Лекция 18

Теорема Гамильтона — Кэли. — Комплексификация линейного оператора. — Собственные подпространства, принадлежащие характеристическим корням. — Комплексно-диагонализируемые операторы.

Пусть

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$$

— произвольный многочлен над полем $\mathbb{K}$. Тогда для любого оператора $\boldsymbol{A}$ (любой матрицы A) определен оператор

$$f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{A}^m + a_1\boldsymbol{A}^{m-1} + \ldots + a_m\boldsymbol{E}$$

(матрица $f(A) = a_0A^m + a_1A^{m-1} + \ldots + a_mE$), называемый *многочленом от оператора* $\boldsymbol{A}$ (матрицы A).

Очевидно, что каждое подпространство $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$, инвариантное относительно оператора $\boldsymbol{A}$, будет инвариантно и относительно оператора $f(\boldsymbol{A})$. При этом

(1) $$f(\boldsymbol{A})|_{\mathscr{P}} = f(\boldsymbol{A}|_{\mathscr{P}}).$$

В частности, для любого оператора $\boldsymbol{A}$ определен оператор

$$f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}),$$

где $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ — характеристический многочлен оператора $\boldsymbol{A}$. Вычислим этот оператор.

Пусть сначала

2) $$\boldsymbol{A} = \lambda_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{C},$$

где $\boldsymbol{C}$ — циклический оператор. Тогда $f_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^n$ и $\boldsymbol{C}^n = 0$. Поэтому

$$f_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = (\lambda_0\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^n = (-\boldsymbol{C})^n = 0.$$

Пусть теперь оператор $\boldsymbol{A}$ (со спектром в $\mathbb{K}$) произволен и пусть

$$\mathscr{V} = \mathscr{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{P}_N$$

— разложение пространства $\mathscr{V}$ в прямую сумму инвариантных подпространств, на каждом из которых ограничение $\boldsymbol{A}_i = \boldsymbol{A}|_{\mathscr{P}_i}$ оператора $\boldsymbol{A}$ имеет вид (2). Тогда, по

доказанному,

(3) $$f_{A_i}(A_i)=0.$$

Но, как мы знаем, каждый многочлен f_{A_i} делит многочлен f_A (более того, многочлен f_A является, как легко видеть, произведением многочленов $f_{A_1}, \ldots, f_{A_N}$). Поэтому из (3) следует, что

$$f_A(A_i)=0.$$

Поэтому (см. формулу (1))

$$f_A(A)|_{\mathscr{P}_i}=0, \quad i=1, \ldots, N.$$

Таким образом, оператор $f_A(A)$ обладает тем свойством, что для любого $i=1, \ldots, N$ его ограничение на подпространстве $\mathscr{P}_i$ равно нулю. Следовательно, этот оператор равен нулю и на сумме этих подпространств, т. е. на всем пространстве $\mathscr{V}$.

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 1 (теорема Гамильтона — Кэли). *Каждый оператор аннулирует свой характеристический многочлен*:

$$f_A(A)=0. \ \square$$

Мы доказали эту теорему для операторов, спектр которых лежит в $\mathbb{K}$, и тем самым, в частности, для любых операторов над полем $\mathbb{C}$. Однако на самом деле она справедлива для любых операторов над произвольным полем $\mathbb{K}$. Соответствующее доказательство мы изложим лишь для случая $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, хотя оно может быть проведено и над совершенно произвольным полем $\mathbb{K}$ (см. ниже замечание 1).

Напомним (см. лекцию I. 19), что по любому линейному пространству $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{R}$ мы можем построить линейное пространство $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ над полем $\mathbb{C}$, называемое *комплексификацией* пространства $\mathscr{V}$. Это пространство обладает тем свойством, что каждый его вектор z единственным образом представляется в виде

$$z=x+iy,$$

где $x \in \mathscr{V}$ и $y \in \mathscr{V}$. Поэтому для каждого линейного оператора $A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ формула

$$A^{\mathbb{C}}(x+iy)=Ax+iAy$$

корректно определяет некоторый оператор $A^{\mathbb{C}}: \mathscr{V}^{\mathbb{C}} \to \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$. Так как для любого числа $a+ib \in \mathbb{C}$ и любого вектора $z = x + iy \in \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$

$$(a+ib)(x+iy) = (ax - by) + i(ay + bx),$$

то

$$\begin{aligned} A^{\mathbb{C}}((a+ib)(x+iy)) &= A(ax-by) + iA(ay+bx) = \\ &= (aAx - bAy) + i(aAy + bAx) = \\ &= (a+ib)(Ax + iAy) = (a+ib)A^{\mathbb{C}}(x+iy), \end{aligned}$$

т. е. $A^{\mathbb{C}}(cz) = cA^{\mathbb{C}}z$. Еще проще проверяется, что

$$A^{\mathbb{C}}(z_1 + z_2) = A^{\mathbb{C}}z_1 + A^{\mathbb{C}}z_2$$

для любых векторов z_1, $z_1 \in \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$. Следовательно, *оператор $A^{\mathbb{C}}$ линеен.*

Определение 1. Оператор $A^{\mathbb{C}}$ называется *комплексификацией* оператора A.

Заметим, что отображение $A \mapsto A^{\mathbb{C}}$ является, очевидно, гомоморфизмом алгебры $\operatorname{End}\mathscr{V}$ в алгебру $\operatorname{End}\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ (рассматриваемую как алгебра над $\mathbb{R}$), т. е.

$$(A+B)^{\mathbb{C}} = A^{\mathbb{C}} + B^{\mathbb{C}}, \qquad (AB)^{\mathbb{C}} = A^{\mathbb{C}}B^{\mathbb{C}}$$

и

$$(kA)^{\mathbb{C}} = kA^{\mathbb{C}}$$

для любых операторов A, $B \in \operatorname{End}\mathscr{V}$ и любого вещественного числа k.

Как мы знаем (см. предложение 1 лекции I. 19; напомним, что в обозначениях этого предложения $(\mathscr{V}^{\mathbb{C}})^{\mathbb{R}} = \mathscr{V}$), любой базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ является также базисом и пространства $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$. Отсюда следует, что в каждом таком («вещественном») базисе матрица оператора $A^{\mathbb{C}}$ совпадает с матрицей оператора A. В этом смысле *матрица оператора не меняется при его комплексификации.* Значит, в частности, операторы A и $A^{\mathbb{C}}$ имеют один и тот же характеристический многочлен:

$$f_A(\lambda) = f_{A^{\mathbb{C}}}(\lambda). \tag{4}$$

Поскольку для каждого многочлена f с вещественными коэффициентами оператор $f(A)$ является, очевидно, ограничением оператора $f(A^{\mathbb{C}})$ на $\mathscr{V} = \operatorname{Re}\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$, отсюда непосредственно следует, что *теорема Гамильтона — Кэли справедлива для любых операторов* A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$, т. е.

$$f_A(A) = 0.$$

Действительно, так как эта теорема справедлива над полем $\mathbb{C}$, то $f_{A^{\mathbb{C}}}(A^{\mathbb{C}}) = 0$, и, значит,

$$f_A(A) = f_{A^{\mathbb{C}}}(A) = f_{A^{\mathbb{C}}}(A^{\mathbb{C}})|_{\mathscr{V}} = 0. \ \square$$

Ввиду равенства (4) операторы A и $A^{\mathbb{C}}$ имеют одни и те же характеристические корни. Все они являются собственными значениями оператора $A^{\mathbb{C}}$, но только вещественные из них будут собственными значениями оператора A.

Если оператор A нильпотентен, то оператор $A^{\mathbb{C}}$ также нильпотентен (и имеет ту же степень нильпотентности), и потому все его собственные значения равны нулю.

Поскольку эти собственные значения исчерпывают все корни многочлена $f_{A^{\mathbb{C}}} = f_A$, этим доказано, что $f_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n$ для любого нильпотентного оператора A. На языке матриц это означает (мы заменяем λ на $-\lambda$), что *для любой нильпотентной матрицы A имеет место тождество*

$$\det(A + \lambda E) = \lambda^n.$$

Доказать это «чисто матричное» утверждение непосредственным вычислением определителя, по-видимому, очень трудно.

В силу теоремы Гамильтона — Кэли отсюда вытекает, что в *n-мерном пространстве степень нильпотентности произвольного нильпотентного оператора не превосходит n.*

Эти красивые утверждения показывают, каким мощным орудием доказательства теорем является, казалось бы, совершенно тривиальный прием комплексификации.

Замечание 1. Чтобы перенести эти результаты на случай произвольного поля $\mathbb{K}$, нам в первую очередь нужно знать, что для любого поля $\mathbb{K}$ существует

содержащее его поле $\mathbb{D}$, обладающее свойством *алгебраической замкнутости*, т. е. такое, что любой многочлен положительной степени над полем $\mathbb{D}$ имеет в $\mathbb{D}$ корень (и потому разлагается на линейные множители). Этот факт доказывается в полных курсах алгебры, и мы примем его без доказательства. Затем нужно перенести на случай поля $\mathbb{D}$ конструкцию комплексификации. Это можно сделать следующим образом.

Каждое поле $\mathbb{D}$, содержащее поле $\mathbb{K}$, является, конечно, линейным пространством над $\mathbb{K}$ (возможно, бесконечномерным). Поэтому для любого линейного пространства $\mathscr{V}$ над $\mathbb{K}$ мы можем построить тензорное произведение $\mathbb{D} \otimes \mathscr{V}$ пространств $\mathbb{D}$ и $\mathscr{V}$, являющееся линейным пространством над полем $\mathbb{K}$ (см. замечание 4 лекции 5). Если пространство $\mathscr{V}$ конечномерно и $e_1, \ldots, e_n$ — его базис, то, как легко видеть, любой элемент a произведения $\mathbb{D} \otimes \mathbb{K}$ единственным образом представляется в виде

$$(5) \qquad a = \alpha_1 \otimes e_1 + \ldots + \alpha_n \otimes e_n, \text{ где } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{D}.$$

Поэтому формула

$$\alpha(\alpha_1 \otimes e_1 + \ldots + \alpha_n \otimes e_n) = (\alpha\alpha_1) \otimes e_1 + \ldots + (\alpha\alpha_n) \otimes e_n,$$

где $\alpha \in \mathbb{D}$, корректно определяет в $\mathbb{D} \otimes \mathscr{V}$ умножение на α, и ясно, что по отношению к этому умножению *произведение* $\mathbb{D} \otimes \mathscr{V}$ *является линейным пространством над* $\mathbb{D}$.

Формулу (5) можно теперь переписать в виде

$$(6) \qquad a = \alpha_1(1 \otimes e_1) + \ldots + \alpha_n(1 \otimes e_n),$$

означающем, что *векторы* $1 \otimes e_1, \ldots, 1 \otimes e_n$ *образуют базис пространства* $\mathbb{D} \otimes \mathscr{V}$ *над* $\mathbb{D}$. Обычно этот базис обозначают через $e_1, \ldots, e_n$ и (6) приобретает вид

$$a = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n.$$

Мы видим, таким образом, что *пространство* $\mathscr{V}^{\mathbb{D}} = \mathbb{D} \otimes \mathscr{V}$ *является обобщением пространства* $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ *на случай произвольного поля* $\mathbb{K}$ *и произвольного его надполя* $\mathbb{D}$.

При этом ясно, что изложенное выше рассуждение с операторами дословно сохраняется и в общем

случае. Тем самым теорема Гамильтона — Кэли оказывается доказанной для операторов над произвольным полем K.

Пусть снова $\mathscr{V}$ — произвольное вещественное линейное пространство и $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ — его комплексификация.

Очевидно, что для любого подпространства $\mathscr{Q}$ пространства $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ подмножество $\operatorname{Re}\mathscr{Q}$ всех векторов из $\mathscr{V}$, имеющих вид $\operatorname{Re} z$, где $z \in \mathscr{Q}$, или — что равносильно (ибо $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re}(-iz)$) — вид $\operatorname{Im} z$, $z \in \mathscr{Q}$, является подпространством пространства $\mathscr{V}$ (если $x_1 = \operatorname{Re} z_1$, $x_2 = \operatorname{Re} z_2$, то $x_1 + x_2 = \operatorname{Re}(z_1 + z_2)$ и $k \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} kz$ для любого $k \in \mathbb{R}$).

Аналогично, для любого подпространства $\mathscr{P}$ пространства $\mathscr{V}$ множество $\mathscr{P}^{\mathbb{C}}$ всех векторов вида $x + iy$, где $x, y \in \mathscr{P}$, является подпространством пространства $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ (оно является не чем иным, как линейной оболочкой подпространства $\mathscr{P}$ в пространстве $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$). При этом ясно, что

$$\operatorname{Re}\mathscr{P}^{\mathbb{C}} = \mathscr{P}$$

для любого подпространства $\mathscr{P} \subset \mathscr{V}$.

Заметим, что каждый базис $e_1, \ldots, e_p$ подпространства $\mathscr{P}$ (над $\mathbb{R}$) будет базисом и подпространства $\mathscr{P}^{\mathbb{C}}$ (над $\mathbb{C}$).

Пусть теперь $A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ — произвольный линейный оператор на $\mathscr{V}$ и $A^{\mathbb{C}}: \mathscr{V}^{\mathbb{C}} \to \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ — его комплексификация. Рассмотрим произвольный характеристический корень λ оператора A. Он является собственным значением оператора $A^{\mathbb{C}}$, и потому в $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ определено соответствующее собственное подпространство $\mathscr{Q}_\lambda$.

Пусть сначала корень λ веществен. Тогда он будет собственным значением оператора A и в пространстве $\mathscr{V}$ будет определено соответствующее собственное подпространство $\mathscr{P}_\lambda$.

Если нам дана некоторая система n линейных однородных уравнений от n неизвестных, коэффициенты которых вещественны и составляют матрицу ранга r, то ее решения образуют в $\mathbb{R}^n$ подпространство $\mathscr{P}$ размерности $n - r$, так что каждое решение является линейной комбинацией некоторых $n - r$ линейно независимых решений, составляющих базис этого подпространства. Как мы уже говорили, этот базис принято называть *фундаментальной системой решений.*

Ту же самую систему уравнений мы можем рассматривать как систему с комплексными коэффициентами и искать ее решения в $\mathbb{C}^n = (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{C}}$. Тогда каждая фундаментальная система решений останется фундаментальной системой решений, но, чтобы получить все решения, придется брать линейные комбинации решений этой системы не с вещественными, а с любыми комплексными коэффициентами. Во введенных выше обозначениях это означает, что подпространством решений данной системы уравнений в пространстве $\mathbb{C}^n$ является подпространство $\mathcal{P}^{\mathbb{C}}$.

Эти общие соображения применимы, в частности, к подпространству $\mathcal{P}_\lambda$, координаты векторов которого в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathcal{V}$ удовлетворяют системе однородных линейных уравнений с вещественной матрицей коэффициентов $A - \lambda E$. Как мы знаем, те же векторы $e_1, \ldots, e_n$ составляют базис пространства $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ и в этом базисе координаты векторов из $\mathcal{Q}_\lambda$ определяются той же системой уравнений. Это доказывает, что *для каждого вещественного характеристического корня λ оператора A имеет место равенство*

$$\mathcal{Q}_\lambda = \mathcal{P}_\lambda^{\mathbb{C}},$$

а потому и равенство

$$\mathcal{P}_\lambda = \operatorname{Re} \mathcal{Q}_\lambda. \tag{7}$$

Пусть теперь λ невещественно. В этом случае мы определим подпространство $\mathcal{P}_\lambda \subset \mathcal{V}$ формулой (7).

Таким образом, теперь подпространства $\mathcal{P}_\lambda$ будут у нас определены для любых характеристических корней λ оператора A, причем при λ вещественном это обозначение имеет прежний смысл.

Подпространство $\mathcal{P}_\lambda = \operatorname{Re} \mathcal{Q}_\lambda$ мы будем называть *собственным подпространством* оператора A, *принадлежащим характеристическому корню* λ. Следует при этом помнить, что его векторы будут собственными векторами оператора A только при λ вещественном.

Ясно, что каждое из пространств $\mathcal{P}_\lambda$ инвариантно относительно A.

При λ вещественном $\mathcal{P}_\lambda^{\mathbb{C}} = \mathcal{Q}_\lambda$. Чему равно $\mathcal{P}_\lambda^{\mathbb{C}}$ при λ невещественном?

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что, поскольку коэффициенты характеристического многочлена

f_A вещественны, вместе с числом λ его корнем будет также и комплексно сопряженное число $\bar{\lambda}$. Координаты векторов соответствующего собственного подпространства $\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}$ оператора $A^{\mathbb{C}}$ будут решениями системы линейных уравнений с комплексно сопряженной матрицей $A-\bar{\lambda}E$ и потому будут получаться из координат векторов подпространства $\mathcal{Q}_\lambda$ переходом к комплексно сопряженным числам. На бескоординатном языке это означает, что если $z=x+iy\in\mathcal{Q}_\lambda$, то $\bar{z}=x-iy\in\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}$. В условных, но наглядных обозначениях этот факт можно записать формулой

$$\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}=\bar{\mathcal{Q}}_\lambda.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{Re}\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}=\operatorname{Re}\mathcal{Q}_\lambda$, т. е.

$$\mathcal{P}_\lambda=\mathcal{P}_{\bar{\lambda}}.$$

С другой стороны, так как $\lambda\neq\bar{\lambda}$, то (предложение 1 лекции 16) сумма подпространств $\mathcal{Q}_\lambda$ и $\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}$ является их прямой суммой $\mathcal{Q}_\lambda\oplus\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}$. Если $e_1,\ldots,e_q$ — базис подпространства $\mathcal{Q}_\lambda$, где $q=\dim\mathcal{Q}_\lambda$, то векторы $e_1,\ldots,e_q$, $\bar{e}_1,\ldots,\bar{e}_q$ будут поэтому составлять базис пространства $\mathcal{Q}_\lambda\oplus\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}$. Но тогда базис этого пространства будут составлять и векторы

$$\operatorname{Re}e_1=\frac{e_1+\bar{e}_1}{2},\qquad \operatorname{Im}e_1=\frac{\bar{e}_1-\bar{e}_1}{2i},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\operatorname{Re}e_q=\frac{e_q+\bar{e}_q}{2},\qquad \operatorname{Im}e_q=\frac{e_q-\bar{e}_q}{2i}.$$

Векторы $\operatorname{Re}e_1$, $\operatorname{Im}e_1$, ..., $\operatorname{Re}e_q$, $\operatorname{Im}e_q$ по построению вещественны, т. е. лежат в $\mathcal{V}$. Если $\mathcal{P}\subset\mathcal{V}$ — порожденное этими векторами $2q$-мерное подпространство пространства $\mathcal{V}$, то по определению

$$\mathcal{P}^{\mathbb{C}}=\mathcal{Q}_\lambda\oplus\mathcal{Q}_{\bar{\lambda}}.$$

Но легко видеть, что при соответствии $\mathcal{Q}\longmapsto\operatorname{Re}\mathcal{Q}$ сумма подпространств переходит в сумму, т. е.

$$\operatorname{Re}(\mathcal{Q}_1+\mathcal{Q}_2)=\operatorname{Re}\mathcal{Q}_1+\operatorname{Re}\mathcal{Q}_2$$

для любых подпространств $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 \subset \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$. Поэтому

$$\mathcal{P} = \operatorname{Re} \mathcal{P}^{\mathbb{C}} = \operatorname{Re}(\mathcal{Q}_\lambda \oplus \mathcal{Q}_{\bar\lambda}) = \operatorname{Re}\mathcal{Q}_\lambda + \operatorname{Re}\mathcal{Q}_{\bar\lambda} = \mathcal{P}_\lambda + \mathcal{P}_{\bar\lambda} = \mathcal{P}_\lambda.$$

Этим доказано, что *для любого невещественного характеристического корня λ оператора A справедливо равенство*

$$\mathcal{P}_\lambda^{\mathbb{C}} = \mathcal{Q}_\lambda \oplus \mathcal{Q}_{\bar\lambda}.$$

Пример подпространств $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_\lambda$ и $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q}_{\bar\lambda}$ показывает, что при соответствии $\mathcal{Q} \longmapsto \operatorname{Re}\mathcal{Q}$ прямая сумма не обязательно переходит в прямую сумму. Однако легко видеть, что *если $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{P}_1^{\mathbb{C}}$ и $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}$, то*

$$\operatorname{Re}(\mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{Q}_2) = \operatorname{Re}\mathcal{Q}_1 \oplus \operatorname{Re}\mathcal{Q}_2. \tag{8}$$

Действительно, ясно, что

$$(\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2)^{\mathbb{C}} = \mathcal{P}_1^{\mathbb{C}} \oplus \mathcal{P}_2^{\mathbb{C}}.$$

Поэтому, применив Re, получим (8). □

Докажем теперь для пространств $\mathcal{P}_\lambda$ аналог предложения 1 лекции 16:

Предложение 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — такие характеристические корни оператора A (безразлично, вещественные или нет), что*

$$\lambda_i \neq \lambda_j \text{ и } \lambda_i \neq \bar\lambda_j, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

при $i \neq j$. Тогда сумма $\mathcal{P}$ подпространств $\mathcal{P}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{P}_{\lambda_m}$ является их прямой суммой:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{P}_{\lambda_m}. \tag{9}$$

Пример подпространств $\mathcal{P}_\lambda$ и $\mathcal{P}_{\bar\lambda}$ показывает, что условие $\lambda_i \neq \bar\lambda_j$ здесь существенно.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — вещественные из данных корней, а $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m$ — невещественные. Тогда $2m - r$ собственных значений

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_r, \lambda_{r+1}, \bar\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_m, \bar\lambda_m$$

оператора $A^{\mathbb{C}}$ будут все различны, и потому сумма $\mathcal{Q}$ соответствующих собственных подпространств будет их прямой суммой:

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathcal{Q}_{\lambda_r} \oplus (\mathcal{Q}_{\lambda_{r+1}} \oplus \mathcal{Q}_{\bar\lambda_{r+1}}) \oplus \ldots \oplus (\mathcal{Q}_{\lambda_m} \oplus \mathcal{Q}_{\bar\lambda_m}).$$

Применяя Re и учитывая, что

$$\mathcal{Q}_{\lambda_1} = \mathcal{P}^{\mathbb{C}}_{\lambda_1}, \ldots, \mathcal{Q}_{\lambda_r} = \mathcal{P}^{\mathbb{C}}_{\lambda_r},$$

$$\mathcal{Q}_{\lambda_{r+1}} \oplus \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}_{r+1}} = \mathcal{P}^{\mathbb{C}}_{\lambda_{r+1}}, \ldots, \mathcal{Q}_{\lambda_m} \oplus \mathcal{Q}_{\bar{\lambda}_m} = \mathcal{P}^{\mathbb{C}}_{\lambda_m},$$

мы немедленно получим (9). □

В случае, когда оператор $\boldsymbol{A}^{\mathbb{C}}$ диагонализируем, из предложения 1 следует, что пространство $\mathcal{V}$ разлагается в прямую сумму инвариантных (относительно $\boldsymbol{A}$) пространств $\mathcal{P}_\lambda$, где λ пробегает все вещественные корни многочлена $f_{\boldsymbol{A}}$ и все его попарно несопряженные невещественные корни.

Ограничение $\boldsymbol{A}_\lambda = \boldsymbol{A}|_{\mathcal{P}_\lambda}$ оператора $\boldsymbol{A}$ на подпространстве $\mathcal{P}_\lambda$ при λ вещественном нам известно — это скалярный оператор $\lambda\boldsymbol{E}$, имеющий в произвольном базисе диагональную (скалярную) матрицу λE.

Рассмотрим теперь оператор $\boldsymbol{A}_\lambda = \boldsymbol{A}|_{\mathcal{P}_\lambda}$ при λ невещественном. Пусть

$$\lambda = \alpha + i\beta, \text{ где } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ и } \beta \neq 0.$$

Выше было показано, что для любого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_q$ подпространства $\mathcal{Q}_\lambda$ векторы

$$\text{(10)} \qquad \operatorname{Re} \boldsymbol{e}_1, \operatorname{Im} \boldsymbol{e}_1, \ldots, \operatorname{Re} \boldsymbol{e}_q, \operatorname{Im} \boldsymbol{e}_q$$

составляют базис пространства $\mathcal{P}_\lambda$. Положим для упрощения обозначений $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{x} = \operatorname{Re} \boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{y} = \operatorname{Im} \boldsymbol{e}$ и рассмотрим двумерное подпространство $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_\lambda$ с базисом $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

Так как $\boldsymbol{e} \in \mathcal{Q}_\lambda$, то $\boldsymbol{A}^{\mathbb{C}}\boldsymbol{e} = \lambda\boldsymbol{e}$, т. е.

$$\boldsymbol{A}^{\mathbb{C}}(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (\alpha + i\beta)(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}).$$

По определению это означает, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = (\alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y}) + i(\beta\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}),$$

т. е. что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \beta\boldsymbol{y},$$
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \beta\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}.$$

Таким образом, мы видим, что *пространство $\mathscr{P}$ инвариантно относительно оператора A и ограничение оператора A на $\mathscr{P}$ имеет в базисе x, y матрицу*

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Поскольку пространство $\mathscr{P}_\lambda$ является прямой суммой q подпространств вида $\mathscr{P}$, мы получаем, что в базисе (10) матрица оператора A_λ является блочно-диагональной матрицей

$$\begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ -\beta_2 & \alpha_2 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_q & \beta_q \\ -\beta_q & \alpha_q \end{matrix}} \end{Vmatrix},$$

по диагонали которой расположены $q = \dim \mathscr{Q}_\lambda$ матриц вида (11).

Сопоставляя все доказанное, мы видим, что справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть для линейного оператора A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ над полем $\mathbb{R}$ оператор $A^{\mathbb{C}}: \mathscr{V}^{\mathbb{C}} \to \mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ диагонализируем (так будет, в частности, если оператор A имеет простой спектр). Пусть, далее, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все вещественные, а $\lambda_{r+1} = \alpha_1 + i\beta_1, \ldots, \lambda_{r+s} = \alpha_s + i\beta_s$ — все невещественные и попарно комплексно несопряженные характеристические корни оператора A, каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность (так что $n = r + 2s$).*

Тогда в пространстве $\mathscr{V}$ существует базис, в котором матрица оператора A является прямой суммой матриц первого порядка $\|\lambda_1\|, \ldots, \|\lambda_r\|$ и матриц второго порядка

$$\begin{Vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} \alpha_s & \beta_s \\ -\beta_s & \alpha_s \end{Vmatrix},$$

т. е. имеет вид

$$
(12)\qquad \left\|\begin{matrix}
\lambda_1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & 0 & \\
 & & \lambda_r & & & & \\
 & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{matrix}} & & & \\
 & & & & \ddots & & \\
 & 0 & & & & \boxed{\begin{matrix} \alpha_s & \beta_s \\ -\beta_s & \alpha_s \end{matrix}}
\end{matrix}\right\| . \quad \square
$$

Конечно, аналогичная теорема, но с более сложной матрицей (12) имеет место и когда оператор A^C недиагонализируем. Эта теорема нам не понадобится, и потому ни доказывать, ни формулировать ее мы не будем.