Лекция 15

Матрица линейного оператора. — Переход к другому базису. — След оператора. — Сопряженный оператор. — Невырожденные операторы. — Изометрии и их матрицы.

Пусть снова $\boldsymbol{A}$ — произвольный оператор в линейном пространстве $\mathscr{V}$.

Если в пространстве $\mathscr{V}$ выбран некоторый базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то для любого вектора $\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{e}_n$ будет иметь место равенство

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x^1\boldsymbol{a}_1 + \ldots + x^n\boldsymbol{a}_n, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$. Обратно, для любого семейства векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ формула (1) однозначно определяет некоторый, — очевидно, линейный — оператор $\boldsymbol{A}$, для которого $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$. Таким образом, при фиксированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *операторы* $\boldsymbol{A} \in \operatorname{End}\mathscr{V}$ *находятся в биективном соответствии с n-членными семействами векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$.

Каждому такому семейству отвечает квадратная матрица, столбцы которой состоят из координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ в том же базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1^1 & \ldots & a_n^1 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ a_1^n & \ldots & a_n^n \end{Vmatrix}.$$

Поскольку это, очевидно, устанавливает биективное соответствие между матрицами и семействами $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ векторов, мы получаем тем самым биективное соответствие между операторами и квадратными матрицами порядка n.

По определению матрица $A = \|a_i^j\|$, отвечающая оператору $\boldsymbol{A}$, состоит из координат векторов $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, так что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j\boldsymbol{e}_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Определение 1. Матрица A называется *матрицей оператора* $\boldsymbol{A}$ *в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Легко видеть, что *сумме операторов отвечает сумма матриц, а произведению операторов — произведение матриц*. Действительно, сумма матриц $A = \|a_i^j\|$ и $B = \|b_i^j\|$

имеет элементы $a_i^j + b_i^j$, а произведение — элементы $a_j^k b_i^j$. С другой стороны, если $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = a_i^j \boldsymbol{e}_j$ и $\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i = b_i^j \boldsymbol{e}_j$, то

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i + \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i = a_i^j \boldsymbol{e}_j + b_i^j \boldsymbol{e}_j = (a_i^j + b_i^j)\,\boldsymbol{e}_j$$

и

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}\,(b_i^j \boldsymbol{e}_j) = b_i^j\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j) = b_i^j\,(a_j^k \boldsymbol{e}_k) = a_j^k b_i^j \boldsymbol{e}_k. \quad \square$$

Это означает, что соответствие «оператор» $\Rightarrow$ «его матрица» является изоморфизмом алгебры операторов $\mathrm{End}\,\mathcal{V}$ на алгебру $\mathrm{Mat}_n \mathbb{K}$ квадратных матриц порядка n с элементами из поля $\mathbb{K}$.

Подчеркнем, что этот изоморфизм зависит от выбора базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$.

Ясно, что матрица оператора $\boldsymbol{A}$ скалярна (т. е. имеет вид $k\boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{E}$ — единичная матрица и $k \in \mathbb{K}$) тогда и только тогда, когда скалярен оператор $\boldsymbol{A}$.

По теореме о ранге матрицы ранг матрицы A равен рангу семейства ее столбцов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, т. е. размерности их линейной оболочки $[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n]$. С другой стороны, ясно, что эта линейная оболочка является не чем иным, как образом $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$ оператора $\boldsymbol{A}$, и, значит, ее размерность — рангом этого оператора. Таким образом, *ранг* $\mathrm{rk}\,\boldsymbol{A}$ *оператора равен рангу* r *его матрицы.*

Если оператор $\boldsymbol{A}$ является идемпотентом (= проектором), то в пространстве $\mathcal{V}$ существует такой базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (а именно базис, для которого векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_r$ составляют базис пространства $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$, а векторы $\boldsymbol{e}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис пространства $\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$), что в этом базисе матрица оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид

$$\begin{Vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где E_r — единичная матрица порядка r. И обратно, любой оператор с матрицей такого вида идемпотентен.

Для инволютивных операторов отсюда непосредственно следует, что *оператор* $\boldsymbol{A}$ *тогда и только тогда инволютивен, когда в некотором базисе он имеет матрицу вида*

$$\begin{Vmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{Vmatrix}.$$

Для любых $i, j = 1, \ldots, n$ мы будем символом E_j^i обозначать квадратную матрицу порядка n, все элементы которой равны нулю за исключением одного, равного 1 и находящегося на пересечении i-го столбца и

j-й строки. Для каждой матрицы $A = \|a_i^j\|$ имеет место формула

$$A = a_i^j E_j^i$$

(напомним, что по i и j производится суммирование от 1 до n), показывающая, что *матрицы E_j^i составляют базис линейного пространства матриц* $\mathrm{Mat}_n \mathbb{K}$.

Соответствующий матрице E_j^i линейный оператор $\boldsymbol{E}_j^i$ характеризуется тем, что все векторы базиса $e_1, \ldots, e_n$ он переводит в нуль, за исключением вектора e_i, переходящего в вектор e_j. Поэтому

$$\boldsymbol{E}_l^k \boldsymbol{E}_j^i = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k \neq j, \\ \boldsymbol{E}_l^i, & \text{если} \quad k = j. \end{cases}$$

При этом *операторы $\boldsymbol{E}_j^i$ составляют базис пространства* $\mathrm{End}\,\mathscr{V}$ *и*

$$\boldsymbol{A} = a_i^j \boldsymbol{E}_j^i$$

для любого линейного оператора $\boldsymbol{A}\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}$.

В частности, мы видим, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_j^i = a_j^k \boldsymbol{E}_k^i \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E}_j^i \boldsymbol{A} = a_k^i \boldsymbol{E}_j^k,$$

и, значит, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_j^i = \boldsymbol{E}_j^i \boldsymbol{A}$ тогда и только тогда, когда $a_i^i = a_j^j$ и $a_k^l = 0$ при $k = j$, $l \neq j$ и при $l = i$, $k \neq i$ (суммирование по i и j не производится!). Поэтому оператор $\boldsymbol{A}$ тогда и только тогда перестановочен со всеми линейными операторами (и, в частности, со всеми операторами вида $\boldsymbol{E}_j^i$), когда $a_i^j = 0$ при $i \neq j$ и $a_i^i = a_j^j$ для любых i и j, т. е. когда этот оператор скалярен. (См. стр. 245.)

Если $e^1, \ldots, e^n$ — сопряженный базис пространства $\mathscr{V}'$, то, как мы знаем, $e^j(\boldsymbol{x}) = x^j$ для любого вектора $\boldsymbol{x} = x^i e_i$. Применительно к вектору $\boldsymbol{A}e_i$ это дает, что *элементы a_i^j матрицы A оператора $\boldsymbol{A}$ выражаются формулой*

$$a_i^j = e^j(\boldsymbol{A}e_i), \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

В частности, мы видим, что матрица A совпадает с матрицей смешанного билинейного функционала $\boldsymbol{x}, \xi \mapsto \xi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})$, отвечающего оператору $\boldsymbol{A}$.

Поэтому *след оператора $\boldsymbol{A}$ равен следу его матрицы*:

$$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{tr}\,A.$$

Кроме того, согласно формуле (14) лекции 5, матрица $A' = \|a_{i'}^{j'}\|$ оператора $\boldsymbol{A}$ в любом другом базисе $e_{1'}, \ldots, e_{n'}$ выражается формулой

$$A' = C^{-1}AC, \tag{3}$$

где $C = \|c_{i'}^{i}\|$ — матрица перехода.

Впрочем, формула (3) без труда устанавливается и непосредственным вычислением: так как $e_{i'} = c_{i'}^{i} e_i$ и $e_j = c_j^{j'} e_{j'}$, то $a_{i'}^{j'} e_{j'} = \boldsymbol{A} e_{i'} = c_{i'}^{i} \boldsymbol{A} e_i = c_{i'}^{i} a_i^j e_j = c_{i'}^{i} a_i^j c_j^{j'} e_{j'}$, а это равносильно (3). Конечно, это вычисление фактически является повторением выкладки из лекции 5.

Чтобы провести то же вычисление в матричных обозначениях, введем в рассмотрение векторные матрицы-строки

$$e = (e_1, \ldots, e_n), \qquad e' = (e_{1'}, \ldots, e_{n'}),$$
$$\boldsymbol{A}e = (\boldsymbol{A}e_1, \ldots, \boldsymbol{A}e_n), \quad \boldsymbol{A}e' = (\boldsymbol{A}e_{1'}, \ldots, \boldsymbol{A}e_{n'}).$$

Тогда (ср. с формулой (14) лекции I.10)

$$e' = eC, \qquad e = e'C^{-1},$$
$$\boldsymbol{A}e = eA, \quad \boldsymbol{A}e' = e'A'.$$

С другой стороны, в силу линейности

$$\boldsymbol{A}e' = \boldsymbol{A}(eC) = (\boldsymbol{A}e)C.$$

Следовательно,

$$e'A' = \boldsymbol{A}e' = (\boldsymbol{A}e)C = eAC = e'C^{-1}AC,$$

и, значит, $A' = C^{-1}AC$. □

Поскольку следы матриц A и A', совпадая со следом оператора $\boldsymbol{A}$, одинаковы, отсюда, в частности, следует, что

$$\operatorname{Tr} C^{-1}AC = \operatorname{Tr} A \tag{4}$$

для любых матриц A и C (конечно, при условии, что матрица C невырождена).

Заменив в (4) матрицу A матрицей AB и обозначив матрицу C через A, мы получим соотношение

$$\operatorname{Tr} BA = \operatorname{Tr} AB, \tag{5}$$

которое тем самым доказано в предположении, что матрица A невырождена.

Однако легко видеть, что *соотношение* (5) *справедливо для любых матриц A и B*. Проще всего это доказы-

вается прямым вычислением: если $A = \|a_i^j\|$ и $B = \|b_j^k\|$, то $AB = \|a_i^j b_j^k\|$ и $BA = \|b_j^k a_k^i\|$. Поэтому

$$\operatorname{Tr} BA = b_i^k a_k^i = a_k^i b_i^k = \operatorname{Tr} AB. \quad \square$$

Конечно, аналогичное равенство

$$\operatorname{Tr} \boldsymbol{BA} = \operatorname{Tr} \boldsymbol{AB} \tag{6}$$

имеет место и для операторов.

Каждый линейный оператор $\boldsymbol{A}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ позволяет сопоставить произвольному ковектору $\xi \in \mathscr{V}'$ функционал $\boldsymbol{A}'\xi$ на $\mathscr{V}$, определенный формулой

$$(\boldsymbol{A}'\xi)(x) = \xi(\boldsymbol{A}x), \quad x \in \mathscr{V}. \tag{7}$$

Автоматическая проверка показывает, что

а) функционал $\boldsymbol{A}'\xi$ линеен, т. е. является ковектором из $\mathscr{V}'$;

б) возникающее отображение $\boldsymbol{A}': \mathscr{V}' \to \mathscr{V}'$ линейно, т. е. $\boldsymbol{A}'$ представляет собой линейный оператор.

Определение 2. Оператор $\boldsymbol{A}'$ называется оператором, *сопряженным* с оператором $\boldsymbol{A}$.

Если ввести естественное спаривание $\langle x, \xi \rangle = \xi(x)$ между пространствами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ (см. лекцию 4), то формула (7), определяющая сопряженный оператор $\boldsymbol{A}'$, приобретет вид

$$\langle x, \boldsymbol{A}'\xi \rangle = \langle \boldsymbol{A}x, \xi \rangle.$$

Из симметричности этой формулы немедленно вытекает, что отображение $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}'$ пространства $\operatorname{End} \mathscr{V}$ в пространство $\operatorname{End} \mathscr{V}'$ и н в о л ю т и в н о, т. е.

$$\boldsymbol{A}'' = \boldsymbol{A}.$$

В частности, отсюда следует, что отображение $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}'$ биективно.

Более того, ясно, что

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}' \quad \text{и} \quad (k\boldsymbol{A})' = k\boldsymbol{A}'.$$

Это означает, что *отображение* $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}'$ *является изоморфизмом линеала* $\operatorname{End} \mathscr{V}$ *на линеал* $\operatorname{End} \mathscr{V}'$.

Таким образом, между линеалами $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ нет естественного изоморфизма, а между линеалами $\operatorname{End} \mathscr{V}$ и $\operatorname{End} \mathscr{V}'$ такой изоморфизм есть!

В отношении умножения отображение $\boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A}'$ изоморфизмом не является, поскольку порядок сомножи-

телей оно меняет:

$$(AB)' = B'A'.$$

[Действительно, $\langle x, (AB)'\xi\rangle = \langle ABx, \xi\rangle = \langle Bx, A'\xi\rangle = \langle x, B'A'\xi\rangle$.] Обладающий этим свойством линейный изоморфизм алгебр называется обычно антиизоморфизмом.

Формула (2) для элементов матрицы оператора A в базисе $e_1, \ldots, e_n$ означает, что

$$a_i^j = \langle Ae_i, e^j\rangle.$$

Поэтому для элементов $a_i'^j$ матрицы сопряженного оператора A' в сопряженном базисе $e^1, \ldots, e^n$ мы имеем

$$a_i'^j = \langle e_i, A'e^j\rangle = \langle Ae_i, e^j\rangle,$$

и потому $a_i'^j = a_i^j$, т. е. $Ae^j = a_i^j e^i$. Однако отсюда не следует, что матрицы операторов A и A' совпадают. Действительно, по определению столбцами матрицы оператора являются координаты векторов, получающихся применением оператора к векторам базиса. Для оператора A это означает (в силу формулы $Ae_i = a_i^j e_j$), что i-й столбец его матрицы состоит из чисел $a_i^1, \ldots, a_i^n$. Что же касается оператора A', то формула $A'e^j = a_i^j e^i$ означает, что j-й столбец его матрицы состоит из чисел $a_1^j, \ldots, a_n^j$, т. е. из тех же чисел, что и j-я строка матрицы оператора A. Таким образом, *матрицей сопряженного оператора A' в сопряженном базисе $e^1, \ldots, e^n$ является матрица $A^\top$, получающаяся транспонированием матрицы A оператора A в базисе $e_1, \ldots, e_n$.*

Сравним теперь ядра и образы операторов A и A'.

Предложение 1. *Имеют место равенства*

$$\operatorname{Ker} A' = (\operatorname{Im} A)^\circ, \quad \operatorname{Im} A' = (\operatorname{Ker} A)^\circ,$$

$$\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A')^\circ, \quad \operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A')^\circ.$$

Доказательство. Включение $\xi \in \operatorname{Ker} A'$ равносильно тому, что для любого вектора $x \in \mathscr{V}$ имеет место равенство $(A'\xi)(x) = 0$, т. е. равенство $\xi(Ax) = 0$, характеризующее ковекторы из $(\operatorname{Im} A)^\circ$. Следовательно, $\operatorname{Ker} A' = (\operatorname{Im} A)^\circ$. Заменяя здесь A на A', получаем, что $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A')^\circ$, а переходя к аннуляторам (и пользуясь предложением 5 лекции 4) — что $(\operatorname{Ker} A')^\circ = \operatorname{Im} A$ и $(\operatorname{Ker} A)^\circ = \operatorname{Im} A'$. □

В частности, мы видим, что *либо* $\operatorname{Im} \boldsymbol{A} = \mathscr{V}$, *либо* $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A}' \neq 0$. Это утверждение известно как альтернатива Фредгольма.

Ясно, что если оператор $\boldsymbol{P}$ идемпотентен, то оператор $\boldsymbol{P}'$ также идемпотентен. При этом, как непосредственно вытекает из предложения 1, *если* $\boldsymbol{P}$ — *проектор на* $\mathscr{P}$ *вдоль* $\mathscr{Q}$, *то* $\boldsymbol{P}'$ — *проектор на* $\mathscr{Q}^\circ$ *вдоль* $\mathscr{P}^\circ$.

Важный класс операторов составляют операторы $\boldsymbol{A}$, для которых $\operatorname{def} \boldsymbol{A} = 0$. Они характеризуются тем, что в любом базисе их матрица невырождена. На этом основании они называются *невырожденными операторами*.

Значение невырожденных операторов определяется тем, что они совпадают с *обратимыми операторами*, т. е. с операторами $\boldsymbol{A}$, для которых существует *обратный оператор* $\boldsymbol{A}^{-1}$, удовлетворяющий соотношениям

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Фактически это непосредственно вытекает из правила Крамера для решения систем неоднородных линейных уравнений, но мы предпочтем дать здесь независимое доказательство, четче выявляющее геометрические основания этого совпадения.

Линейный оператор $\boldsymbol{A}$ называется *обратимым слева*, если существует такой линейный оператор $\boldsymbol{B}$, что

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E},$$

и *обратимым справа*, если существует такой линейный оператор $\boldsymbol{C}$, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}.$$

В произвольных кольцах (или алгебрах) существуют обратимые элементы, которые обратимы только справа или только слева. Для линейных операторов же дело обстоит совсем по-другому: оператор обратим, если он обратим хотя бы слева или справа. Это тесно связано с тем (поистине удивительным) фактом, что линейный оператор биективен, если он всего лишь инъективен или надъективен. (Заметим кстати, что хотя обратимый оператор, очевидно, биективен, но утверждение, что любой биективный линейный оператор обратим, т. е. что обратный оператор линеен, требует доказательства.)

Предложение 2. *Для любого линейного оператора* $\boldsymbol{A}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ *следующие утверждения равносильны:*

1° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *обратим слева.*

2° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *инъективен, т. е.* $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$.

3° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *обратим справа.*

4° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *надъективен, т. е.* $\operatorname{Im} \boldsymbol{A} = \mathscr{V}$.

5° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *обратим.*

6° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *биективен.*

7° *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *невырожден.*

8° *Для каждого базиса* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *пространства* $\mathscr{V}$ *векторы* $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ *также составляют базис.*

Доказательство. Равносильность утверждений 7° и 8° немедленно следует из совпадения ранга оператора с рангом его матрицы. Поэтому нам надо доказать лишь равносильность утверждений 1° — 6° и 8°. Мы сделаем это, доказав следующую диаграмму импликаций:

$$\begin{tikzcd}
 & 1^\circ \arrow[r, Rightarrow] & 2^\circ \arrow[dl, Rightarrow] \\
5^\circ \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & 8^\circ \arrow[ll, Rightarrow] \\
 & 3^\circ \arrow[r, Rightarrow] & 4^\circ \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Импликация $5^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Если $\boldsymbol{A}^{-1}$ — обратный оператор, то $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$.

Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Если $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$.

Импликация $2^\circ \Rightarrow 8^\circ$. Если векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ линейно зависимы, т. е. $k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{0}$, где $(k_1, \ldots, k_n) \neq (0, \ldots, 0)$, то для вектора $\boldsymbol{e} = k_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + k_n\boldsymbol{e}_n \neq \boldsymbol{0}$ будет иметь место равенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}$. Следовательно, если $\operatorname{Ker} \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, то векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ линейно независимы и потому составляют базис.

Импликация $5^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Если $\boldsymbol{A}^{-1}$ — обратный оператор, то $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$.

Импликация $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Если $\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{E}$, то $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$, где $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$.

Импликация $4^\circ \Rightarrow 8^\circ$. Если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ существует такой вектор $\boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{x} = y^1\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1 + \ldots + y^n\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$. Это доказывает, что семейство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$, состоящее из n векторов, полно. Следовательно, оно является базисом.

Импликация $8^\circ \Rightarrow 5^\circ$. В базисе $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ семейство векторов $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{e}_n$ определяет оператор $\boldsymbol{B}$, для которого $\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{B}\boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{b}_n$ и, значит $(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1, \ldots, (\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})\boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n$, т. е. $\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$. Для этого же оператора $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{e}'_1, \ldots, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})\boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{e}'_n$

и, значит, $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}$. Следовательно, оператор $\boldsymbol{A}$ обратим (и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$). □

Заметим, что согласно утверждению 8° *любой невырожденный оператор* $\boldsymbol{A}$ *является оператором, действующим по равенству координат в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *и* $\boldsymbol{e}'_1 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$.

Поскольку произведение $\boldsymbol{AB}$ обратимых операторов также, очевидно, обратимо, *множество* $\mathrm{Aut}\,\mathscr{V}$ *всех обратимых операторов* $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ *является по умножению группой.*

Соответствие

$$\text{оператор} \Rightarrow \text{его матрица}$$

является при этом изоморфизмом группы $\mathrm{Aut}\,\mathscr{V}$ на группу $\mathrm{GL}(n; \mathbb{K})$ всех невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{K}$.

В случае, когда в $\mathscr{V}$ введено скалярное умножение, символ $\mathrm{Aut}\,\mathscr{V}$ обыкновенно используется для обозначения множества всех операторов $\boldsymbol{A}$: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$, являющихся *изометриями*, т. е. (см. лекцию 5) удовлетворяющих для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ соотношению

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

(такие операторы называются также *изометрическими* операторами). Множество же всех обратимых операторов на $\mathscr{V}$ обозначается в этом случае каким-нибудь другим символом, например $\mathrm{Aut}_{\text{лин}}\,\mathscr{V}$. Поскольку произведение двух изометрий и отображение, обратное к изометрии, также, очевидно, являются изометриями, *множество* $\mathrm{Aut}\,\mathscr{V}$ *всех изометричных операторов* $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ *является подгруппой группы* $\mathrm{Aut}_{\text{лин}}\,\mathscr{V}$.

Пусть G — матрица метрических коэффициентов $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ некоторого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$.

Предложение 3. *Линейный обратимый оператор* $\boldsymbol{A}$: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ *тогда и только тогда изометричен, когда его матрица* A *в базисе* $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ *удовлетворяет соотношению*

$$A^{\mathsf{T}} G A = G. \tag{8}$$

Доказательство. Если $A = \|a_i^j\|$ — матрица изометрии $\boldsymbol{A}$, то

$$g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j) = (\boldsymbol{Ae}_i, \boldsymbol{Ae}_j) = (a_i^p \boldsymbol{e}_p, a_j^q \boldsymbol{e}_q) = \\ = a_i^p a_j^q (\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q) = g_{pq} a_i^p a_j^q,$$

что в точности равносильно (8). Обратно, если (8) выполнено, т. е. если $g_{ij} = g_{pq} a_i^p a_j^q$, то

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (x^i \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, y^j \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_j) = (x^i a_i^p \boldsymbol{e}_p, y^j a_j^q \boldsymbol{e}_q) =$$
$$= x^i a_i^p y^j a_j^q (\boldsymbol{e}_p, \boldsymbol{e}_q) = g_{pq} a_i^p a_j^q x^i y^j =$$
$$= g_{ij} x^i y^j = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

для любых векторов $\boldsymbol{x} = x^i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{y} = y^j \boldsymbol{e}_j$, и, значит, оператор $\boldsymbol{A}$ является изометрией. □

Если скалярное умножение в пространстве $\mathscr{V}$ невырождено и, значит, $\det G \neq 0$, то, переходя в равенстве (8) к определителям и сокращая на $\det G$, мы немедленно получим, что $(\det A)^2 = 1$, т. е. что

$$\det A = \pm 1. \tag{9}$$

В частности, отсюда следует, что *любая матрица* A, *удовлетворяющая условию* (8), *невырождена*. Это означает, что в определении изометрических операторов условие обратимости может быть опущено (напомним: в предположении, что скалярное умножение невырождено).

Все невырожденные матрицы, удовлетворяющие условию (8), образуют группу, изоморфную группе $\operatorname{Aut}\mathscr{V}$. Эта группа обозначается символом $O_G(n)$, а ее подгруппа, состоящая из унимодулярных матриц, символом $SO_G(n)$.

Для любого изометрического оператора $\boldsymbol{A}$ и любого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ векторы $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$ образуют базис, матрица метрических коэффициентов которого совпадает с матрицей G метрических коэффициентов $g_{ij} = (\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$. Обратно, если $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$ — базис, для которого $(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_j) = g_{ij}$ и $\boldsymbol{A}$ — оператор, действующий по равенству координат в базисах $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}'_1, \ldots, \boldsymbol{e}'_n$, то

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (x^i \boldsymbol{e}_i, y^j \boldsymbol{e}_j) = g_{ij} x^i y^j$$

и

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (x^i \boldsymbol{e}'_i, y^j \boldsymbol{e}'_j) = g_{ij} x^i y^j$$

для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, т. е. оператор $\boldsymbol{A}$ изометричен. Поскольку матрица оператора $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ является не чем иным, как матрицей перехода от базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ к базису $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_n$, этим доказано, что *матрицы из* $O_G(n)$ — *это в точности матрицы перехода*,

связывающие базисы, в которых метрический тензор имеет матрицу G.

Например, если $G = E$, т. е. пространство $\mathscr{V}$ евклидово, а базисы $e_1, \ldots, e_n$ и $e'_1, \ldots, e'_n$ ортонормированы, то матрицы из $O_E(n)$ — это ортогональные матрицы (см. лекцию I.13). Таким образом, $O_E(n) = O(n)$.

На этом основании матрицы из $O_G(n)$ называются обычно *G-ортогональными матрицами.*

В случае

$$G = \begin{Vmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{Vmatrix}$$

(и $n = p + q$) мы получаем псевдоортогональные матрицы, а в случае

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & E_m \\ E_m & 0 \end{Vmatrix}$$

(н $n = 2m$) — симплектические матрицы (обратим внимание, что в последнем случае $SO_G(n) = O_G(n)$). Таким образом, *изометрические операторы евклидова (псевдоевклидова или симплектического) пространства задаются в ортонормированных (соответственно, в псевдоортонормированных и симплектических) базисах ортогональными (соответственно, псевдоортогональными и симплектическими) матрицами.*

На этом основании изометрические операторы на евклидовом (псевдоевклидовом или симплектическом) пространстве называются обычно *ортогональными* (соответственно, *псевдоортогональными* или *симплектическими*) *операторами.*