладать тем свойством, что если записать ее в виде

$$A(x_1, \ldots, x_n) = ax_n^2 + b(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n + A_0(x_1, \ldots, x_n),$$

где a — константа, $b(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — линейная форма от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, а $A_0(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — квадратичная форма от $x_1, \ldots, x_{n-1}$, то для любой точки $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$ гиперквадрики (22) тождественно по x_n будет иметь место равенство

$$ax_n^2 + b(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})x_n + A_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) = 0.$$

В частности, отсюда следует, что $a = 0$, т. е. что

$$A(x_1, \ldots, x_n) = b(x_1, \ldots, x_{n-1})x_n + A_0(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Если линейная форма $b(x_1, \ldots, x_{n-1})$ не равна тождественно нулю, то в поле $\mathbb{K}$ существуют такие элементы $x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}$, что $b(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) \neq 0$. Тогда точка с координатами $(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$, где

$$x_n^{(0)} = -\frac{\varepsilon - A_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})}{b(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})},$$

будет принадлежать гиперквадрике (22) и, значит, тождественно по x_n будет иметь место равенство

$$b(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)})x_n + A_0(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) = 0,$$

что при $b(x_1^{(0)}, \ldots, x_{n-1}^{(0)}) \neq 0$ невозможно. Следовательно, $b = 0$, т. е.

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A_0(x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Это означает, что $r \leqslant n-1$, т. е. что гиперквадрика (22) нецентральна.

Обратно, из теоремы Лагранжа непосредственно следует, что при соответствующем выборе векторов базиса уравнение гиперквадрики (22) приобретает вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 = \varepsilon, \tag{23}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \neq 0$, а $\varepsilon = 0, 1$. Поэтому при $r \leqslant n-1$ эта гиперквадрика является цилиндром. □

Поскольку свойство быть цилиндром аффинно инвариантно (не зависит ни от выбора системы координат,

ни уравнения гиперквадрики), из доказанного предложения непосредственно вытекает, что *свойство гиперквадрики обладать единственным центром аффинно инвариантно* и, значит, *центр центральной гиперквадрики определен корректно* (не зависит ни от выбора системы координат, ни уравнения гиперквадрики).

Заметим, что по ходу дела мы также доказали, что *для любой гиперквадрики, обладающей центром, существует система аффинных координат, в которой ее уравнение имеет вид* (23).

В частности, *для любой центральной гиперквадрики существует система аффинных координат, в которой уравнение гиперквадрики имеет вид*

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2 = \varepsilon, \tag{24}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \neq 0$, *а* $\varepsilon = 0, 1$.

При $\varepsilon = 0$ гиперквадрика (24) является конусом второго порядка. При $\varepsilon = 1$ гиперквадрика (24) называется *невырожденной центральной гиперквадрикой.*

Кроме того, поскольку гиперквадрика (24) является цилиндром кратности 0 (и, значит, гиперквадрика (23) — цилиндром кратности, $n - r$), мы получаем, что *любая гиперквадрика* (17), *обладающая центром, является* $n - r$*-кратным* $(1 \leqslant r \leqslant n)$ *цилиндром над центральной гиперквадрикой* r*-мерного аффинного пространства.*

Замечание 2. Для гиперквадрики, являющейся цилиндром над центральной гиперквадрикой, вместо оси $\mathscr{P}$ обычно рассматривают параллельную ей плоскость пространства A, проходящую через центр основания. Иногда ее называют *точечной осью* гиперквадрики.