

$\mathfrak{sl}_2$ -модули. — Весовые и примитивные элементы. — Простые  $\mathfrak{sl}_2$ -модули. — Теорема разложения и ее следствия.

Пусть  $\mathcal{V}$  — конечномерное линейное пространство над полем  $K$  характеристики 0.

**Определение 1.** Коммутатором (или скобкой Ли) двух линейных операторов  $A, B: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$  называется оператор

$$(1) \quad [A, B] = AB - BA.$$

Аналогично определяется коммутатор  $[A, B] = AB - BA$  двух матриц  $A$  и  $B$ .

**Определение 2.** Линейное пространство  $\mathcal{V}$ , на котором заданы три линейных оператора

$$H, X, Y : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V},$$

называется  $\mathfrak{sl}_2$ -модулем, если

$$(2) \quad [X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y.$$

Определение 2 представляется весьма искусственным и непонятно откуда взявшимся. На самом деле оно вполне естественно и вводит объекты очень важные и интересные не только в математике, но и, скажем, в физике. Мы вкратце объясним его происхождение, хотя формально этим объяснением мы впоследствии пользоваться не будем.

Линейное подпространство  $\mathfrak{g}$  линеала  $\text{End } \mathcal{V}$ , замкнутое относительно операции (1) (т. е. такое, что  $[A, B] \in \mathfrak{g}$  для любых операторов  $A, B \in \mathfrak{g}$ ), называется линейной алгеброй Ли. Относительно операции (1) оно является алгеброй (неассоциативной) в общегебраическом смысле.

Аналогично определяются матричные алгебры Ли.

Очевидным примером линейной алгебры Ли является пространство  $\text{End } \mathcal{V}$  всех линейных операторов  $\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , а матричной алгебры Ли — пространство  $\text{Mat}_n K$  всех квадратных матриц данного порядка  $n$  над полем  $K$  (рассматриваемое как матричная алгебра Ли, оно обычно обозначается символом  $gl_n(K)$  или просто  $gl_n$ ). Другим примером может служить подпространство  $sl_n$

алгебры  $\mathfrak{gl}_n$ , состоящее из матриц со следом, равным нулю. (Тот факт, что  $\mathfrak{sl}_n$  является алгеброй Ли, непосредственно вытекает из формулы (6) лекции 15.)

*Линейным представлением* некоторой алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  называется ее произвольный гомоморфизм  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathcal{V}$  в алгебру Ли  $\text{End } \mathcal{V}$ . В этом случае пространство  $\mathcal{V}$  называется *модулем над алгеброй*  $\mathfrak{g}$ .

Одной из простейших и наиболее важных алгебр Ли является алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_2$ . Но, по определению, алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_2$  состоит из матриц вида

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & -a \end{vmatrix} = aH + bX + cY,$$

где

$$H = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad X = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad Y = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

и потому каждое представление  $\rho: \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End } \mathcal{V}$  однозначно определяется операторами  $H = \rho H$ ,  $X = \rho X$ ,  $Y = \rho Y$ . При этом легкое вычисление показывает, что

$$[X, Y] = H, \quad [H, X] = 2X, \quad [H, Y] = -2Y,$$

и, значит, что операторы  $H$ ,  $X$ ,  $Y$  удовлетворяют соотношениям (2). Обратно, если заданы три оператора  $H$ ,  $X$  и  $Y$ , удовлетворяющие соотношениям (2), то линейное отображение  $\rho: \mathfrak{sl}_2 \rightarrow \text{End } \mathcal{V}$ , для которого  $\rho H = H$ ,  $\rho X = X$  и  $\rho Y = Y$  (ясно, что этими условиями отображение  $\rho$  определяется единственным образом), будет — как легко видеть — гомоморфизмом алгебр Ли, т. е. представлением.

Таким образом,  $\mathfrak{sl}_2$ -модули в смысле определения 2 — это не что иное, как модули над алгеброй Ли  $\mathfrak{sl}_2$ . Их теория является простейшим примером и образцом для построения теории линейных представлений более общих алгебр Ли.

Пусть  $\mathcal{V}$  — произвольный  $\mathfrak{sl}_2$ -модуль.

**Определение 3.** Собственные значения оператора  $H$  называются *весами* модуля  $\mathcal{V}$ , собственные векторы оператора  $H$  — *весовыми векторами* модуля  $\mathcal{V}$ , а собственные подпространства оператора  $H$  — *весовыми подпространствами* модуля  $\mathcal{V}$ .

**Предложение 1.** Если  $v$  — весовой вектор с весом  $\lambda$  и если  $Xv \neq 0$  (или  $Yv \neq 0$ ), то вектор  $Xv$  (вектор  $Yv$ ) также будет весовым вектором. Вес вектора  $Xv$  равен  $\lambda + 2$ , а вектора  $Yv$  равен  $\lambda - 2$ .

**Доказательство.** Если  $Hv = \lambda v$ , то

$$H(Xv) = [H, X]v + X(Hv) = 2Xv + \lambda Xv = (\lambda + 2)Xv,$$

и аналогично

$$H(Yv) = [H, Y]v + Y(Hv) = -2Yv + \lambda Yv = (\lambda - 2)Yv. \square$$

**Следствие 1.** Для любого весового вектора  $v$  существуют такие числа  $p \geq 0$  и  $q \geq 0$ , что  $X^p v \neq 0$  и  $Y^q v \neq 0$ , но  $X^{p+1}v = 0$  и  $Y^{q+1}v = 0$ .

**Доказательство.** Достаточно заметить, что число различных весов модуля  $\mathcal{U}$  конечно.  $\square$

**Определение 4.** Число  $p$  мы будем называть *верхним*, а число  $q$  — *нижним показателем* весового элемента  $v$ .

**Определение 5.** Весовой элемент  $v$  модуля  $\mathcal{U}$  называется *примитивным*, если  $Xv = 0$ , т. е. если его верхний показатель  $p$  равен нулю.

**Следствие 2.** Для каждого весового вектора  $v$  вектор  $X^p v$  примитивен.  $\square$

**Предложение 2.** Для любого примитивного элемента  $v$  веса  $\lambda$  и любого  $r$ ,  $0 \leq r \leq q + 1$ , имеет место равенство

$$(3) \quad XY^r v = a(r) Y^{r-1} v,$$

где

$$a(r) = (\lambda - r + 1)r.$$

**Доказательство.** По условию  $Xv = 0$  и  $a(0) = 0$ . Поэтому при  $r = 0$  равенство (3) верно. Пусть оно уже доказано для некоторого  $r \geq 0$ . Тогда, если  $Y^r v \neq 0$  (т. е. если  $r \leq q$ ), то, согласно предложению 1,

$$\begin{aligned} XY^{r+1} v &= XY(Y^r v) = (YX + H)Y^r v = \\ &= Y(XY^r v) + (\lambda - 2r)Y^r v = \\ &= [a(r) + \lambda - 2r]Y^r v = \\ &= a(r + 1)Y^r v. \end{aligned}$$

Поэтому (3) верно для любого  $r$ ,  $0 \leq r \leq q + 1$ .  $\square$

**Следствие 1.** Вес  $\lambda$  каждого примитивного элемента  $v$  равен его *нижнему показателю*  $q$  и, значит, является *целым неотрицательным числом*.

**Доказательство.** Так как  $Y^{q+1}v = 0$  и  $Y^q v \neq 0$ , то  $a(q + 1) = 0$ , т. е.  $(\lambda - q)(q + 1) = 0$ . Следовательно,  $\lambda = q$  (напомним, что по условию  $\text{char } K \neq 0$ ).  $\square$

**Следствие 2.** Для любого примитивного элемента  $v$  и любых показателей  $s$  и  $r$ ,  $0 \leq s \leq r \leq q$ , имеет место

равенство

$$(4) \quad X^s Y^r v = a_{s,r} Y^{r-s} v,$$

где  $a_{r,s} \neq 0$ .

В частности,

$$(5) \quad X^r Y^r v = a_r v,$$

где  $a_r \neq 0$ .

**Доказательство.** При  $s = 0$  равенство (4) очевидно, а при  $s = 1$  оно совпадает с равенством (3) (причем  $a_{1,r} = a(r) = (q - r + 1)r \neq 0$  при  $1 \leq r \leq q$ ). Пусть равенство (4) уже доказано для некоторого  $s < r$ . Тогда

$$\begin{aligned} X^{s+1} Y^r v &= X(X^s Y^r v) = \\ &= X(a_{s,r} Y^{r-s} v) = \\ &= a_{s,r} a(r-s) Y^{r-s-1} v, \end{aligned}$$

и, значит, (4) верно и при  $s + 1$  (с  $a_{s+1,r} = a_{s,r} a(r,s) \neq 0$ ). Тем самым равенство (4) полностью доказано.  $\square$

**Следствие 3.** Все веса произвольного  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля  $\mathcal{U}$  являются целыми числами.

**Доказательство.** Пусть  $v$  — весовой вектор веса  $\lambda$  и пусть  $p$  — его верхний показатель. Тогда вектор  $X^p v$  примитивен и, согласно следствию 1, его вес  $\lambda + 2p$  является целым числом. Поэтому целым числом будет и вес  $\lambda$ .  $\square$

**Следствие 4.** В каждом  $\mathfrak{sl}_2$ -модуле  $\mathcal{U}$  существует примитивный элемент.

**Доказательство.** Пусть  $\mathbb{D}$  — алгебраическое замыкание поля  $\mathbb{K}$  (если  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ , то  $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ ). Рассмотрим линейное пространство  $\mathcal{U}^\mathbb{D}$  над полем  $\mathbb{D}$  (см. замечание 1 лекции 18). Ясно, что  $\mathcal{U}^\mathbb{D}$  также является  $\mathfrak{sl}_2$ -модулем (по отношению к операторам  $H^\mathbb{D}$ ,  $X^\mathbb{D}$  и  $Y^\mathbb{D}$ ). Так как поле  $\mathbb{D}$  алгебраически замкнуто, то для модуля  $\mathcal{U}^\mathbb{D}$  существует хотя бы один вес  $\lambda$ . Этот вес является корнем характеристического многочлена оператора  $H^\mathbb{D}$ , совпадающего, как мы знаем (см. лекцию 18) с характеристическим многочленом оператора  $H$ . Отсюда следует, что число  $\lambda$ , являющееся, согласно следствию 3, целым числом и потому принадлежащее полю  $\mathbb{K}$ , будет собственным значением опе-

ратора  $H$ , т. е. весом модуля  $\mathcal{U}$ . Если  $v$  — соответствующий весовой вектор, то, согласно следствию 2 предложения 1, вектор  $X^p v$ , где  $p$  — верхний показатель вектора  $v$ , будет примитивным элементом модуля  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Определение 6.** Веса примитивных элементов называются *старшими весами*  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля  $\mathcal{U}$ .

Таким образом, согласно следствию 4, каждый  $\mathfrak{sl}_2$ -модуль  $\mathcal{U}$  имеет хотя бы один старший вес.

**Определение 7.** Линейное подпространство  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля  $\mathcal{U}$  называется *подмодулем*, если оно инвариантно относительно операторов  $H$ ,  $X$ ,  $Y$  (и потому само является  $\mathfrak{sl}_2$ -модулем). Модуль  $\mathcal{U}$  называется *простым* (или *неприводимым*), если он не имеет подмодулей, отличных от нулевого подмодуля 0 и всего  $\mathcal{U}$ .

**Теорема 1** (о простых  $\mathfrak{sl}_2$ -модулях). Каждый простой  $\mathfrak{sl}_2$ -модуль обладает единственным старшим весом (все его примитивные элементы пропорциональны). Два простых  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля тогда и только тогда изоморфны, когда их старшие веса совпадают. Любое целое неотрицательное число  $q$  является старшим весом простого  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля  $\mathcal{U}(q)$ . Размерность модуля  $\mathcal{U}(q)$  равна  $q+1$ . Этот модуль обладает таким базисом

$$e_{-q}, e_{-q+2}, \dots, e_{q-2}, e_q,$$

что

$$(6) \quad He_r = re_r,$$

$$(7) \quad Xe_r = \frac{(q-r)(q+r+2)}{4} e_{r+2},$$

$$(8) \quad Ye_r = e_{r-2}$$

для любого  $r$ ,  $|r| \leq q$  (условно считается, что  $e_{q-2} = 0$  и  $e_{q+2} = 0$ ).

Весами модуля  $\mathcal{U}(q)$  является, таким образом, числа  $-q, -q+2, \dots, q-2, q$ .

[Заметим, что число  $\frac{(q-r)(q+r+2)}{4}$  целое.]

**Доказательство.** Докажем сначала, что линеал  $\mathcal{U}(q)$  с операторами  $H$ ,  $X$ ,  $Y$ , определенными формулами (6), (7) и (8), действительно является  $\mathfrak{sl}_2$ -модулем (очевидно, простым), т. е. что эти операторы удовлетворяют соотношениям (2). Это делается автоматической

выкладкой:

$$\begin{aligned}
 [X, Y]e_r &= XYe_r - YXe_r = \\
 &= Xe_{r-2} - Y \frac{(q-r)(q+r+2)}{4} e_{r+2} = \\
 &= \left[ \frac{(q-r+2)(q+r)}{4} - \frac{(q-r)(q+r+2)}{4} \right] e_r = \\
 &= re_r = He_r,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [H, X]e_r &= HXe_r - XHe_r = \\
 &= H \frac{(q-r)(q+r+2)}{4} e_{r+2} - Xre_r = \\
 &= \frac{(q-r)(q+r+2)}{4} (r+2)e_{r+2} - rXe_r = \\
 &= (r+2)Xe_r - rXe_r = 2Xe_r,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [H, Y]e_r &= HYe_r - YHe_r = \\
 &= He_{r-2} - Yre_r = \\
 &= (r-2)e_{r-2} - rYe_r = \\
 &= (r-2)Ye_r - rYe_r = 2Ye_r.
 \end{aligned}$$

Пусть теперь  $\mathcal{V}$  — пока произвольный  $\text{sl}_2$ -модуль,  $v$  — его произвольный примитивный элемент,  $q$  — нижний показатель элемента  $v$  (являющийся, согласно следствию 1 предложения 2, его весом) и пусть

$$(9) \quad e_{-q} = Y^q v, \quad e_{-q+2} = Y^{q-1} v, \dots, \quad e_{q-2} = Yv, \quad e_q = v.$$

Оказывается, что для векторов (9) справедливы тождества (6), (7) и (8). Действительно, тождество (8) имеет место по определению, а тождество (6) вытекает, в силу предложения 1, из тождества  $Hv = qv$ , поскольку

$$q - 2 \frac{q-r}{2} = r$$

для любого  $r$ . Что же касается тождества (7), то при  $q = r$  оно справедливо по определению (ибо  $e_q = v$  и  $Xv = 0$ ). Если же оно верно для некоторого  $r \leq q$ , то

$$\begin{aligned}
 Xe_{r-2} &= XYe_r = YXe_r + [X, Y]e_r = \\
 &= Y \frac{(q-r)(q+r+2)}{4} e_{r+2} + He_r = \\
 &= \left[ \frac{(q-r)(e_r + r+2)}{4} + r \right] e_r = \\
 &= \frac{(q-r-2)(q+r)}{4} e_r,
 \end{aligned}$$

и, значит, это тождество будет верно и для  $r = 2$ . Тем самым по индукции тождество (7) доказано для всех  $r$ ,  $|r| \leq q$ .

Поскольку, согласно тождеству (6), векторы (9) являются собственными векторами оператора  $H$ , принадлежащими различным собственным значениям  $r$ , и, значит, линейно независимы, отсюда следует, что *линейная оболочка векторов* (9) является подмодулем модуля  $\mathcal{Y}$ , изоморфным модулю  $\mathcal{Y}(q)$ .

Если теперь модуль  $\mathcal{Y}$  является простым модулем, то эта линейная оболочка должна совпадать с  $\mathcal{Y}$ . Этим, во-первых, доказано, что все примитивные элементы модуля  $\mathcal{Y}$  пропорциональны (поскольку этим свойством обладает модуль  $\mathcal{Y}(q)$ ), и во-вторых, что с точностью до изоморфизма модуль  $\mathcal{Y}$  однозначно определяется числом  $q$ . Это доказывает все утверждения теоремы 1.  $\square$

**Следствие 1.** Элемент простого  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля тогда и только тогда примитивен, когда он принадлежит ядру Кег  $X$  оператора  $X$ .  $\square$

Вернемся теперь к произвольным не обязательно простым  $\mathfrak{sl}_2$ -модулям.

Пусть  $\lambda$  — вес  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{Y}_\lambda$  — соответствующее весовое подпространство.

**Теорема 2.** Если  $\lambda = m \geq 0$ , то любой вектор  $v \in \mathcal{Y}_\lambda$  допускает единственное представление вида

$$(10) \quad v = v_0 + Yv_1 + \dots + Y^p v_p,$$

а если  $\lambda = -m < 0$ , — то вида

$$(11) \quad v = Y^m v_0 + Y^{m+1} v_1 + \dots + Y^{m+p} v_p,$$

где  $p$  — в первом случае верхний показатель элемента  $v$ , а во втором — верхний показатель элемента  $X^m v$ , и где в обоих случаях

$$(12) \quad v_0, v_1, \dots, v_p$$

— примитивные элементы, имеющие, соответственно, веса  $m, m+2, \dots, m+2p$

и выражающиеся через элемент  $v$  по формулам вида

$$(13) \quad v_r = \sum_{s=0}^{p-r+e} a_{r,s}^{(\lambda)} Y^s X^{s+r} v, \quad r = 0, 1, \dots, p,$$

в которых  $a_{r,s}^{(\lambda)}$  — рациональные числа, зависящие толь-

ко от  $\lambda$ ,  $r$  и  $s$  (и не зависящие от  $v$ ), а  $\varepsilon = 0$  при  $\lambda \geq 0$  и  $\varepsilon = m$  при  $\lambda = -m < 0$ .

В частности, при  $v = 0$  все элементы (12) равны нулю.

**Доказательство.** Докажем сначала единственность элементов (12).

Пусть, сначала,  $\lambda = m \geq 0$ . Применив к разложению (10) оператор  $X^s$ ,  $0 \leq s \leq p$ , мы, в силу тождеств (4) и (5), получим равенство

$$X^s v = X^s v_0 + a_1 X^{s-1} v_1 + \dots + a_s v_s + a_{s+1} Y v_{s+1} + \dots + a_{s+p} Y^{p-s} v_p,$$

где  $a_s \neq 0$ . Поскольку, ввиду примитивности,  $X^s v_0 = 0$ ,  $X^{s-1} v_1 = 0, \dots, X v_{s-1} = 0$ , это равенство имеет вид

$$(14) \quad X^s v = a_s v_s + a_{s,s+1} Y v_{s+1} + \dots + a_{s,p} Y^{p-s} v_p,$$

где  $a_s \neq 0$ . Таким образом,

$$v = v_0 + Yv_1 + Yv_2 + \dots + Y^p v_p,$$

$$Xv = a_1 v_1 + a_{1,2} Y v_2 + \dots + a_{1,p} Y^{p-1} v_p,$$

(15) . . . . .

$$X^{p-1}v = a_{p-1}v_{p-1} + a_{p-1,p}Yv_p,$$

$$\mathbf{X}^p v = a_p v_p,$$

где  $a_1 \neq 0, \dots, a_{p-1} \neq 0, a_p \neq 0$ .

Из этих уравнений мы последовательно находим элементы  $v_p, v_{p-1}, \dots, v_1, v_0$ :

Это доказывает единственность элементов (12) (а также тот факт, что они выражаются по формулам (13) с  $\varepsilon = 0$ ).

Если же  $\lambda = -m < 0$ , то, применив к разложению (11) оператор  $X^{m+s}$ ,  $0 \leq s \leq p$ , мы снова получим формулы вида (14) с тем лишь отличием, что слева будет фигурировать оператор  $X^{m+s}$ . Поэтому в этом случае для векторов (12) будут иметь место формулы, полу-

чающиеся из формул (15) заменой в правых их частях операторов  $X^s$  операторами  $X^{m+s}$ . Это снова доказывает единственность векторов (12) (и тот факт, что они выражаются по формулам (13) с  $e = m$ ).

Для доказательства существования разложений (11) и (13) достаточно теперь показать, что для любого весового вектора  $v$  формулы (16) (и их вариант при  $\lambda < 0$ ) доставляют нам примитивные векторы  $v_p, v_{p-1}, \dots, v_0$ . Здесь удобнее иметь дело непосредственно с уравнением (15).

Применив к каждому уравнению (15) (или к его варианту при  $\lambda < 0$ ) оператор  $X$  и вычтя из полученного уравнения предыдущее, мы в обоих случаях получим уравнения вида

Поскольку  $a_p \neq 0$ , из последнего уравнения (17) вытекает, что  $Xv_p = 0$ , т. е. что элемент  $v_p$  примитивен.

Для доказательности примитивности следующих элементов  $v_{p-1}, v_{p-2}, \dots$  мы вспомним, что, согласно произведенным при доказательстве следствия 2 предложения 2 вычислениям, для коэффициентов  $a_{s,r}$  уравнений (17) имеет место рекуррентное соотношение

$$a_{s+1, r} = a_{s, r} a_{1, r-s}$$

с начальным условием  $a_{0,r} = 1$ , причем число  $a_{1,r-s}$  для примитивного элемента  $v_{r+1}$  веса  $m + 2r$  равно

$$a(r-s) = (m+r+s+1)(r-s).$$

Отсюда следует, что если элемент  $v$ , примитивен, то

$$(a_{s,r}XY^{r-s} - a_{s+1,r}Y^{r-s-1})v_r =$$

$$= (a_{s,r}a(r-s) - a_{s+1,r}) Y^{r-s-1} v_r = 0.$$

Имея это в виду, предположим уже доказанным, что все элементы  $v_p, \dots, v_{p-r+1}$  примитивны. Тогда в уравнениях (17) все члены, в которых участвуют эти элементы, будут равны нулю (напомним, что  $a_s = a_{s,s}$  для всех  $s$ ), а последнее тождественно не удовлетворяющееся уравнение примет вид

$$a_{p-r} X v_{p-r} = 0.$$

Поэтому  $X v_{p-r} = 0$ , т. е. элемент  $v_{p-r}$  также будет примитивен.

Тем самым по индукции примитивность всех элементов  $v_p, v_{p-1}, \dots, v_0$  полностью доказана.

При  $\lambda \geq 0$  на этом — в силу первого уравнения (15) — доказательство кончается. При  $\lambda = -m < 0$  аналог первого уравнения (15) имеет вид

$$X^m v = v_0 + Y v_1 + \dots + Y^p v_p,$$

и, чтобы получить разложение (11), надо применить оператор  $Y^m$  (и разделить все элементы  $v_s$  на коэффициент  $a_m \neq 0$ ).  $\square$

**Замечание 1.** Для простого  $\mathfrak{sl}_2$ -модуля  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(q)$  теорема 2 очевидна. Поэтому она очевидна и для модуля  $\mathcal{V}$ , являющегося прямой суммой (в понятном смысле) простых модулей. С другой стороны, можно доказать, что любой  $\mathfrak{sl}_2$ -модуль является прямой суммой простых, что, таким образом, сразу дает теорему 2. Однако это утверждение (известное как теорема Вейля о полной приводимости и справедливое не только для алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$ , но и для любых так называемых полупростых алгебр Ли) выражает очень глубокий факт и его доказательство (несколько не упрощающееся для специального случая алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2$ ) полностью лежит вне рамок нашего изложения.

**Следствие 1.** При  $\lambda = m > 0$  для нижнего показателя  $q$  произвольного весового элемента  $v$  имеют место неравенства

$$(18) \quad m \leq q \leq m + p,$$

и в разложении (10) все элементы  $v_{q-m+1}, \dots, v_p$  равны нулю, т. е. это разложение имеет вид

$$(19) \quad v = v_0 + Y v_1 + \dots + Y^{q-m} v_{q-m}.$$

Если же  $\lambda = -m < 0$ , то

$$(20) \quad q \leq p,$$

элементы  $v_{q+1}, \dots, v_p$  в разложении (11) равны нулю и это разложение имеет вид

$$(21) \quad v = Y^m v_0 + Y^{m+1} v_1 + \dots + Y^{m+q} v_q.$$

**Доказательство.** Так как каждый элемент  $v_r$ ,  $r = 0, \dots, p$ , примитивен, то его нижний показатель равен его весу  $m + 2r$ , и, значит,  $Y^{m+2r+1} v_r = 0$ . Тем более

$$Y^{m+p+r+1} v_r = 0.$$

Поэтому, применив к разложению (10) оператор  $Y^{m+p+1}$ , а к разложению (11) — оператор  $Y^{p+1}$ , мы в обоих случаях получим нуль. Это доказывает неравенство (20) и правое неравенство (18).

Аналогично, применив к разложению (10) оператор  $Y^{q+1}$  и утоля, что  $Y^{q+r+1} v_r = 0$  при  $q+r \geq m+2r$ , мы получим равенство

$$Y^{2q-m+2} v_{q-m+1} + Y^{2q-m+3} v_{q-m+2} + \dots + Y^{q+p+1} v_p = 0$$

(при  $q < m$  — случай, пока нами не исключенный! — условно предполагается, что  $q - m + 1 = 0$ ). Это равенство является разложением вида (11) нулевого элемента веса  $-2q + m - 2$ . Поэтому, в силу единственности этого разложения, все элементы  $v_{q-m+1}, v_{q-m+2}, \dots, v_p$  равны нулю. Следовательно,  $q \geq m$  (напомним, что по условию  $v \neq 0$  и, значит, равенства  $v_0 = 0, v_1 = 0, \dots, v_p = 0$  исключены) и для  $v$  имеет место разложение (19).

Наконец, при  $\lambda = -m < 0$  мы, применив к разложению (11) оператор  $Y^{q+1}$ , получим разложение

$$Y^{2q+m+2} v_{q+1} + Y^{2q+m+3} v_{q+2} + \dots + Y^{q+m+p+1} v_p = 0$$

вида (11) нулевого элемента веса  $-2q - m - 2$ . Поэтому в этом случае  $v_{q+1} = 0, \dots, v_p = 0$ , и для  $v$  имеет место разложение (21).  $\square$

**Следствие 2.** Для любого  $m \geq 0$  отображения

$$Y^m: \mathcal{V}_m \rightarrow \mathcal{V}_{-m} \quad \text{и} \quad X^m: \mathcal{V}_{-m} \rightarrow \mathcal{V}_m$$

являются (вообще говоря, не взаимно обратными) изоморфизмами.

**Доказательство.** Из формулы (21) непосредственно следует, что любой элемент  $v \in \mathcal{V}_{-m}$  имеет вид  $Y^m w$ , где  $w = v_0 + Y v_1 + \dots + Y^q v_q \in \mathcal{V}_m$ .

С другой стороны, равенство  $Y^m v = 0$  для отличного от нуля элемента  $v \in \mathcal{V}_m$  означает, что  $q < m$ .

Поскольку это противоречит левому неравенству (18), равенство  $Y^m v = 0$  возможно только при  $v = 0$ . Это доказывает следствие 2 в отношении отображения  $Y^m$ .

Далее, применив к разложению (10) элемента  $v \in \mathcal{V}_m$  оператор  $X^m Y^m$ , мы, согласно формулам (4) и (5), получим, что

$$X^m Y^m v = a_0 v_0 + a_1 Y v_1 + \dots + a_p Y^p v_p,$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_p \neq 0$ . Поэтому если  $X^m Y^m v = 0$ , то в силу единственности разложения (10) должны иметь место равенства

$$a_0 v_0 = 0, \quad a_1 v_1 = 0, \dots, \quad a_p v_p = 0,$$

что возможно только при  $v_0 = 0, v_1 = 0, \dots, v_p = 0$ , т. е. при  $v = 0$ . Следовательно, на  $\mathcal{V}_m$  отображение  $X^m Y^m$ , а потому и отображение  $X^m$ , является мономорфизмом.

Но, по уже доказанному, линейные пространства  $\mathcal{V}_m$  и  $\mathcal{V}_{-m}$  изоморфны и потому имеют одинаковую размерность. Так как мономорфное отображение линейных пространств одной и той же размерности является изоморфизмом, следствие 2 тем самым полностью доказано.  $\square$

**Следствие 3.** Весовой элемент  $v$  модуля  $\mathcal{V}$  тогда и только тогда примитивен, когда его вес  $\lambda$  неотрицателен и  $Y^{\lambda+1}v = 0$ .

**Доказательство.** Если элемент  $v$  примитивен, то его вес  $\lambda$  неотрицателен и равен нижнему показателю  $q$ . Поэтому  $Y^{\lambda+1}v = Y^{q+1}v = 0$ . Обратно, если  $\lambda = m \geq 0$  и  $Y^{m+1}v = 0$ , то для элемента  $v$  имеет место неравенство  $q \leq m$ , что возможно только при  $q = m$ . Поэтому разложение (19) имеет вид  $v = v_0$  и, значит, элемент  $v$  примитивен.  $\square$