

Лекция 16

Инвариантные подпространства. — Собственные векторы. — Характеристический многочлен и характеристические корни. — Алгебраическая кратность собственного значения. — Теорема о прямой сумме. — Диагонализируемые операторы. — Операторы с простым спектром.

Определение 1. Подпространство \mathcal{P} пространства \mathcal{V} называется *инвариантным* относительно оператора $A: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, если

$$Ax \in \mathcal{P} \text{ для любого вектора } x \in \mathcal{P}.$$

В этом случае определен оператор

$$A|_{\mathcal{P}} \in \text{End } \mathcal{P},$$

действующий по формуле

$$(A|_{\mathcal{P}})x = Ax, \quad x \in \mathcal{P},$$

где справа вектор Ax рассматривается как элемент подпространства \mathcal{P} .

Оператор $A|_{\mathcal{P}}$ называется *ограничением* оператора A на инвариантном подпространстве \mathcal{P} . Говорят также, что он *индукцирован* оператором A .

Легко видеть, что *если подпространство \mathcal{P} инвариантно относительно оператора A , то*

$$(1) \quad PAP = AP$$

для каждого проектора P на \mathcal{P} . Действительно, так как \mathcal{P} инвариантно и $\mathcal{P} = \text{Im } P$, то для любого вектора $x \in \mathcal{V}$ вектор $y = APx$ принадлежит \mathcal{P} . Но тогда $Py = y$, что и означает справедливость соотношения (1). \square

Обратно, если соотношение (1) выполнено хотя бы для одного проектора P на \mathcal{P} , то подпространство \mathcal{P} инвариантно относительно оператора A . Действительно, если $x \in \mathcal{P}$, т. е. $x = Px$, то вектор $Ax = APx = P(APx)$ принадлежит \mathcal{P} , и, значит, подпространство \mathcal{P} инвариантно. \square

Поскольку $\dim \mathcal{P} < \dim \mathcal{V}$ (при $\mathcal{P} \neq \mathcal{V}$), оператор $A|_{\mathcal{P}}$ легче оператора A поддается изучению. Вместе с тем, изучив его, мы часто можем получить достаточно много информации и о самом операторе A .

Особенно удовлетворительно дело обстоит в случае (к сожалению, имеющем место не всегда), когда существует второе инвариантное подпространство Q , дополнительное к подпространству \mathcal{P} , т. е. когда пространство \mathcal{V} является прямой суммой $\mathcal{V} = \mathcal{P} \oplus Q$ инвариантных подпространств \mathcal{P} и Q . В этом случае оператор A полностью восстанавливается по операторам $A|_{\mathcal{P}}$ и $A|_Q$. Действительно, для любого вектора $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ пространства \mathcal{V} , где $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{y} \in Q$, мы, очевидно, имеем

$$A\mathbf{z} = (A|_{\mathcal{P}})\mathbf{x} + (A|_Q)\mathbf{y}.$$

Говорят, что пара (\mathcal{P}, Q) взаимно дополнительных инвариантных подпространств *приводит* оператор A .

Легко видеть, что *пара* (\mathcal{P}, Q) *тогда и только тогда приводит оператор* A , *когда проектор* P *на* \mathcal{P} *вдоль* Q *перестановочен с оператором* A :

$$(2) \quad PA = AP.$$

Действительно, если (2) выполнено, то

$$PAP = PPA = PA$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} - P)A(\mathbf{E} - P) &= A - PA - AP + PAP = \\ &= A - AP = (\mathbf{E} - P)A. \end{aligned}$$

Поэтому оба подпространства $\mathcal{P} = \text{Im } P$ и $Q = \text{Ker } P$ инвариантны относительно A .

Обратно, если подпространства \mathcal{P} и Q инвариантны относительно A , то

$$PAP = PA$$

и

$$(\mathbf{E} - P)A(\mathbf{E} - P) = (\mathbf{E} - P)A,$$

т. е.

$$PAP = AP.$$

Поэтому

$$PA = PAP = AP. \quad \square$$

Полная сводимость оператора A к операторам $A|_{\mathcal{P}}$ и $A|_Q$ наглядно видна на матрице $A = [a_i^j]$ оператора A в таком базисе e_1, \dots, e_n пространства \mathcal{V} , что $\mathcal{P} = [e_1, \dots, e_p]$ и $Q = [e_{p+1}, \dots, e_n]$. Действительно, так как $Ae_i = a_i^j e_j \in \mathcal{P}$ при $1 \leq i \leq p$, то

$$a_i^j = 0, \text{ если } 1 \leq i \leq p \text{ и } p + 1 \leq j \leq n.$$

Аналогично, так как $Ae_i \in Q$ при $p+1 \leq i \leq n$, то

$$a_i^j = 0, \text{ если } p+1 \leq i \leq n \text{ и } 1 \leq j \leq p.$$

Это означает, что матрица A в базисе e_1, \dots, e_n имеет **блочно-диагональный вид**:

$$(3) \quad A = \begin{vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{vmatrix},$$

где A_1 — матрица оператора $A|_{\mathcal{P}}$ в базисе e_1, \dots, e_p , а A_2 — матрица оператора $A|_Q$ в базисе e_{p+1}, \dots, e_n .

О матрице A вида (3) говорят, что она **разложена в прямую сумму матриц A_1 и A_2** (и пишут $A = A_1 \oplus A_2$). Таким образом, каждое разложение пространства \mathcal{V} в прямую сумму инвариантных подпространств определяет разложение матрицы оператора в прямую сумму матриц индуцированных операторов.

В случае, когда инвариантное подпространство \mathcal{P} инвариантного дополнения Q не имеет (или мы его не знаем), мы можем представить матрицу A (выбрав базис e_1, \dots, e_n так, чтобы $\mathcal{P} = [e_1, \dots, e_p]$) в **блочно-треугольном виде**:

$$(4) \quad A = \begin{vmatrix} A_1 & C \\ 0 & B \end{vmatrix},$$

где A_1 — матрица оператора $A|_{\mathcal{P}}$.

Из того, что подпространство \mathcal{P} инвариантно относительно оператора A , непосредственно вытекает, что формула

$$\mathbf{B}(\mathbf{x} + \mathcal{P}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathcal{P}$$

корректно определяет на факторпространстве \mathcal{V}/\mathcal{P} некоторый (очевидно, линейный) оператор

$$\mathbf{B} : \mathcal{V}/\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{P}.$$

Об операторе \mathbf{B} также говорят, что он **индуцирован** оператором A .

Если базис e_1, \dots, e_n пространства \mathcal{V} выбран так, что $\mathcal{P} = [e_1, \dots, e_p]$, то смежные классы $e_{p+1} + \mathcal{P}, \dots, e_n + \mathcal{P}$ будут составлять, очевидно, базис факторпространства \mathcal{V}/\mathcal{P} и в этом базисе матрицей оператора \mathbf{B} будет матрица B из (4).

Простейшими инвариантными подпространствами являются одномерные подпространства.

Определение 2. Вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором* оператора A , если он порождает одномерное инвариантное подпространство.

Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда существует такой элемент $\lambda \in K$, что

$$(5) \quad Ax = \lambda x.$$

Каждый элемент $\lambda \in K$, для которого существует вектор $x \neq 0$, удовлетворяющий соотношению (5) (и, значит, являющийся собственным вектором оператора A), называется *собственным значением* оператора A . О собственном векторе x , для которого — при данном λ — имеет место (5), говорят, что он *принадлежит* собственному значению λ .

Удобно считать, что каждому собственному значению λ принадлежит также и нулевой вектор 0 (не являющийся, по определению, собственным вектором). Тогда для любого собственного значения λ множество \mathcal{P}_λ всех принадлежащих ему векторов $x \in \mathcal{V}$ будет, очевидно, подпространством. Оно называется *собственным подпространством, принадлежащим собственному значению λ* . Его размерность $p_\lambda = \dim \mathcal{P}_\lambda$ называется *геометрической кратностью* собственного значения λ . По определению $1 \leq p_\lambda \leq n$.

Для любого собственного вектора $x \neq 0$, принадлежащего собственному значению λ , одномерное инвариантное подпространство $[x]$, им порожденное, целиком лежит в \mathcal{P}_λ . Обратно, каждое одномерное подпространство пространства \mathcal{P}_λ инвариантно, и потому, в частности, пространство \mathcal{P}_λ разлагается в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств. Чтобы получить такое разложение, достаточно выбрать в \mathcal{P}_λ произвольный базис.

Геометрически подпространство \mathcal{P}_λ можно охарактеризовать как максимальное инвариантное подпространство, на котором оператор A (точнее, его ограничение $A|_{\mathcal{P}_\lambda}$) является скалярным оператором λE . Можно также сказать, что \mathcal{P}_λ представляет собой ядро оператора $A - \lambda E$:

$$\mathcal{P}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E).$$

Действительно, равенство $(A - \lambda E)x = 0$ в точности равносильно равенству (5). \square

Мы видим, таким образом, что число $\lambda \in K$ тогда и только тогда является собственным значением оператора A , когда оператор $A - \lambda E$ имеет ненулевое ядро, т. е. вырожден; см. предложение 3 лекции 15. Иными словами, λ тогда и только тогда является собственным значением, когда

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

где A — матрица оператора A в произвольном базисе e_1, \dots, e_n .

Определитель

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$

является, как легко видеть, многочленом степени n от λ . Этот многочлен не зависит от выбора базиса e_1, \dots, e_n . Действительно, в любом другом базисе матрица оператора A будет иметь вид $C^{-1}AC$ (см. формулу (3) лекции 15), а

$$C^{-1}AC - \lambda E = C^{-1}(A - \lambda E)C,$$

и потому

$$\begin{aligned} \det(C^{-1}AC - \lambda E) &= (\det C)^{-1} \det(A - \lambda E) (\det C) = \\ &= \det(A - \lambda E). \quad \square \end{aligned}$$

Определение 3. Многочлен

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$$

называется *характеристическим многочленом* оператора A (или матрицы A), а его корни (в соответствующем расширении поля K) — *характеристическими корнями* оператора A (матрицы A).

В частности, мы видим, что от выбора базиса не зависит свободный член $\det A$ многочлена $f_A(\lambda)$. Он называется *определителем* оператора A и обозначается символом $\det A$.

Так как $f_A(\lambda) = (-\lambda)^n + \dots + \det A$, то согласно формуле Виета определитель $\det A$ равен произведению всех характеристических корней оператора A :

$$\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n.$$

Коэффициент при $(-\lambda)^{n-1}$ в характеристическом многочлене — т. е., согласно формуле Виета, сумма его кор-

ней — совпадает, очевидно, с коэффициентом при $(-\lambda)^{n-1}$ в произведении всех диагональных элементов матрицы $A - \lambda E$. Поэтому он равен следу $\text{Tr } A = a_1^1 + \dots + a_n^n$ оператора A . Таким образом, след $\text{Tr } A$ оператора A равен сумме его характеристических корней:

$$\text{Tr } A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

Замечание 1. Если оператор A является изометрическим оператором в пространстве с невырожденным скалярным произведением (и, значит, $A^\top G A = G$, где $\det G \neq 0$), то

$$f_A(\lambda) = \varepsilon \lambda^n f_A\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где $\varepsilon = \pm 1$ (при $\varepsilon = 1$ многочлены, удовлетворяющие этому условию, — это известные *возвратные многочлены*). Действительно, так как $\det A = \pm 1$ и $A = G^{-1}(A^\top)^{-1}G$, то

$$\begin{aligned} \det|A - \lambda E| &= \det|G^{-1}(A^\top)^{-1}G - \lambda E| = \\ &= \det|G^{-1}(A^\top)^{-1}(E - \lambda A^\top)G| = \\ &= \det G^{-1} \det(A^\top)^{-1} \det|E - \lambda A^\top| \det G = \\ &= \pm \det|E - \lambda A^\top| = \pm \det|E - \lambda A| = \\ &= \pm (-\lambda)^n \det\left|A - \frac{1}{\lambda}E\right|. \quad \square \end{aligned}$$

(Заметим, что при $\det A = 1$ и n четном — например для симплектических матриц — получается $\varepsilon = 1$, т. е. обычный возвратный многочлен.) Для характеристических корней отсюда следует, что вместе с числом λ корнем будет и число $\frac{1}{\lambda}$, а в случае основного поля \mathbb{R} — также и числа $\bar{\lambda}$ и $\frac{1}{\bar{\lambda}}$. Таким образом, для вещественных (псевдо)ортогональных и симплектических матриц характеристические корни появляются четверками, симметричными относительно вещественной оси (преобразование $\lambda \mapsto \bar{\lambda}$) и единичной окружности (преобразование $\lambda \mapsto \frac{1}{\bar{\lambda}}$). Конечно, вещественные характеристические корни или корни, расположенные на единичной окружности, появляются лишь парами.

Согласно сказанному выше любое собственное значение оператора A является его характеристическим кор-

нем и, обратно, любой характеристический корень, принадлежащий полю K , является собственным значением.

Практический способ нахождения собственных пространств основывается на этом утверждении (и на том, что $\mathcal{P}_\lambda = \text{Ker}(A - \lambda E)$). Сначала, решая уравнение $f_A(\lambda) = 0$, мы находим все его корни, лежащие в K , а затем для каждого такого корня λ_0 находим подпространство \mathcal{P}_{λ_0} , решая систему однородных линейных уравнений с матрицей $A - \lambda_0 E$.

Кратность собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена, т. е. такое число n_{λ_0} , что многочлен $f_A(\lambda)$ делится на $(\lambda - \lambda_0)^{n_{\lambda_0}}$, но не делится на $(\lambda - \lambda_0)^{n_{\lambda_0}+1}$, называется алгебраической кратностью собственного значения λ_0 .

Легко видеть, что алгебраическая кратность собственного значения не меньше его геометрической кратности:

$$p_{\lambda_0} \leq n_{\lambda_0}.$$

Действительно, пусть $p = p_{\lambda_0}$ и пусть e_1, \dots, e_n — такой базис пространства \mathcal{V} , что $\mathcal{P}_{\lambda_0} = [e_1, \dots, e_p]$. В этом базисе матрица оператора A имеет вид

$$(6) \quad \begin{vmatrix} A_1 & C \\ 0 & B \end{vmatrix},$$

и потому

$$f_A(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \det(A_1 - \lambda E) \det(B - \lambda E).$$

Но A_1 является матрицей оператора

$$A|_{\mathcal{P}_{\lambda_0}} = \lambda_0 E,$$

и потому $\det(A_1 - \lambda E) = (\lambda_0 - \lambda)^p$. Этим доказано, что многочлен $f_A(\lambda)$ делится на $(\lambda - \lambda_0)^p$, и, значит, $p \leq n_{\lambda_0}$. \square

Замечание 2. Оператор A имеет матрицу вида (6) в любом базисе, для которого подпространство $\mathcal{P} = [e_1, \dots, e_p]$ инвариантно. При этом A_1 будет матрицей оператора $A|_{\mathcal{P}}$, а B — матрицей индуцированного оператора $B: \mathcal{V}/\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{P}$. Это доказывает, что для любого инвариантного подпространства $\mathcal{P} \subset \mathcal{V}$ имеет место разложение

$$f_A(\lambda) = f_{A|_{\mathcal{P}}}(\lambda) f_B(\lambda).$$

В частности, многочлен $f_A(\lambda)$ делится на многочлен $f_B(\lambda)$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — различные собственные значения оператора A и пусть

$$\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{P}_m = \mathcal{P}_{\lambda_m}$$

— принадлежащие им собственные подпространства.

Предложение 1. Сумма

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_m$$

подпространств $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_m$ является прямой, т. е. равенство

$$(7) \quad x_1 + \dots + x_m = 0,$$

где $x_1 \in \mathcal{P}_1, \dots, x_m \in \mathcal{P}_m$, имеет место тогда и только тогда, когда

$$x_1 = 0, \dots, x_m = 0.$$

Доказательство. Проведем индукцию по m . При $m=1$ утверждение очевидно (и бесодержательно). Пусть уже доказано, что сумма $m-1$ пространств $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_{m-1}$ является прямой. Применив к равенству (7) оператор A , мы получим соотношение

$$(8) \quad \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = 0.$$

Умножив (7) на λ_m и вычтя из (8), мы, далее, получим, что

$$(\lambda_1 - \lambda_m) x_1 + \dots + (\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} = 0.$$

По предположению индукции отсюда следует, что

$$(\lambda_1 - \lambda_m) x_1 = 0, \dots, (\lambda_{m-1} - \lambda_m) x_{m-1} = 0$$

и, значит (поскольку по условию $\lambda_1 - \lambda_m \neq 0, \dots, \lambda_{m-1} - \lambda_m \neq 0$), что

$$x_1 = 0, \dots, x_{m-1} = 0.$$

Но тогда, согласно (7), и $x_m = 0$. \square

Пусть существуют такие (обязательно различные) собственные значения

$$(9) \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m,$$

что

$$(10) \quad \mathcal{P}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{\lambda_m} = \mathcal{Y}$$

и, значит,

$$(11) \quad p_{\lambda_1} + \dots + p_{\lambda_m} = n.$$

Легко видеть, что в этой ситуации числа (9) исчерпывают все собственные значения оператора A . Действительно, для любого другого собственного значения λ_0 подпространство \mathcal{P}_{λ_0} будет, согласно предложению 1, образовывать с \mathcal{Y} прямую сумму, что невозможно. \square

Выбрав в каждом из пространств $\mathcal{P}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{P}_{\lambda_m}$ по базису, мы получим базис пространства \mathcal{Y} , состоящий из собственных векторов. Матрица оператора A в этом базисе диагональна:

$$(12) \quad \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m \end{vmatrix},$$

и ее диагональными элементами являются собственные значения (9), причем каждое λ_i повторено p_{λ_i} раз.

Обратно, пусть в пространстве \mathcal{Y} существует базис, в котором матрица A оператора A диагональна. Тогда векторы этого базиса будут собственными векторами, а диагональные элементы матрицы A — собственными значениями оператора A . Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все различные диагональные элементы матрицы A и пусть элемент $\lambda_i, i = 1, \dots, m$, повторен q_i раз. Пусть, далее, $\mathcal{Q}_i, i = 1, \dots, m$, — подпространство пространства \mathcal{Y} , порожденное векторами базиса, принадлежащими собственному значению λ_i . Тогда $\dim \mathcal{Q}_i = q_i$,

$$\mathcal{Q}_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{Q}_m = \mathcal{Y}$$

и $\mathcal{Q}_i \subset \mathcal{P}_{\lambda_i}$. Поэтому, в частности,

$$(13) \quad q_1 + \dots + q_m = n \quad \text{и} \quad q_1 \leq p_{\lambda_1}, \dots, q_m \leq p_{\lambda_m}.$$

Но, согласно предложению 1, сумма $\mathcal{P}_{\lambda_1} + \dots + \mathcal{P}_{\lambda_m}$ подпространств $\mathcal{P}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{P}_{\lambda_m}$ является их прямой суммой и потому имеет размерность $p_{\lambda_1} + \dots + p_{\lambda_m}$. Значит, $p_{\lambda_1} + \dots + p_{\lambda_m} \leq n$, откуда, в силу соотношений

(13), вытекает, что

$$q_1 = p_{\lambda_1}, \dots, q_m = p_{\lambda_m},$$

т. е.

$$Q_1 = P_{\lambda_1}, \dots, Q_m = P_{\lambda_m}.$$

Следовательно, для подпространств $P_{\lambda_1}, \dots, P_{\lambda_m}$ имеет место разложение (10).

Поскольку существование базиса, в котором матрица оператора A диагональна, равносильно тому, что пространство \mathcal{U} разлагается в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств, этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. Для любого линейного оператора $A: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}$ следующие утверждения равносильны:

1° Существуют такие собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, что

$$P_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus P_{\lambda_m} = \mathcal{U}.$$

2° Пространство \mathcal{U} является прямой суммой одномерных подпространств, инвариантных относительно оператора A .

3° В пространстве \mathcal{U} существует базис, состоящий из собственных векторов, т. е. базис, в котором матрица оператора A диагональна. \square

При этом фигурирующие в 1° (и неявно в 2°) собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ необходимо различны и исчерпывают все собственные значения оператора A . Каждый базис, в котором матрица оператора A диагональна, получается объединением базисов пространств $P_{\lambda_1}, \dots, P_{\lambda_m}$, так что для любого собственного значения λ_i в этом базисе имеется точно p_{λ_i} векторов, принадлежащих λ_i .

Определение 4. Оператор A называется *диагонализируемым*, если для него имеют место утверждения 1° — 3° предложения 2.

Диагонализируемым оператором является, например, произвольный проектор (идемпотентный оператор), а также произвольный инволютивный оператор. Собственные значения проектора равны 0 и 1, а инволютивного оператора равны ± 1 .

Вычисляя характеристический многочлен диагонализируемого оператора A в базисе, состоящем из собственных векторов, мы немедленно получим, что

$$f_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{p_1} \dots (\lambda - \lambda_m)^{p_m},$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — собственные значения оператора A , а $p_1 = p_{\lambda_1}, \dots, p_m = p_{\lambda_m}$ — их геометрические кратности. Это доказывает, что для диагонализируемого оператора любой его характеристический корень λ_0 лежит в поле K (и, значит, является собственным значением), а его алгебраическая кратность n_{λ_0} совпадает с его геометрической кратностью p_{λ_0} .

Оказывается, это необходимое условие диагонализуемости также и достаточно, так что имеет место следующая теорема:

Теорема 1. Линейный оператор A тогда и только тогда диагонализируем, когда любой его характеристический корень λ_0 лежит в поле K и $n_{\lambda_0} = p_{\lambda_0}$.

Доказательство. Нам нужно доказать только достаточность этого условия.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ — все характеристические корни оператора A . По условию они лежат в K и потому являются также собственными значениями. Следовательно, определены подпространства $\mathcal{P}_{\lambda_1}, \dots, \mathcal{P}_{\lambda_m}$, размерность суммы которых (как мы знаем, прямой) равна

$$p_{\lambda_1} + \dots + p_{\lambda_m} = n_{\lambda_1} + \dots + n_{\lambda_m} = n$$

(сумма кратностей всех корней многочлена равна его степени). Значит, $\mathcal{P}_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{P}_{\lambda_m} = \mathcal{V}$ и оператор A диагонализируем. \square

Определение 5. Множество всех характеристических корней оператора A называется его *спектром*. Спектр называется *простым*, если каждый характеристический корень λ_0 является простым корнем характеристического многочлена, т. е. если $n_{\lambda_0} = 1$.

Говорят, что спектр лежит в K , если все характеристические корни лежат в K .

Предложение 3. Любой оператор с простым спектром, лежащим в K , диагонализируем.

Доказательство. Так как $1 \leq p_{\lambda} \leq n_{\lambda}$, то при $n_{\lambda} = 1$ обязательно $p_{\lambda} = 1$ и, значит, $p_{\lambda} = n_{\lambda}$. \square

Это условие диагонализуемости не необходимо, но зато оно очень удобно для практической проверки.