

Лекция 13а

Гиперквадрики, не имеющие центра. — Перечисление аффинных гиперквадрик. — Гиперквадрики в комплексном пространстве. — Гиперквадрики в вещественно-комплексном пространстве. — Плоскости, содержащиеся в гиперквадрике. — Оценка их размерности. — Степень планарности центральных гиперквадрик. — Степень пла-нарности параболоидов.

Продолжим изучение аффинных гиперквадрик

$$(1) \quad A(\mathbf{x}) + 2\alpha(\mathbf{x}) + a_{00} = 0$$

аффинного n -мерного пространства \mathcal{A} .

Согласно теореме Лагранжа в ассоциированном ли-нейале \mathcal{U} существует базис e_1, \dots, e_n , в котором функционал A выражается формулой

$$(2) \quad A(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2, \text{ где } \lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0.$$

Поэтому для любых векторов

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \text{ и } \mathbf{x}_0 = x_1^{(0)} e_1 + \dots + x_n^{(0)} e_n$$

будет иметь место равенство

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = \lambda_1 x_1^{(0)} x_1 + \dots + \lambda_r x_r^{(0)} x_r,$$

означающее, что в сопряженном (базису e_1, \dots, e_n) ба-зисе e^1, \dots, e^n пространства \mathcal{U}' ассоциированный ковек-тор $\alpha_0: \mathbf{x} \mapsto A(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$ имеет координаты

$$\lambda_1 x_1^{(0)}, \dots, \lambda_r x_r^{(0)}, 0, \dots, 0.$$

Этим доказано, что ковектор $\alpha_0 = a_1 e^1 + \dots + a_n e^n$ тогда и только тогда ассоциирован с функционалом A , когда $a_i = 0$ при $i > r$, т. е. когда ковектор α_0 линейно выражается через ковекторы e^1, \dots, e^r .

Таким образом, в частности, если гиперквадрика (1) центра не имеет (и, значит, ковектор α не ассоциирован с функционалом A), то любой базис e_1, \dots, e_n про странства \mathcal{U} , в котором для функционала A имеет место формула (2), обладает тем свойством, что ковектор α не выра жается линейно через ковекторы e^1, \dots, e^r , и потому, не меняя ковекторов e^1, \dots, e^r (и, значит, оставляя прежним вид (2) функционала A), этот базис можно преобразовать в базис, для которого $\alpha = -e^{r+1}$. Этим до казано, что для любой гиперквадрики (1), не имеющей

центров, существует базис e_1, \dots, e_n пространства \mathcal{V} , в котором функционал A имеет вид (2), а ковектор a выражается формулой $a_0 = -e^{r+1}$ (и, значит, $a(x) = -x_{r+1}$ для любого вектора $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ пространства \mathcal{V}).

В таком базисе при любом начале координат O уравнение (1) приобретает вид

$$(3) \quad \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 - 2x_{r+1} + a_{00} = 0.$$

Сдвинув начало координат O в точку с координатами

$$\underbrace{\{0, \dots, 0,}_{r \text{ раз}} \underbrace{a_{00}/2, 0, \dots, 0\}}_{n-r-1 \text{ раз}},$$

мы, очевидно (см. последнюю из формул (19) лекции 13), получим уравнение вида (3) с $a_{00} = 0$.

Таким образом, для любой гиперквадрики, не имеющей центра, существует система аффинных координат, в которой ее уравнение имеет вид

$$\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = 2x_{r+1},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$.

Вместе с результатами предыдущей лекции это доказывает следующую теорему:

Теорема 1 (о приведении к нормальному виду уравнений аффинных гиперквадрик над произвольным полем K). Для любой гиперквадрики n -мерного аффинного пространства над полем K , $\text{char } K \neq 2$, существует система аффинных координат, в которой ее уравнение имеет либо вид

$$(I) \quad \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = \varepsilon,$$

где $1 \leq r \leq n$ и $\varepsilon = 0$ или 1 , либо (что возможно только при $n > 1$) вид

$$(II) \quad \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_r x_r^2 = 2x_{r+1},$$

где $1 \leq r \leq n-1$, причем в обоих случаях $\lambda_1, \dots, \lambda_r \neq 0$. \square

При $r = n$ и $\varepsilon = 1$ гиперквадрика (I) является невырожденной центральной гиперквадрикой, а при $\varepsilon = 0$ — конусом второго порядка. При $r < n$ гиперквадрика (I) является $n-r$ -кратным цилиндром, основанием которого при $\varepsilon = 1$ является невырожденная центральная гиперквадрика в r -мерном пространстве, а при $\varepsilon = 0$ — конус.

При $r = n - 1$ гиперквадрика (II) называется *параболоидом*. Она имеет уравнение вида

$$(4) \quad \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1}^2 = 2x_n,$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1} \neq 0$.

Легко видеть, что *никакой параболоид не является цилиндром (кратности ≥ 1)*. Действительно, утверждение, что параболоид (4) является цилиндром, означает, что существует такой вектор $a \neq 0$, что вектор x тогда и только тогда удовлетворяет уравнению (4), когда этому уравнению удовлетворяет каждый вектор вида $x + ta$, т. е. когда тождественно по t имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2 + 2t \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i x_i + t^2 \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i^2 = 2(x_n + ta_n),$$

где x_1, \dots, x_n — координаты вектора x , а a_1, \dots, a_n — координаты вектора a . Поскольку же вектор x удовлетворяет уравнению (4), т. е.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i^2 = 2x_n,$$

это равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$(5) \quad \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i x_i = a_n \text{ и } \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i^2 = 0.$$

Второе из этих соотношений показывает, что точка с радиус-вектором $x = (a_1, \dots, a_{n-1}, 0)$ принадлежит параболоиду (4), откуда в силу первого соотношения следует, что

$$(6) \quad a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i a_i^2 = 0.$$

Поскольку $a \neq 0$, отсюда вытекает, что хотя бы одна из остальных координат a_1, \dots, a_{n-1} вектора a не равна нулю. Предположив для определенности, что $a_1 \neq 0$, рассмотрим точку с радиус-вектором $x = (1, 0, \dots, 0, \lambda_1/2)$. Эта точка принадлежит параболоиду (4) и потому ее координаты удовлетворяют первому из соотношений (5). Следовательно,

$$\lambda a_1 = a_n,$$

что при $\lambda_1 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$ противоречит (6).

Полученное противоречие доказывает, что вектор α существовать не может. \square

Отсюда следует, что каждая гиперквадрика (II) является цилиндром кратности $n - r - 1$ над параболоидом в $r + 1$ -мерном пространстве.

Все это означает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 2 (о перечислении аффинных гиперквадрик над произвольным полем K). Каждая гиперквадрика в n -мерном аффинном пространстве над полем K , $\text{char } K \neq 2$, принадлежит одному из следующих четырех классов:

- а) невырожденные центральные гиперквадрики;
- б) конусы второго порядка;
- в) параболоиды (при $n > 1$);
- г) цилиндры кратности k , $1 \leq k \leq n - 1$, над гиперквадриками типов а) — в) в $n - k$ -мерном аффинном пространстве.

При этом гиперквадрики различных классов аффинно не эквивалентны.

Последнее утверждение вытекает из того, что

- 1) только гиперквадрики а) и б) центральны;
- 2) только гиперквадрики б) являются конусами;
- 3) только гиперквадрики в) и г) не центральны;
- 4) только гиперквадрики г) являются цилиндрами. \square

Как и в случае проективного пространства, при $K = \mathbb{C}$ или \mathbb{R} (в ситуациях (\mathbb{C}, \mathbb{R})) можно получить более точный результат. Например, при $K = \mathbb{C}$ в каждом из уравнений (I) и (II) можно преобразованием координат сделать все коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ равными единице. Поэтому при $K = \mathbb{C}$ в каждом из классов а), б) и в) теоремы 2, имеется, с точностью до аффинной эквивалентности, лишь одна гиперквадрика. Это означает, что справедлива следующая теорема:

Теорема 3 (о классификации аффинных гиперквадрик над полем \mathbb{C}). В комплексном n -мерном аффинном пространстве при $n = 1$ имеется только две аффинно не эквивалентные гиперквадрики: невырожденная центральная гиперквадрика, состоящая из двух различных точек, и конус второго порядка, представляющий собой две совпадающие точки, а при $n > 1$ — три аффинно не эквивалентные гиперквадрики, не являющиеся цилиндрами: невырожденная гиперквадрика, конус второго порядка и параболоид.

Остальные гиперквадрики в n -мерном ($n > 1$) аффинном пространстве являются k -кратными ($1 \leq k \leq n - 1$) цилиндрами над указанными тремя (при $k = n - 1$ двумя) гиперквадриками в $n - k$ -мерном аффинном пространстве. \square

Невырожденная гиперквадрика и конус второго порядка являются центральными гиперквадриками и имеют уравнение вида

$$(7) \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = a,$$

где $a = 0$ для конуса и $a \neq 0$ для невырожденной центральной гиперквадрики (нам теперь удобно не требовать, чтобы в последнем случае имело место равенство $a = 1$).

Напомним (см. лекцию I.20), что точка O является центром симметрии гиперповерхности Φ с уравнением $f(x) = 0$, если $f(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $f(-x) = 0$. Поэтому любой центр гиперквадрики является ее центром симметрии.

Оказывается, что для центральных гиперквадрик в ситуации \mathbb{C} — т. е. для гиперквадрик вида (7) — верно и обратное, т. е. что любая такая гиперквадрика имеет единственный центр симметрии (совпадающий с ее центром O). Действительно, при $n = 1$ эта гиперквадрика состоит из двух (возможно, совпадающих) точек $\pm\sqrt{a}$ и в этом случае утверждение очевидно верно. Применяя принцип математической индукции, предположим, что оно уже доказано для гиперквадрик вида (7) в $n - 1$ -мерном пространстве, где $n > 1$. Пусть $A(a_1, \dots, a_n)$ — произвольный центр симметрии гиперквадрики (7) и пусть Π — гиперплоскость $x_n = a_n$. Гиперквадрика (7) высекает на гиперплоскости Π гиперквадрику

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = a - a_n^2,$$

также имеющую точку A (принадлежащую по построению гиперплоскости Π) своим центром симметрии. Следовательно, по предположению индукции $a_1 = 0, \dots, a_{n-1} = 0$. Рассмотрев гиперплоскость $x_1 = a_1$, мы аналогично покажем, что $a_2 = \dots = a_n = 0$. Поскольку $n > 1$, это доказывает, что $a_1 = \dots = a_n = 0$, т. е. что $A = O$. \square

Доказанное утверждение означает, что при $K = \mathbb{C}$ центр любой центральной гиперквадрики однозначно характеризуется как ее центр симметрии.

При $K = \mathbb{R}$ (в ситуации (\mathbb{C}, \mathbb{R})) уравнение (I) можно привести к виду

$$(I) \quad x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = e,$$

где $e = -1, 0$ или 1 и $1 \leq r \leq n$, а уравнение (II) — к виду

$$(II) \quad x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2 = 2x_{r+1},$$

где $1 \leq r \leq n-1$, причем за счет умножения на -1 (и изменения знака у координаты x_{r+1}) можно без ограничения общности в обоих случаях считать, что

$$(8) \quad 0 \leq p \leq \frac{r}{2}$$

(а в случае (I) при $p = \frac{r}{2}$ — и, значит, при r четном — еще, кроме того, что $e \neq -1$). При $r = n$ гиперквадрика (I), как мы знаем, центральна. При $e \neq 0$ и $p = 0$ центральная гиперквадрика называется *мнимым эллипсоидом*, если $e = 1$, и *действительным*, если $e = -1$. При $n = 2$ это мнимый и действительный эллизы, а при $n = 1$ — пары мнимых или действительных точек.

При $e = 0$ центральная гиперквадрика (I) является конусом второго порядка. При $p = 0$ конус второго порядка содержит только одну вещественную точку и на этом основании обычно называется *мнимым конусом*.

При $e \neq 0$ и $1 \leq p \leq n/2$ центральная гиперквадрика (I) называется *e-гиперболоидом индекса р*.

При $n = 2$ существует только один гиперболоид — гипербола и два конуса — пары мнимых и действительных пересекающихся прямых. При $n = 1$ гиперболоидов нет, а конус существует только один — пара совпадающих точек.

Центром (а потому и центром симметрии) центральной гиперквадрики (I) является точка O . Поскольку эта квадрика является также центральной гиперквадрикой над полем \mathbb{C} , то других центров симметрии у нее нет. Таким образом, *и в ситуации (\mathbb{C}, \mathbb{R}) центр любой центральной гиперквадрики геометрически характеризуется как ее единственный центр симметрии*.

При $r < n$ гиперквадрики (I) являются цилиндрами кратности $n-r$ над центральными гиперквадриками r -мерного пространства.

При $r = n - 1$ гиперквадрика (II) является параболоидом. Если $p = 0$, то этот параболоид называется *эллиптическим* (при $n = 2$ — это парабола), а если $1 \leq p \leq n$, то *гиперболическим параболоидом индекса p* .

При $r < n - 1$ гиперквадрика (II) представляет собой цилиндр кратности $n - r - 1$ над параболоидом $r + 1$ -мерного пространства.

Так же, как и в вещественно-комплексном проективном пространстве, гиперквадрика в вещественно-комплексном аффинном пространстве называется *s-планарной*, если она не содержит ни одной вещественной $s + 1$ -мерной плоскости, но через любую ее вещественную точку проходит хотя бы одна вещественная s -мерная плоскость, целиком принадлежащая гиперквадрике.

Ниже мы докажем следующие два предложения:

Предложение 1. Каждая центральная гиперквадрика

$$(9) \quad x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2 = \varepsilon, \quad 0 \leq p \leq n/2, \\ s\text{-планарна, где}$$

$$s = \begin{cases} p - 1, & \text{если } \varepsilon = 1, \\ p, & \text{если } \varepsilon = 0 \text{ или } -1 \end{cases}$$

(при n четном и $p = n/2$ предполагается, что $\varepsilon \neq -1$).

Предложение 2. Каждый параболоид

$$(10) \quad x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{n-1}^2 = 2x_n$$

p-планарен.

Замечание 1. Пусть \mathcal{V} — произвольное $n + 1$ -мерное линейное пространство. Тогда в соответствующем проективном пространстве уравнение

$$X_0^2 + \dots + X_p^2 - X_{p+1}^2 - \dots - X_n^2 = 0$$

задает невырожденную гиперквадрику Φ индекса p , а в пространстве \mathcal{V} (рассматриваемом как аффинное $n + 1$ -мерное пространство с началом отсчета O) — конус $\Phi_{\text{афф}}$ индекса $p + 1$, причем точками гиперквадрики Φ являются, как раз образующие конуса $\Phi_{\text{афф}}$. Следовательно, все одномерные подпространства каждого $s + 1$ -мерного подпространства пространства \mathcal{V} , целиком содержащегося в конусе $\Phi_{\text{афф}}$, будут составлять s -мерную плоскость пространства $P(\mathcal{V})$, целиком содержащуюся в Φ , и обратно. Значит, гиперквадрика Φ тогда и только

тогда s -планарна, когда $s+1$ -планарен конус $\Phi_{\text{афф}}$. Поэтому предложение 2 лекции 13 является непосредственным следствием предложения 1 (при $\varepsilon = 0$).

Согласно теореме 6 лекции 12 ни один эллипсоид или гиперболоид аффинно не эквивалентен параболоиду, конусу или цилинду. Аналогично, ни один параболоид аффинно не эквивалентен конусу или цилинду и ни один конус аффинно не эквивалентен цилинду.

С другой стороны, поскольку свойство быть r -планарной гиперквадрикой, очевидно, аффинно инвариантно, из предложения 2 следует, что при разных r параболоиды (10) аффинно не эквивалентны, а из предложения 1 — что при разных r аффинно не эквивалентны конусы, а также ε -гиперболоиды с одним и тем же ε . Действительный и мнимый эллипсоиды очевидным образом аффинно не эквивалентны и не эквивалентны ни одному ε -гиперболоиду, за возможным исключением 1-гиперболоида при $r = 1$ (т. е. 0-планарного). Но среди сечений последнего гиперболоида двумерными плоскостями имеются гиперболоиды, что неверно для эллипса. Поэтому эллипсоид и 0-планарный 1-гиперболоид также аффинно не эквивалентны.

Таким образом, все формально различные гиперквадрики (9) и (10) аффинно не эквивалентны, за возможным исключением ± 1 — гиперболоидов s -планарных для одного и того же $s \geq 1$, т. е. гиперболоидов вида

$$(11) \quad x_1^2 + \dots + x_{s+1}^2 - x_{s+2}^2 - \dots - x_n^2 = 1$$

и

$$(12) \quad x_1^2 + \dots + x_s^2 - x_{s+1}^2 - \dots - x_n^2 = -1,$$

где в первом случае $s+1 \leq n/2$, т. е. $s \leq n/2 - 1$, а во втором, $s < n/2$.

Предложение 3. Гиперболоиды (11) и (12) аффинно не эквивалентны.

Мы докажем это предложение в следующей лекции.

Мы видим, таким образом, что справедлива следующая теорема:

Теорема 4 (о классификации аффинных гиперквадрик в ситуации (\mathbb{G}, \mathbb{R})). В вещественно-комплексном n -мерном аффинном пространстве имеются только следующие аффинно не эквивалентные гиперквадрики, не являющиеся цилиндрами:

а) два эллипсоида (мнимый и действительный);

б) один s -планарный 1-гиперболоид для любого $s = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}] - 1$;

в) один s -планарный -1 -гиперболоид для любого $s = 1, \dots, m$, где $m = \frac{n}{2} - 1$, если n четно, и $m = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно;

г) один p -планарный конус второго порядка для любого $p = 0, 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ (при $p=0$ это мнимый конус);

д) один p -планарный параболоид для любого $p = 0, \dots, [\frac{n}{2}]$ (при $p=0$ — это эллиптический параболоид, а при $p = 1, \dots, [\frac{n}{2}]$ — гиперболические параболоиды).

Все остальные гиперквадрики n -мерного пространства являются k -кратными цилиндрами ($1 \leq k \leq n-1$) над перечисленными гиперквадриками $n-k$ -мерного пространства. \square

При $n = 2$ мы получаем таким образом девять линий второго порядка (см. теорему 1 лекции I. 22):

а) два эллипса (мнимый и действительный);

б) и в) одну гиперболу (при $n = 2$ линии класса в) отсутствуют;

г) две пары различных пересекающихся прямых (действительных и мнимых комплексно сопряженных);

д) одну паработу

и три пары параллельных прямых (действительных различных или совпадающих и комплексно сопряженных различных),

а при $n = 3$ — семнадцать поверхностей второго порядка (см. лекцию I. 24):

а) два эллипсоида (мнимый и действительный);

б) один двуполостный гиперболоид;

в) один однополостный гиперболоид (обладающий прямолинейными образующими, т. е. 1-планарный);

г) два конуса (мнимый и действительный);

д) два параболоида (эллиптический и гиперболический); и девять цилиндров над плоскими линиями (два эллиптических, один гиперболический, один параболический и пять, являющихся парами плоскостей).

Для доказательства предложений 1 и 2 нам понадобятся некоторые предварительные рассмотрения.

Пусть $Oe_1 \dots e_n$ — аффинная координатная система, в которой уравнение данной центральной гиперквадрики имеет вид (9), и пусть $\mathcal{V}^{(+)}$ — подпространство ассоциированного линеала \mathcal{V} , порожденное векторами e_1, \dots, e_p , а $\mathcal{V}^{(-)}$ — дополнительное подпространство, порожденное векторами e_{p+1}, \dots, e_n . Тогда

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(+)} \oplus \mathcal{V}^{(-)},$$

т. е. каждый вектор $x \in \mathcal{V}$ единственным образом представляется в виде

$$x = x^{(+)} + x^{(-)}, \quad \text{где } x^{(+)} \in \mathcal{V}^{(+)}, x^{(-)} \in \mathcal{V}^{(-)}.$$

Именно, если $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, то

$$x^{(+)} = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p \text{ и } x^{(-)} = x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_n e_n.$$

Мы положим

$$(x^{(+)})^2 = x_1^2 + \dots + x_p^2, \quad (x^{(-)})^2 = x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2.$$

Это равносильно тому (см. лекцию I. 12), что мы вводим в пространства $\mathcal{V}^{(+)}$ и $\mathcal{V}^{(-)}$ скалярные умножения (евклидовы структуры), по отношению к которым базисы e_1, \dots, e_p и e_{p+1}, \dots, e_n этих пространств ортонормированы. [Не нужно искать в этих умножениях глубокий геометрический смысл; они вводятся *ad hoc* в основном лишь с целью сокращения записи алгебраических вычислений.]

Заметим, что вместо базиса e_1, \dots, e_n мы можем рассматривать любой другой базис пространства \mathcal{V} , обладающий тем свойством, что его первые p векторов составляют ортонормированный базис евклидова пространства $\mathcal{V}^{(+)}$, а остальные $n-p$ векторов — ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}^{(-)}$, поскольку в таком базисе уравнение рассматриваемой гиперквадрики сохранит прежний вид (9). Этой свободой в выборе базиса мы будем в дальнейшем неоднократно пользоваться.

Как мы знаем, радиус-векторы точек произвольной плоскости Π аффинного пространства \mathcal{A} выражаются формулой

$$(13) \quad x = x_0 + a,$$

где x_0 — радиус-вектор некоторой фиксированной точки плоскости Π , а a — произвольный вектор соответствующего линейного подпространства \mathcal{P} пространства \mathcal{V} (т. е. принадлежат линейному многообразию $x_0 + \mathcal{P}$; см. лекцию 8).

В соответствии с разложением $\gamma = \gamma^{(+)} \oplus \gamma^{(-)}$ мы будем формулу (13) записывать в виде двух формул:

$$(14) \quad x^{(+)} = x_0^{(+)} + a^{(+)}, \quad x^{(-)} = x_0^{(-)} + a^{(-)},$$

где $x_0^{(+)}, a^{(+)} \in \gamma^{(+)}$ и $x_0^{(-)}, a^{(-)} \in \gamma^{(-)}$.

В введенных обозначениях уравнение (9) имеет вид

$$(15) \quad (x^{(+)})^2 - (x^{(-)})^2 = e,$$

и, значит, точка (13) тогда и только тогда содержится в гиперквадрике (9), когда

$$(x_0^{(+)} + a^{(+)})^2 - (x_0^{(-)} + a^{(-)})^2 = e,$$

т. е. когда

$$(16) \quad (x_0^{(+)})^2 - (x_0^{(-)})^2 + 2(x_0^{(+)}a^{(+)} - x_0^{(-)}a^{(-)}) + (a^{(+)})^2 - (a^{(-)})^2 = e.$$

В случае, когда точка x_0 принадлежит гиперквадрике (9), и, значит,

$$(17) \quad (x_0^{(+)})^2 - (x_0^{(-)})^2 = e,$$

это условие сводится к равенству

$$(18) \quad 2(x_0^{(+)}a^{(+)} - x_0^{(-)}a^{(-)}) + (a^{(+)})^2 - (a^{(-)})^2 = 0.$$

Таким образом, плоскость Π тогда и только тогда содержится в гиперквадрике (9), когда для любого вектора $a \in \mathcal{P}$ имеет место равенство (18).

Но если это равенство имеет место для любого вектора $a \in \mathcal{P}$, то оно, в частности, имеет место и для любого вектора вида ta , где $a \in \mathcal{P}$ и $t \in \mathbb{R}$. С другой стороны, подставив в (18) ta вместо a и сократив на t , мы получим соотношение

$$2(x_0^{(+)}a^{(+)} - x_0^{(-)}a^{(-)}) + t((a^{(+)})^2 - (a^{(-)})^2) = 0,$$

которое имеет место для всех t тогда и только тогда, когда

$$(19) \quad x_0^{(+)}a^{(+)} = x_0^{(-)}a^{(-)}.$$

и

$$(20) \quad (a^{(+)})^2 = (a^{(-)})^2.$$

Этим доказано, что плоскость Π тогда и только тогда содержится в гиперквадрике (9), когда для любого век-

тора $a \in \mathcal{P}$ имеют место равенства (19) и (20) (а для вектора x_0 — равенство (17)).

Векторы $a^{(+)} \in \mathcal{V}^{(+)}$ (векторы $a^{(-)} \in \mathcal{V}^{(-)}$), отвечающие всевозможным векторам $a \in \mathcal{P}$, составляют, очевидно, подпространство пространства $\mathcal{V}^{(+)}$ (пространства $\mathcal{V}^{(-)}$). Мы будем обозначать это подпространство символом $\mathcal{P}^{(+)}$ (соответственно — символом $\mathcal{P}^{(-)}$). Ясно, что

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^{(+)} \oplus \mathcal{P}^{(-)}.$$

Подчеркнем, что равенства здесь, вообще говоря, нет, поскольку для данного вектора $a' \in \mathcal{P}^{(+)}$ отнюдь не все векторы $a'' \in \mathcal{P}^{(-)}$ обладают тем свойством, что $a' + a'' \in \mathcal{P}$. Более того, если для подпространства \mathcal{P} выполнено условие (20), то для каждого вектора $a' \in \mathcal{P}^{(+)}$ существует лишь единственный вектор $a'' \in \mathcal{P}^{(-)}$, обладающий тем свойством, что $a' + a'' \in \mathcal{P}$, т. е. существует единственный вектор $a \in \mathcal{P}$, для которого $a^{(+)} = a'$. Таким образом, при выполнении условия (20) соответствия $a \mapsto a^{(+)}$ и $a \mapsto a^{(-)}$ определяют изоморфизмы $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{(+)}$ и $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}^{(-)}$.

Пусть m — размерность $\dim \mathcal{P}^{(+)}$ подпространства $\mathcal{P}^{(+)}$ (а значит, и подпространства \mathcal{P}). Так как $\mathcal{P}^{(+)} \subset \mathcal{V}^{(+)}$, то $0 \leq m \leq p$. Поскольку $\dim \Pi = \dim \mathcal{P}$, этим доказано, что в гиперквадрике (9) могут содержаться лишь плоскости размерности $\leq p$, т. е., что если эта гиперквадрика *s*-планарна, то $s \leq p$.

Кроме того, пользуясь отмеченной выше свободой в выборе базиса e_1, \dots, e_n , мы без ограничения общности можем считать, что первые m векторов e_1, \dots, e_m этого базиса составляют ортонормированный базис пространства $\mathcal{P}^{(+)}$.

Имея это в виду и выбрав для любого $i = 1, \dots, m$ такой вектор $a_i \in \mathcal{P}$, что $a_i^{(+)} = e_i$, рассмотрим векторы $a_1^{(-)}, \dots, a_m^{(-)}$. Так как по предположению условие (20) выполнено для всех векторов $a \in \mathcal{P}$, то, в частности, оно выполнено для каждого вектора a_i , $i = 1, \dots, m$, и, значит,

$$(a_i^{(-)})^2 = (a_i^{(+)})^2 = e_i^2 = 1.$$

Кроме того, так как это условие выполнено также и для каждого вектора $a_i + a_j$, где $i \neq j$, то

$$(a_i^{(-)} + a_j^{(-)})^2 = (a_i^{(+)})^2 + (a_j^{(+)})^2 = (e_i + e_j)^2 = e_i^2 + e_j^2 = 2.$$

С другой стороны, по уже доказанному

$$(a_i^{(-)} + a_j^{(-)})^2 = (a_i^{(-)})^2 + 2a_i^{(-)}a_j^{(-)} + (a_j^{(-)})^2 = 2 + 2a_i^{(-)}a_j^{(-)}.$$

Следовательно, $a_i^{(-)}a_j^{(-)} = 0$ при $i \neq j$.

Таким образом, мы видим, что векторы $a_1^{(-)}, \dots, a_m^{(-)}$ составляют ортонормированное семейство векторов. Дополнив это семейство до ортонормированного базиса пространства $\mathcal{V}^{(-)}$ и приняв этот базис за базис e_{p+1}, \dots, e_n , мы без ограничения общности можем, следовательно, считать, что

$$(21) \quad a_1^{(-)} = e_{p+1}, \dots, a_m^{(-)} = e_{p+m}.$$

При этом, согласно сделанному выше замечанию, отображения $a \mapsto a^{(+)}$ и $a \mapsto a^{(-)}$ являются — при выполнении условия (20) — изоморфизмами. Поэтому векторы (21) составляют базис пространства $\mathcal{P}^{(-)}$, а векторы

$$e_1 + e_{p+1}, \dots, e_m + e_{p+m}$$

— базис пространства \mathcal{P} (причем $(e_1 + e_{p+i})^{(+)} = e_i$ и $(e_i + e_{p+i})^{(-)} = e_{p+i}$ для любого $i = 1, \dots, m$).

Воспользуемся теперь условием (19).

Принимая за a векторы e_i , $i = 1, \dots, m$, мы видим, что при описанном выше специальном выборе базиса e_1, \dots, e_n это условие равносильно равенствам

$$(22) \quad x_i^{(0)} = x_{p+i}^{(0)},$$

которые должны иметь место для любого $i = 1, \dots, m$. (Здесь, как и выше, $x_i^{(0)}$ — координаты $x_0 e_i$ вектора x_0 в ортонормированном базисе e_1, \dots, e_m .)

В частности, при $m = p$ из (22) следует равенство

$$(x_0^{(-)})^2 = (x_0^{(+)})^2 + (x_{2p+1}^{(0)})^2 + \dots + (x_n^{(0)})^2,$$

и, значит, неравенство

$$(x_0^{(+)})^2 - (x_0^{(-)})^2 \leq 0.$$

Ввиду (17) этим доказано, что при $s = 1$ равенство $m = p$ невозможно, т. е. что при $s = 1$ необходимо $s \leq p - 1$.

Теперь мы уже можем доказать предложение 1.

Доказательство предложения 1. В свете полученных оценок нам достаточно доказать, что через

любую точку x_0 гиперквадрики (9) проходит s -мерная плоскость Π , целиком содержащаяся в этой квадрике, где $s = p - 1$, если $e = 1$, и $s = p$ — в противном случае. При этом мы без ограничения общности можем предполагать базис e_1, \dots, e_n выбранным так, что

$$x_0^{(+)} = \lambda e_1, \quad x_0^{(-)} = \mu e_{p+1}, \quad \text{где } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Тогда $(x_0^{(+)})^2 - (x_0^{(-)})^2 = \lambda^2 - \mu^2$, и, значит, — поскольку точка x_0 принадлежит гиперквадрике (9), — числа λ и μ удовлетворяют соотношению

$$\lambda^2 - \mu^2 = e.$$

Пусть сначала $e = 0$ (т. е. гиперквадрика (9) является конусом). Тогда $\lambda = \pm\mu$, и меняя, если надо, знак у вектора e_{p+1} , мы без ограничения общности можем считать, что $\lambda = \mu$. Но тогда подпространство \mathcal{P} , порожденное векторами

$$e_1 + e_{p+1}, \quad e_2 + e_{p+2}, \quad \dots, \quad e_p + e_{2p},$$

удовлетворяет условиям (19) и (20), и потому соответствующая p -мерная плоскость Π целиком содержится в гиперквадрике (9). Таким образом, в этом случае $s = p$, как и утверждалось.

При $e = -1$ (когда $\mu^2 = \lambda^2 + 1$) мы примем за \mathcal{P} подпространство, порожденное векторами

$$\mu e_1 + \lambda e_{p+1} + e_{2p+1}, \quad e_2 + e_{p+2}, \quad \dots, \quad e_p + e_{2p}$$

(вектор e_{2p+1} существует, так как при $e = -1$ по условию $p < n/2$), а при $e = 1$ (когда $\lambda^2 = \mu^2 + 1$) — подпространство, порожденное векторами

$$\mu e_1 + e_p + \lambda e_{p+1}, \quad e_2 + e_{p+2}, \quad \dots, \quad e_{p-1} + e_{2p-1}.$$

В обоих случаях условия (19) и (20), как легко видеть, выполнены и, значит, соответствующая плоскость Π (размерность которой в первом случае равна p , а во втором — равна $p - 1$) содержитя в гиперквадрике (9). Таким образом, $s = p$ при $e = -1$ и $s = p - 1$ при $e = 1$. \square

Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам осталось доказать предложение 2.

Доказательство предложения 2. Найдем предварительно необходимые и достаточные условия того, что m -мерная плоскость Π с направляющим подпространством \mathcal{P} , проходящая через точку x_0 параболоида (10), целиком содержитя в этом параболоиде. По-

ступая как и выше, мы с этой целью разложим линейное пространство \mathcal{V} в прямую сумму

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{(+)} \oplus \mathcal{V}^{(-)} \oplus \mathcal{V}^{(0)}$$

трех евклидовых пространств $\mathcal{V}^{(+)}$, $\mathcal{V}^{(-)}$ и $\mathcal{V}^{(0)}$ с ортонормированными базисами $\{e_1, \dots, e_p\}$, $\{e_{p+1}, \dots, e_{n-1}\}$ и $\{e_n\}$ соответственно. Тем самым каждый вектор $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ пространства \mathcal{V} будет единственным образом представляться в виде суммы

$$x = x^{(+)} + x^{(-)} + x^{(0)},$$

где

$$x^{(+)} = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p,$$

$$x^{(-)} = x_{p+1} e_{p+1} + \dots + x_{n-1} e_{n-1} \text{ и } x^{(0)} = x_n e_n,$$

уравнение (10) будет иметь вид

$$(x^{(+)})^2 - (x^{(-)})^2 = 2x_n,$$

а формула (13) для радиус-векторов точек произвольной плоскости Π распадется на три формулы:

$$x^{(+)} = x_0^{(+)} + a^{(+)}, \quad x^{(-)} = x_0^{(-)} + a^{(-)}, \quad x_n = x_n^{(0)} + a_n,$$

где $x_0^{(+)}, a^{(+)} \in \mathcal{V}^{(+)}$, $x_0^{(-)}, a^{(-)} \in \mathcal{V}^{(-)}$ и $x_n^{(0)}, a_n \in \mathbb{R}$.

Поэтому плоскость Π тогда и только тогда будет содержаться в параболоиде (10), когда для вектора x_0 будет иметь место равенство

$$(23) \quad (x_0^{(+)})^2 - (x_0^{(-)})^2 = 2x_n^{(0)},$$

и для любого вектора a , параллельного плоскости Π (т. е. принадлежащего соответствующему направляющему подпространству \mathcal{P}), — равенство

$$(24) \quad 2(x_0^{(+)}a^{(+)} - x_0^{(-)}a^{(-)}) + ((a^{(+)})^2 - (a^{(-)})^2) = 2a_n.$$

Но так как в этом равенстве при замене вектора a вектором ta первое слагаемое слева умножается на t , второе — на t^2 , а правая часть умножается на t , то (см. выше аналогичное рассуждение в связи с соотношением (18)) соотношение (24) тогда и только тогда выполнено для всех векторов $a \in \mathcal{P}$, когда отдельно

$$(25) \quad x_0^{(+)}a^{(+)} - x_0^{(-)}a^{(-)} = a_n$$

и отдельно

$$(26) \quad (a^{(+)})^2 = (a^{(-)})^2.$$

Таким образом, плоскость Π тогда и только тогда содержитя в параболоиде (10), когда для любого вектора $a \in \mathcal{P}$ имеют место равенства (25) и (26) (а для вектора x_0 — равенство (23)).

Но условие (26) идентично условию (20). Поэтому, по уже доказанному, размерность m плоскости Π не может превышать p , т. е. если параболоид (10) s -планарен, то $s \leq p$.

С другой стороны, для любой точки x_0 параболоида (10) мы, пользуясь свободой в выборе базисов e_1, \dots, e_p и e_{p+1}, \dots, e_n , можем без ограничения общности считать, что $x_0^{(+)} = \lambda e_1$ и $x_0^{(-)} = \mu e_{p+1}$, где

$$\lambda^2 - \mu^2 = 2x_n^{(0)},$$

и $\lambda + \mu \neq 0$ при $x_0 \neq 0$. Тогда тривиальное вычисление показывает, что p -мерное подпространство \mathcal{P} , порожденное векторами

$$e_1 + e_{p+1} + ce_n, \quad e_2 + e_{p+2}, \dots, e_p + e_{2p},$$

где

$$c = \begin{cases} \frac{2x_n^{(0)}}{\lambda + \mu} & \text{при } x_0 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x_0 = 0, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (25) и (26) и, значит, соответствующая p -мерная плоскость Π целиком содержится в параболоиде (10). Поэтому $s = p$. \square

Таким образом, для доказательства теоремы 4 о классификации гиперкуадрик нам осталось лишь доказать предложение 3. Мы сделаем это в следующей лекции.