Лекция 19

Полулинейные изоморфизмы. — Полулинейные функционалы.— Обобщенные тензоры.— Полуторалинейные функционалы. — Эрмитовы функционалы. — Эрмитовы матрицы и формы.

С этой лекции мы начнем изучение некоторых свойств комплексных линейных пространств, существенно использующих специфику поля комплексных чисел (существование комплексного сопряжения).

Пусть $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}_1$ — линейные пространства над полем $\mathbb{C}$.

Определение 1. Отображение φ: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$ называется *полулинейным* (или *сопряженно линейным*), если

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

и

$$\varphi(cx)=\bar{c}\varphi(x)$$

для любых векторов x, $y \in \mathscr{V}$ и любого комплексного числа $c \in \mathbb{C}$ (где $\bar{c}=a-ib$ — число, комплексно сопряженное с числом $c=a+ib$).

Биективное полулинейное отображение называется *полулинейным изоморфизмом.*

Примером полулинейного изоморфизма является отображение $z \longmapsto \bar{z}$ вещественно-комплексного пространства $\mathscr{V}$ на себя. (Напомним — см. определение 1 лекции I.19, — что любой вектор z вещественно-комплексного пространства единственным образом представляется в виде суммы $x+iy$, где x и y — вещественные векторы. При этом, если $z=x+iy$, то, по определению, $\bar{z}=x-iy$.)

Другой пример мы получим, рассмотрев для произвольного комплексного векторного пространства $\mathscr{V}$ множество $\bar{\mathscr{V}}$ всевозможных символов вида $\bar{x}$, где $x \in \mathscr{V}$. Сложение этих символов и их умножение на числа $c \in \mathbb{C}$ мы определим формулами

$$\bar{x}+\bar{y}=\overline{x+y}, \qquad c\bar{x}=\overline{\bar{c}x}.$$

Автоматическая проверка показывает, что по отношению к этим операциям множество $\bar{\mathscr{V}}$ является линей-

ным пространством над полем $\mathbb{C}$ и что отображение $\varphi_0\colon \mathscr{V} \to \overline{\mathscr{V}}$, определенное формулой

$$\varphi_0(x) = \bar{x}, \tag{1}$$

является полулинейным изоморфизмом.

Пространство $\overline{\mathscr{V}}$ называется пространством, *комплексно сопряженным* с пространством $\mathscr{V}$.

Заметим, что любой полулинейный изоморфизм $\varphi\colon \mathscr{V} \to \mathscr{V}_1$ единственным образом разлагается в композицию

$$\varphi = \varphi' \circ \varphi_0$$

полулинейного изоморфизма φ_0 и обычного (линейного) изоморфизма $\varphi'\colon \overline{\mathscr{V}} \to \mathscr{V}_1$, действующего по формуле

$$\varphi'(\bar{x}) = \varphi(x), \qquad x \in \mathscr{V}.$$

В этом смысле $\overline{\mathscr{V}}$ является «универсальным представителем» всех пространств $\mathscr{V}_1$, полулинейно изоморфных пространству $\mathscr{V}$.

Частным случаем полулинейных отображений являются *полулинейные функционалы*, т. е. такие отображения $\xi\colon \mathscr{V} \to \mathbb{C}$, что

$$\xi(x+y) = \xi(x) + \xi(y)$$

и

$$\xi(cx) = \bar{c}\xi(x)$$

для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$ и любого числа $c \in \mathbb{C}$. Относительно обычных операций

$$(\xi + \eta)(x) = \xi(x) + \eta(x), \qquad x \in \mathscr{V},$$
$$(c\xi)(x) = c\xi(x), \qquad c \in \mathbb{C},\ x \in \mathscr{V}$$

множество всех полулинейных функционалов $\mathscr{V} \to \mathbb{C}$ является, очевидно, линейным пространством. Мы будем обозначать его символом $\mathscr{V}^*$.

Свойства полулинейных функционалов вполне аналогичны свойствам линейных функционалов. Например, в любом базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ каждый полулинейный функционал $\xi \in \mathscr{V}^*$ выражается формулой

$$\xi(x) = \xi_i \bar{x}^i, \quad \text{если} \quad x = x^i e_i,$$

где $\xi_i = \xi(e_i)$, и любой функционал такого вида полулинеен. Соотношения

$$\bar{e}^i(e_j) = \delta^i_j, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

однозначно характеризуют полулинейные функционалы $\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n \in \mathscr{V}^*$, обладающие тем свойством, что

$$\xi = \xi_i \bar{e}^i \text{ для любого } \xi \in \mathscr{V}^*,$$

и поэтому составляющие базис пространства $\mathscr{V}^*$ (называемый *сопряженным базисом*). Каждый вектор $x \in \mathscr{V}$ определяет по формуле

$$\hat{x}(\xi) = \overline{\xi(x)}, \qquad \xi \in \mathscr{V}^*,$$

полулинейный функционал $\hat{x}$ на $\mathscr{V}^*$ и соответствие $x \mapsto \hat{x}$ является изоморфизмом пространства $\mathscr{V}$ на пространство $\mathscr{V}^{**}$. (В дальнейшем мы будем посредством этого изоморфизма отождествлять $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^{**}$.)

Все это немедленно доказывается непосредственно, но может быть также выведено из того очевидного факта, что для любого линейного функционала $\xi: \mathscr{V} \to \mathbb{C}$ (элемента пространства $\mathscr{V}'$) отображение $\bar{\xi}: \mathscr{V} \to \mathbb{C}$, определенное формулой

$$\bar{\xi}(x) = \overline{\xi(x)}, \qquad x \in \mathscr{V}, \tag{2}$$

является полулинейным функционалом (принадлежит линеалу $\mathscr{V}^*$), и получающееся отображение

$$\varphi: \mathscr{V}' \to \mathscr{V}^*, \qquad \xi \mapsto \bar{\xi},$$

представляет собой полулинейный изоморфизм.

Согласно сказанному выше полулинейный изоморфизм φ определяет линейный изоморфизм $\varphi': \overline{\mathscr{V}'} \to \mathscr{V}^*$, действующий по формуле $\varphi'(\bar{\xi}) = \bar{\xi}$ (справа в этой формуле символ $\bar{\xi}$ обозначает функционал (2), а слева — вектор абстрактного пространства $\overline{\mathscr{V}'}$, отвечающий вектору ξ пространства $\overline{\mathscr{V}'}$). В дальнейшем мы будем пространства $\overline{\mathscr{V}'}$ и $\mathscr{V}^*$ отождествлять посредством этого изоморфизма (и, в частности, не будем различать два значения символа $\bar{\xi}$).

Замечание 1. Пространство $\overline{\mathscr{V}'} = \mathscr{V}^*$ следует, вообще говоря, отличать от пространства $\overline{\mathscr{V}'}$, элементами которого являются линейные функционалы $\xi: \mathscr{V} \to \mathbb{C}$. Однако легко видеть, что для любого линейного

функционала $\bar{\xi}: \overline{\mathscr{V}} \to \mathbb{C}$, отображение $'\xi: \mathscr{V} \to \mathbb{C}$, определенное формулой

$$'\xi(x) = \bar{\xi}(\bar{x}), \qquad x \in \mathscr{V},$$

является полулинейным функционалом $\mathscr{V} \to \mathbb{C}$ и соответствие $\bar{\xi} \mapsto {}'\xi$ задает (линейный!) изоморфизм $\overline{\mathscr{V}'} \to \mathscr{V}^*$. Поэтому пространства $\overline{\mathscr{V}'}$ и $\mathscr{V}^*$ можно посредством этого изоморфизма отождествлять.

Замечание 2. В случаях, когда это не приводит к недоразумениям, в обозначении векторов пространства $\overline{\mathscr{V}}$ можно опускать черту сверху, т. е. считать векторами этого пространства векторы самого пространства $\mathscr{V}$ (но, конечно, с другим законом умножения на комплексные числа). Тогда $\bar{\xi}$ и $'\xi$ будут неотличимы друг от друга, а векторами пространства $\mathscr{V}^*$ окажутся линейные функционалы $\xi: \mathscr{V} \to \mathbb{C}$, произведение которых на числа $c \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$(c\xi)(x) = \xi(\bar{c}x) = \bar{c}\xi(x), \qquad x \in \mathscr{V}.$$

Для любого линейного оператора $A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ формула

$$(A^*\xi)(x) = \xi(Ax), \qquad x \in \mathscr{V}, \qquad \xi \in \mathscr{V}^*,$$

корректно определяет линейный (проверьте!) оператор $A^*: \mathscr{V}^* \to \mathscr{V}^*$. Подобно оператору A', этот оператор также называется *сопряженным оператором*.

Фактически то же вычисление, что и для оператора A' (см. лекцию 15), показывает, что если в базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ оператор A имел матрицу $A = \|a_i^j\|$, то в сопряженном базисе $\bar{e}^1, \ldots, \bar{e}^n$ пространства $\mathscr{V}^*$ оператор A^* будет иметь транспонированную и комплексно сопряженную матрицу $\bar{A}^\top = \|\bar{a}_j^i\|$.

Отображение $A \mapsto A^*$ кольца $\operatorname{End}\mathscr{V}$ в кольцо $\operatorname{End}\mathscr{V}^*$ является, очевидно, антигомоморфизмом:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, \qquad (AB)^* = B^*A^*,$$

и (в силу отождествления $\mathscr{V} = \mathscr{V}^{**}$) обладает свойством инволютивности:

$$A^{**} = A$$

(и, значит, является антиизоморфизмом). Однако в отличие от отображения $A \mapsto A'$ оно не линейно, а полулинейно:

$$(cA)^* = \bar{c}A^* \text{ для любого } A: \mathscr{V} \to \mathscr{V}.$$

Таким образом, *для каждого комплексного линеала* $\mathscr{V}$ *алгебры* $\operatorname{End}\mathscr{V}$ *и* $\operatorname{End}\mathscr{V}^*$ *естественно полулинейно изоморфны.*

Согласно лекции 5 тензоры на линейном пространстве $\mathscr{V}$ отождествляются с полилинейными функционалами, аргументы которых принадлежат либо пространству $\mathscr{V}$ (являются векторами), либо сопряженному пространству $\mathscr{V}'$ (являются ковекторами). В случае, когда $\mathscr{V}$ представляет собой линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, можно более общим образом рассматривать функционалы (от векторов и ковекторов), линейные только по части аргументов и полулинейные по остальным аргументам. Такого рода функционалы мы будем называть *обобщенными тензорами.* (Более выразительный термин, к сожалению, пока еще никем не предложен.)

Конечно, в силу отождествления $\mathscr{V}^* = \overline{\mathscr{V}'}$ (см. замечание 1) каждый обобщенный тензор можно рассматривать как обычный полилинейный функционал, но уже от аргументов четырех сортов, принадлежащих, соответственно, пространствам $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}'$, $\overline{\mathscr{V}}$ и $\overline{\mathscr{V}'}$. (Введение в рассмотрение функционалов, аргументы которых принадлежат пространству $\overline{\mathscr{V}'}$, не дает, в силу естественного отождествления $\mathscr{V}^* = \overline{\mathscr{V}'}$, ничего нового.)

Пусть обобщенный тензор T зависит от p векторных и q ковекторных аргументов и пусть по первым a векторным аргументам и по первым b ковекторным аргументам он линеен, а по остальным полулинеен. Тогда для любых индексов $i_1, \ldots, i_a, i_{a+1}, \ldots, i_p$ и $j_1, \ldots, j_b, j_{b+1}, \ldots, j_q$ в каждом базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ будут определены числа

(3)
$$T\left(e_1, \ldots, e_{i_0}, e_{i_{a+1}}, \ldots, e_{i_p}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_b}, e^{j_{b+1}}, \ldots, e^{j_q}\right),$$

называемые *компонентами* тензора T в базисе $e_1, \ldots, e_n$.

В соответствии с общими принципами тензорных обозначений компоненты (3) следовало бы обозначить символами $T^{j_1 \cdots j_b j_{b+1} \cdots j_q}_{i_1 \cdots i_a i_{a+1} \cdots i_p}$ (что некоторые авторы и делают). Однако обычно используется более выразительное обозначение

(4)
$$T^{\cdot\cdot\cdot\ {}_b\bar{j}_{b+1} \cdots \bar{j}_q}_{i_1\ \ {}_a\bar{i}_{a+1} \cdots \bar{i}_p},$$

в котором явно указано, по каким аргументам тензор T линеен, а по каким полулинеен.

Замечание 3. Чтобы формально оправдать обозначения (4), следует трактовать T как полулинейный функционал от векторов пространств $\mathscr{V}$, $\overline{\mathscr{V}}$, $\mathscr{V}'$ и $\overline{\mathscr{V}'}$ и для любого базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ базис $\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_n$ пространства $\overline{\mathscr{V}}$ обозначать через $e_{\bar{1}}, \ldots, e_{\bar{n}}$, а базис $\overline{e^1}, \ldots, \overline{e^n}$ пространства $\overline{\mathscr{V}'}$ — через $e^{\bar{1}}, \ldots, e^{\bar{n}}$. Тогда компоненты (4) будут определяться тензорно правильной формулой

$$T^{j_1 \ldots j_b \bar{j}_{b+1} \ldots \bar{j}_q}_{i_1 \ldots i_a \bar{i}_{a+1} \ldots \bar{i}_p} =$$
$$= T\left(e_{i_1}, \ldots, e_{i_a}, e_{\bar{i}_{a+1}}, \ldots, e_{\bar{i}_p}, e^{j_1}, \ldots, e^{j_b}, e^{\bar{j}_{b+1}}, \ldots, e^{\bar{j}_q}\right).$$

Значение тензора T на векторах

$$x_1 = x_1^{i_1} e_{i_1}, \ \ldots, \ x_p = x_p^{i_p} e_{i_p}$$

и ковекторах

$$\xi^1 = \xi^1_{j_1} e^{j_1}, \ \ldots, \ \xi^p = \xi^p_{j_q} e^{j_q}$$

задается полилинейной формой

$$(5) \qquad T^{j_1 \ldots j_b \bar{j}_{b+1} \ldots \bar{j}_q}_{i_1 \ldots i_a \bar{i}_{a+1} \ldots \bar{i}_p} x_1^{i_1} \ldots x_a^{i_a} \bar{x}^{i_{a+1}}_{a+1} \ldots \bar{x}^{i_p}_p \xi^1_{j_1} \ldots \xi^b_{j_b} \bar{\xi}^{b+1}_{\bar{j}_{b+1}} \ldots \bar{\xi}^q_{\bar{j}_q}$$

от координат этих векторов и ковекторов и от чисел, им комплексно сопряженных. Впрочем, в соответствии с обозначениями (4) обычно полагают $\bar{x}^{\bar{i}} = x^{\bar{i}}$, $\bar{\xi}_j = \xi_{\bar{j}}$ и записывают форму (5) в виде

$$T^{j_1 \ldots j_b \bar{j}_{b+1} \ldots \bar{j}_q}_{i_1 \ldots i_a \bar{i}_{a+1} \ldots \bar{i}_p} x_1^{i_1} \ldots x_a^{i_a} x^{\bar{i}_{a+1}}_{a+1} \ldots x^{\bar{i}_p}_p \xi^1_{j_1} \ldots \xi^b_{j_b} \xi^{b+1}_{\bar{j}_{b+1}} \ldots \xi^q_{\bar{j}_q}.$$

При изменении базиса компоненты (4) преобразуются по обобщенному тензорному закону

$$T^{j'_1 \ldots j'_b \bar{j}'_{b+1} \ldots \bar{j}'_q}_{i'_1 \ldots i'_a \bar{i}'_{a+1} \ldots \bar{i}'_p} =$$
$$= c^{i_1}_{i'_1} \ldots c^{i_a}_{i'_a} c^{\bar{i}_{a+1}}_{\bar{i}'_{a+1}} \ldots c^{\bar{i}_p}_{\bar{i}'_p} c^{j'_1}_{j_1} \ldots c^{j'_b}_{j_b} c^{\bar{j}'_{b+1}}_{\bar{j}_{b+1}} \ldots c^{\bar{j}'_q}_{\bar{j}_q} T^{j_1 \ldots j_b \bar{j}_{b+1} \ldots \bar{j}_q}_{i_1 \ldots i_a \bar{i}_{a+1} \ldots \bar{i}_p},$$

где $c^{\bar{i}}_{\bar{i}'} = \overline{c^i_{i'}}$ (и, аналогично, $c^{\bar{j}'}_{\bar{j}} = \overline{c^j_{j'}}$).

Рассмотрим более внимательно функционалы от двух векторных аргументов, линейные по первому аргументу и полулинейные по второму.

Определение 2. Функционал A от двух векторных аргументов, линейный по первому аргументу и полулинейный по второму, называется ***полуторалинейным функционалом.***

Ясно, что все полуторалинейные функционалы естественным образом составляют линейное пространство (над полем $\mathbb{C}$).

Согласно сказанному выше каждый полуторалинейный функционал A на пространстве $\mathbb{C}$ можно рассматривать как билинейный функционал от векторов из $\mathscr{V}$ и $\bar{\mathscr{V}}$.

В произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ компоненты

$$a_{\alpha\beta} = A(e_\alpha, e_\beta), \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n,$$

полуторалинейного функционала A (при интерпретации A как билинейного функционала от векторов из $\mathscr{V}$ и $\bar{\mathscr{V}}$, записывающиеся формулой $a_{\alpha\bar{\beta}} = A(e_\alpha, e_{\bar{\beta}})$) составляют матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{6}$$

называемую ***матрицей функционала*** A.

[Мы пользуемся здесь для обозначения индексов греческими буквами, чтобы избежать возможной коллизии с обозначением i для мнимой единицы $\sqrt{-1}$.]

При изменении базиса матрица (6) переходит в матрицу $\bar{C}^{\mathsf{T}} AC$ с элементами $c^\alpha_{\alpha'} \bar{c}^\beta_{\beta'} a_{\alpha\beta}$, где $C = \| c^\alpha_{\alpha'} \|$ — матрица перехода, связывающая новый базис со старым.

Значение полуторалинейного функционала A на векторах $x = x^\alpha e_\alpha$ и $y = y^\beta e_\beta$ выражается билинейной формой

$$A(x, y) = a_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{y}^\beta \tag{7}$$

от $x^1, \ldots, x^n$ и $\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n$. В матричных обозначениях формула (7) имеет вид

$$A(x, y) = x^{\mathsf{T}} A \bar{y},$$

где x и y — столбцы координат векторов x и y, а A — матрица (6).

Это, в частности, показывает, что *полуторалинейный функционал однозначно определяется своей матрицей.*

Каждый полуторалинейный функционал A определяет по формуле

$$Q(x) = A(x, x), \qquad x \in \mathscr{V}, \tag{8}$$

некоторый функционал Q от одного аргумента $x \in \mathscr{V}$.

Функционалы вида (8) являются аналогами квадратичных функционалов, но, как ни странно, никакого более или менее общепринятого названия они не имеют.

В координатах функционал (8) выражается билинейной формой

$$Q(x) = a_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta = x^\top A \bar{x} \tag{9}$$

от $x^1, \ldots, x^n$ и $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$.

В случае билинейных функционалов отображение $A \mapsto Q$ имеет нетривиальное ядро (состоящее из всех кососимметрических функционалов). Замечательно, что для полуторалинейных функционалов ядро этого отображения, напротив, тривиально.

Предложение 1. *Если $A(x, x) = 0$ для любого вектора $x \in \mathscr{V}$, то $A = 0$.*

Доказательство. В силу полуторалинейности функционала A для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$ имеют место равенства

$$A(x+y, x+y) = A(x, x) + A(x, y) + A(y, x) + A(y, y),$$
$$A(x+iy, x+iy) = A(x, x) - iA(x, y) + iA(y, x) + A(y, y).$$

С другой стороны, по условию,

$$A(x, x) = 0, \qquad A(y, y) = 0,$$
$$A(x+y, x+y) = 0, \qquad A(x+iy, x+iy) = 0.$$

Поэтому

$$A(x, y) + A(y, x) = 0,$$
$$A(x, y) - A(y, x) = 0,$$

и, значит, $A(x, y) = 0$. По определению это и означает, что $A = 0$. □

В случае, когда пространство $\mathscr{V}$, на котором задан полуторалинейный функционал A, вещественно-комплексно (например, является комплексификацией некото-

рого вещественного пространства), формулы

$$B(x, y) = \operatorname{Re} A(x, y), \qquad x, y \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}},$$
$$C(x, y) = \operatorname{Im} A(x, y), \qquad x, y \in \mathscr{V}^{\mathbb{R}},$$

определяют на вещественном подпространстве $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ пространства $\mathscr{V}$ два билинейных функционала B и C, принимающих вещественные значения.

Функционал B называется *вещественной частью* функционала A и обозначается символом $\operatorname{Re} A$, а функционал C — его *мнимой частью* и обозначается символом $\operatorname{Im} A$.

Функционал A легко восстанавливается по функционалам B и C:

$$A(x + iy, u + iv) = A(x, u) + iA(y, u) - iA(x, v) - A(y, v) =$$
$$= [B(x, u) - B(y, v) - C(y, u) + C(x, v)] +$$
$$+ i[C(x, u) - C(y, v) + B(y, u) - B(x, v)],$$

причем — как показывает автоматическое вычисление — для любых двух билинейных функционалов B, C на линеале $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ формула

$$A(x + iy, u + iv) = [B(x, u) - B(y, v) - C(y, u) + C(x, v)] +$$
$$+ i[C(x, u) - C(y, v) + B(y, u) - B(x, v)]$$

определяет полуторалинейный функционал A, для которого $\operatorname{Re} A = B$ и $\operatorname{Im} A = C$. Таким образом, *в вещественно-комплексном пространстве $\mathscr{V}$ полуторалинейные функционалы A находятся в естественном биективном соответствии с парами* $(\operatorname{Re} A, \operatorname{Im} A)$ *билинейных функционалов на пространстве $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$.*

Аналог симметрических функционалов вводится для полуторалинейных функционалов следующим определением:

Определение 3. Полуторалинейный функционал A называется *эрмитовым* (или *эрмитово симметрическим*), если

$$A(x, y) = \overline{A(y, x)} \tag{10}$$

для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$. Функционал (8), отвечающий эрмитову функционалу A, также называется *эрмитовым*.

Предложение 2. Полуторалинейный функционал A тогда и только тогда эрмитов, когда для любого вектора $x \in \mathcal{V}$ число $A(x, x)$ вещественно.

Доказательство. При $x = y$ из формулы (10) следует, что для любого эрмитова функционала A число $A(x, x)$ вещественно. Чтобы доказать обратное утверждение, рассмотрим (очевидно, полуторалинейный) функционал B, задаваемый формулой

$$B(x, y) = A(x, y) - \overline{A(y, x)}, \qquad x, y \in \mathcal{V}.$$

Так как число $A(x, x)$ по условию вещественно (и, значит, равно $\overline{A(x, x)}$), то $B(x, x) = 0$ для любого вектора $x \in \mathcal{V}$. Поэтому, согласно предложению 1, функционал B равен нулю, и, значит, функционал A эрмитов. □

Аналогом кососимметрических функционалов являются полуторалинейные *косоэрмитовы* функционалы, характеризующиеся соотношением

$$A(x, y) = -\overline{A(y, x)}.$$

Однако эти функционалы тривиально сводятся к эрмитовым, поскольку, как легко видеть, *функционал A тогда и только тогда косоэрмитов, когда функционал iA эрмитов.*

Любой полуторалинейный функционал A единственным образом разлагается в сумму эрмитова и косоэрмитова функционалов $A_{\text{эрм}}$ и $A_{\text{кос}}$:

$$A = A_{\text{эрм}} + A_{\text{кос}},$$

где

$$A_{\text{эрм}}(x, y) = \frac{A(x, y) + A(y, x)}{2}$$

и

$$A_{\text{кос}}(x, y) = \frac{A(x, y) - A(y, x)}{2}$$

для любых векторов $x, y \in \mathcal{V}$ (см. в лекции 5 аналогичное утверждение для билинейных функционалов).

Полагая $A_{\text{эрм}} = B$ и $A_{\text{кос}} = iC$, мы получаем, таким образом, что *любой полуторалинейный функционал A единственным образом представляется в виде*

$$A = B + iC,$$

где B и C — эрмитовы функционалы.

Поскольку все эрмитовы функционалы очевидным образом составляют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$

вещественных чисел, это означает (см. определение 1 лекции I.19), что *линейное пространство всех полуторалинейных функционалов обладает естественной структурой вещественно-комплексного пространства.* Роль вещественных векторов этого пространства играют эрмитовы функционалы.

В вещественно-комплексном пространстве $\mathscr{V}$ вещественная часть $\operatorname{Re} A$ произвольного эрмитова функционала A очевидно симметрична, а мнимая часть $\operatorname{Im} A$ кососимметрична. Обратно, легко видеть, что если для полуторалинейного функционала A функционал $\operatorname{Re} A$ симметричен, а функционал $\operatorname{Im} A$ кососимметричен, то функционал A эрмитов. Таким образом, справедливо следующее предложение:

Предложение 3. *Полуторалинейный функционал на вещественно-комплексном пространстве тогда и только тогда эрмитов, когда его вещественная часть симметрична, а мнимая — кососимметрична.*

Матрица (6) эрмитова функционала A в произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ удовлетворяет, очевидно, соотношению

$$a_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\beta\alpha}, \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, n,$$

т. е. — в матричных обозначениях — соотношению

$$A = \bar{A}^{\mathrm{T}}. \tag{11}$$

Такие матрицы называются *эрмитовыми.*

Легкое вычисление показывает (ср. аналогичные вычисления в лекции 5 для симметрического функционала), что *полуторалинейный функционал A тогда и только тогда эрмитов, когда его матрица эрмитова.*

Записав эрмитову матрицу A в виде $B + iC$, где B и C — вещественные матрицы, мы немедленно получим, что условие эрмитовости (11) равносильно тому, что матрица B симметрична, а матрица C кососимметрична:

$$B = B^{\mathrm{T}}, \qquad C = -C^{\mathrm{T}}.$$

Замечание 4. Задание базиса $e_1, \ldots, e_n$ определяет в $\mathscr{V}$ вещественно-комплексную структуру, по отношению к которой этот базис вещественный (соответствующее вещественное подпространство $\mathscr{V}^{\mathbb{R}}$ состоит из всех вещественных линейных комбинаций векторов $e_1, \ldots, e_n$). Рассмотрев вещественную и мнимую части эрмитова функционала A относительно этой структуры,

мы немедленно обнаружим, что матрица B является матрицей (в базисе $e_1, \ldots, e_n$) симметрического функционала $\operatorname{Re} A$, а матрица C — матрицей кососимметрического функционала $\operatorname{Im} A$.

Билинейная форма (7), выражающая значения эрмитова функционала (т. е., иными словами, имеющая эрмитову матрицу), называется *эрмитовой формой* от $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$. (Обратите внимание на терминологическую тонкость: форма (7) является билинейной формой от $x^1, \ldots, x^n$ и $\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^n$ и эрмитовой формой от $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$.)

При $y^1 = x^1, \ldots, y^n = x^n$ форма

$$a_{\alpha\beta} x^\alpha \bar{x}^\beta = x^\top A \bar{x} \tag{12}$$

называется *эрмитовой формой от* $x^1, \ldots, x^n$. Она представляет собой билинейную форму от $x^1, \ldots, x^n$ и $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$.