Лекция 20

Унитарные пространства. — Пространство, сопряженное унитарному пространству. — Сопряженные операторы. — Самосопряженные операторы. — Положительные операторы.

Тот факт, что для каждого эрмитова функционала A и каждого вектора $x \in \mathscr{V}$ число $A(x, x)$ вещественно, делает возможным следующее определение:

Определение 1. Эрмитов функционал A на комплексном пространстве $\mathscr{V}$ называется *положительно определенным*, если

$$A(x, x) > 0$$

для любого отличного от нуля вектора $x \in \mathscr{V}$.

Определение 2. Линейное пространство $\mathscr{V}$ над полем $\mathbb{C}$ называется *унитарным*, если в нем задан некоторый положительно определенный эрмитов полуторалинейный функционал. Этот функционал называется *скалярным умножением*, и его значение на векторах x и y — *скалярное произведение* этих векторов — обозначается символом (x, y).

Примером унитарного пространства является пространство $\mathbb{C}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ задано формулой

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n.$$

Замечание о терминологии. В теории унитарных пространств до сих пор нет устоявшейся терминологии. Например, некоторые авторы называют скалярное произведение в унитарном пространстве *эрмитовой метрикой* (и в соответствии с этим унитарные пространства — *эрмитовыми пространствами*), а произвольные эрмитовы в нашем смысле функционалы (и формы) — *псевдоэрмитовыми метриками*. Поэтому, когда в какой-нибудь статье или книге используется, скажем, термин «эрмитова форма», нужно обязательно удостовериться, предполагает ли автор эту форму положительно определенной или нет.

Понятие унитарного пространства является точным комплексным аналогом понятия евклидова простран-

ства, и теория унитарных пространств на своих начальных этапах полностью аналогична известной нам теории евклидовых пространств (см. лекции I. 12 и I. 13). Так, например, в унитарном пространстве:

а) определена длина $|x| = \sqrt{(x, x)}$ произвольного вектора x;

б) справедливо неравенство Коши — Буняковского $|(x, y| \leqslant |x| \cdot |y|$ (а, значит, и неравенство треугольника $|x + y| \leqslant |x| + |y|$);

в) имеет смысл понятие ортогональных векторов, ортонормированных семейств векторов и, в частности, ортонормированных базисов;

г) выполняется неравенство Бесселя (предложение 1 лекции I. 13; только вместо xx_i^2 надо, естественно, писать $|x_i|^2$);

д) имеет место аналог предложения 2 лекции I. 13 о свойствах ортонормированных базисов (только, скажем, равенство Парсеваля будет теперь иметь вид $(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$);

е) применим процесс ортогонализации Грама — Шмидта и т. п.

Конечно, одинаково формулируемые теоремы имеют для евклидовых и унитарных пространств, как правило, различный геометрический смысл. Например, факт существования ортонормированного базиса означает для евклидовых пространств, что любое n-мерное евклидово пространство изоморфно пространству $\mathbb{R}^n$ с умножением $(x, y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$, а для унитарных пространств — что любое n-мерное унитарное пространство изоморфно пространству $\mathbb{C}^n$ с умножением $(x, y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$.

Доказательства параллельных утверждений для евклидовых и унитарных пространств могут при этом несколько различаться. Например, как в евклидовом, так и в унитарном пространствах доказательство неравенства Коши — Буняковского основывается на рассмотрении функции

$$f(t) = (x + ty, x + ty) \geqslant 0$$

(см. лекцию I. 12). Но если в евклидовом пространстве эта функция является квадратным трехчленом

$$f(t) = |x|^2 + 2t(x, y) + t^2|y|^2$$

без каких-либо оговорок, то в унитарном пространстве ее можно представить в виде квадратного трехчлена

$$f(t) = |x|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\,(x, y) + t^2 |y|^2$$

только при вещественных t. В евклидовом пространстве свойство неотрицательности трехчлена $f(t)$ (равносильное неотрицательности его дискриминанта $(x, y)^2 - |x|^2 \cdot |y|^2$) сразу дает нам неравенство Коши — Буняковского, а в унитарном оно позволяет получить лишь неравенство

$$|\,\mathrm{Re}\,(x, y)\,| \leqslant |x||y|,$$

из которого неравенство Коши — Буняковского нужно еще вывести (что нетрудно: если $R = |(x, y)|$, и, значит, $(x, y) = Re^{i\varphi}$, то $(e^{-i\varphi}x, y) = R = \mathrm{Re}\,(e^{-i\varphi}x, y)$, и, по доказанному, $R \leqslant |e^{-i\varphi}x|\,|y| = |x|\,|y|$).

На унитарный случай переносятся и все свойства ортогональных дополнений (вплоть до разложения $\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}^{\perp}$, доказательство которого, изложенное в замечании 3 лекции 5, сохраняется дословно).

В дальнейшем, насколько это возможно, мы будем доказывать теоремы о евклидовых и унитарных пространствах одновременно.

Наиболее резко унитарные пространства отличаются от евклидовых в отношении их поведения в связи с сопряженным пространством $\mathscr{V}'$. Именно, в то время как для евклидова пространства $\mathscr{V}$ — как и для каждого пространства с невырожденным скалярным умножением (см. теорему 1 лекции 5) — сопряженное пространство $\mathscr{V}'$ естественно изоморфно пространству $\mathscr{V}$, для унитарных пространств $\mathscr{V}$ это уже не так.

Чтобы понять, в чем тут дело, напомним, что для евклидова пространства $\mathscr{V}$ изоморфизм $\mathscr{V} \to \mathscr{V}'$ определяется как отображение, сопоставляющее каждому вектору $y \in \mathscr{V}$ линейный функционал

$$\xi_y\colon\ x \longmapsto (x, y).$$

Ясно, что соответствие $y \longmapsto \xi_y$ является гомоморфизмом. Поскольку пространства $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$ имеют одну и ту же размерность, для доказательства того, что этот гомоморфизм является изоморфизмом, достаточно установить, что его ядро равно нулю, т. е. что если $y \neq 0$,

то $\xi_y \neq 0$. Но это очевидно, поскольку, скажем, $\xi_y(y) = (y, y) \neq 0$.

Все это очевидным образом сохраняется и для унитарного пространства $\mathscr{V}$ с тем лишь отличием, что отображение $y \mapsto \xi_y$ будет теперь полулинейным изоморфизмом. Поэтому это отображение определяет изоморфизм пространства $\mathscr{V}$ не на пространство $\mathscr{V}'$, а на пространство $\overline{\mathscr{V}'} = \mathscr{V}^*$. Таким образом, мы видим, что *унитарное пространство $\mathscr{V}$ естественно изоморфно пространству $\mathscr{V}^*$.*

Для единообразия мы будем употреблять символ $\mathscr{V}^*$ и в случае евклидова пространства $\mathscr{V}$, считая, по определению, что в этом случае $\mathscr{V}^* = \mathscr{V}'$. Тем самым формальное сходство евклидовых и унитарных пространств будет восстановлено и в отношении сопряженных пространств. (При этом — в соответствии с замечанием 3 лекции 18 — можно даже считать, что и для унитарного пространства $\mathscr{V}$ сопряженное пространство $\mathscr{V}^*$ состоит из линейных функционалов ξ, лишь умножение на комплексные числа $c \in \mathbf{C}$ надо будет тогда определять формулой $(c\xi)(x) = \xi(\bar{c}x) = \bar{c}\xi(x)$, $x \in \mathscr{V}$.)

Заметим, что, так же как и для евклидовых пространств, базис $e_1, \ldots, e_n$ унитарного пространства $\mathscr{V}$ тогда и только тогда ортонормирован, когда при отождествлении $\mathscr{V} = \mathscr{V}^*$ он переходит в сопряженный базис $e^1, \ldots, e^n$.

Как было подробно объяснено в лекции 5, отождествление для евклидова пространства векторов и ковекторов влечет за собой отождествление тензоров всех типов (p, q) с одной и той же суммой $p + q$. Аналогичное утверждение справедливо, конечно, и для обобщенных тензоров. Для простоты мы рассмотрим здесь лишь случай $p + q = 2$.

Напомним сначала для этого случая — учитывая отождествление смешанных билинейных функционалов (тензоров типа $(1, 1)$) с линейными операторами — результаты лекции 5.

Пусть в евклидовом пространстве $\mathscr{V}$ нам задан тензор типа $(2, 0)$, т. е. билинейный функционал A: $x, y \mapsto A(x, y)$. Считая его второй аргумент y ковектором, мы получим из него билинейный функционал типа $(1, 1)$, т. е. линейный оператор $\boldsymbol{A}$: $x \mapsto \boldsymbol{A}x$. Здесь легко запутаться в отождествлениях. Поэтому будьте внимательны: оператор $\boldsymbol{A}$ вектор x переводит в вектор $\boldsymbol{A}x$,

который — если его рассматривать как функционал на ковекторах — имеет на каждом ковекторе ξ значение $\xi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, где $\boldsymbol{y}$ — вектор, отождествленный с ковектором ξ. Но отождествление $\xi = \boldsymbol{y}$ означает, что $\xi(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$ для любого вектора $\boldsymbol{z} \in \mathscr{V}$ и, в частности, что $\xi(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Таким образом,

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{1}$$

Формула (1) в явном виде описывает биективное соответствие между линейными операторами $\boldsymbol{A}$: $\boldsymbol{x} \longmapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и билинейными функционалами A: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \longmapsto A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ на евклидовом пространстве $\mathscr{V}$. Безотносительно к общей теории ее можно было бы принять за определение этого соответствия. Тогда, конечно, надо установить, что для любого линейного оператора $\boldsymbol{A}$ определенный формулой (1) функционал A билинеен (это сводится к автоматической проверке), что получающееся соответствие «оператор» $\Rightarrow$ «функционал» является гомоморфизмом соответствующих линеалов (снова автоматическая проверка), что этот гомоморфизм инъективен (положите $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ и воспользуйтесь невырожденностью скалярного умножения) и, наконец, что этот гомоморфизм является изоморфизмом (вытекает из инъективности, поскольку оба линейных пространства имеют одну и ту же размерность n^2).

Последний подход годится и для унитарных пространств, но только вместо билинейного получится, очевидно, полуторалинейный функционал.

Замечание 1. В евклидовом пространстве в ортонормированном базисе матрицы билинейного функционала A и линейного оператора $\boldsymbol{A}$ получаются друг из друга транспонированием. (Ср. замечание 1 лекции 6.)

Из лекции 5 мы также знаем, что отождествление билинейных функционалов с линейными операторами можно произвести иначе — принимая за ковектор не второй, а первый аргумент функционала. Тогда получится, вообще говоря, другой линейный оператор $\boldsymbol{A}^*$, для которого будет иметь место формула

$$A(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}). \tag{2}$$

В унитарном пространстве (для полуторалинейного функционала A) оператор $\boldsymbol{A}^*$, определяемый формулой (2), также, как легко видеть, линеен.

Замечание 2. В евклидовом пространстве в ортонормированном базисе матрица оператора A^* совпадает с матрицей функционала A.

Согласно формулам (1) и (2) каждому линейному оператору A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$, действующему в евклидовом или унитарном пространстве $\mathscr{V}$, мы можем сопоставить билинейный функционал A, а этому последнему функционалу — снова линейный оператор A^*.

Определение 3. Оператор A^* называется *сопряженным* с оператором A. Он однозначно характеризуется соотношением

$$(Ax, y) = (x, A^*y), \tag{3}$$

которое должно иметь место для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$.

Для евклидова пространства $\mathscr{V}$ оператор A^* является — как показывает непосредственное сравнение определений — не чем иным, как сопряженным оператором A': $\mathscr{V}' \to \mathscr{V}'$, рассматриваемым, в силу отождествления $\mathscr{V}' = \mathscr{V}$, как оператор на $\mathscr{V}$. Для унитарного же пространства $\mathscr{V}$ он является оператором A^* из лекции 19, рассматриваемым, в силу отождествления $\mathscr{V}^* = \mathscr{V}$, как оператор на $\mathscr{V}$.

В произвольном базисе $e_1, \ldots, e_n$ евклидова пространства $\mathscr{V}$ элементы a_j^{*i} матрицы оператора A^* связаны с элементами a_j^i матрицы оператора A формулой

$$a_j^{*i} = g^{ik} g_{jl} a_k^l.$$

Для ортонормированного базиса $e_1, \ldots, e_n$ эта формула приобретает вид

$$a_j^{*i} = a_i^j.$$

В унитарном пространстве $\mathscr{V}$ соответствующая формула (в ортонормированном базисе) имеет вид

$$a_j^{*i} = \bar{a}_i^j.$$

Таким образом, *оператор A^* в евклидовом (унитарном) пространстве $\mathscr{V}$ тогда и только тогда сопряжен с оператором A, когда в некотором (а потому и в любом) ортонормированном базисе его матрица является транспонированной (соответственно, транспонированной и комплексно сопряженной) матрицей оператора A.*

Замечание 3. Это утверждение можно доказать без всяких вычислений, если вспомнить, что в веществен-

ном пространстве операторы A и A', а в комплексном пространстве операторы A и A^* имеют в сопряженных базисах транспонированные (соответственно, транспонированные и комплексно сопряженные) матрицы (см. лекции 15 и 19), а в евклидовом (унитарном) базис $e_1, \ldots, e_n$ ортонормирован тогда и только тогда, когда он совпадает с сопряженным базисом, рассматриваемым как базис в $\mathscr{V}$.

Следующее определение существенно использует тот факт, что операторы A и A^* действуют в одном и том же пространстве.

Определение 4. Оператор A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ на евклидовом или унитарном пространстве называется *самосопряженным*, если $A^* = A$, т. е. если для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$ имеет место равенство

$$(Ax, y) = (x, Ay).$$

Самосопряженные операторы в евклидовом пространстве называются также *симметрическими* (или *симметричными*), а в унитарном — *эрмитовыми* операторами.

Ясно, что *оператор A в евклидовом (унитарном) пространстве тогда и только тогда симметричен (эрмитов), когда соответствующий билинейный (полуторалинейный) функционал A симметричен (эрмитов)*.

Например, в унитарном пространстве

$$A(y, x) = (Ay, x) = \overline{(x, Ay)} = \overline{(Ax, y)} = \overline{A(x, y)}. \quad \square$$

Поэтому *в евклидовом (унитарном) пространстве оператор тогда и только тогда симметричен (эрмитов), когда в некотором (а потому и в любом) ортонормированном базисе его матрица симметрична (эрмитова)*.

Сумма самосопряженных операторов и произведение самосопряженного оператора на вещественное число являются, очевидно, самосопряженными операторами. Это означает, что *самосопряженные операторы образуют линейное пространство над полем* $\mathbb{R}$ (в случае евклидова пространства $\mathscr{V}$ являющееся подпространством пространства $\operatorname{End}\mathscr{V}$).

Произведение двух самосопряженных операторов может и не быть самосопряженным оператором. Более точно: *произведение AB двух самосопряженных операторов A и B тогда и только тогда является самосопряженным оператором, когда операторы A и B перестановочны, т. е. $AB = BA$.*

Действительно, если $AB = BA$, то $(AB)^* = (BA)^* = A^*B^* = AB$. Обратно, если $(AB)^* = AB$, то $BA = B^*A^* = (AB)^* = AB$. □

Определение 5. Оператор A, для которого $A^* = -A$, т. е. такой, что

$$(Ax, y) + (x, Ay) = 0$$

для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$, называется в евклидовом пространстве *кососимметрическим*, а в унитарном — *косоэрмитовым*.

Оператор A тогда и только тогда кососимметричен (косоэрмитов), когда соответствующий функционал A: $x, y \mapsto (Ax, y)$ кососимметричен (косоэрмитов). Поэтому кососимметрические операторы составляют вполне самостоятельный класс операторов. В каждом ортонормированном базисе матрицы этих операторов кососимметричны и любой линейный оператор единственным образом представляется в виде суммы симметрического и кососимметрического операторов.

Напротив, косоэрмитовы операторы тривиальным образом сводятся к эрмитовым (оператор A тогда и только тогда косоэрмитов, когда оператор iA эрмитов) и *любой оператор A на унитарном пространстве $\mathscr{V}$ единственным образом представляется в виде*

$$A = B + iC,$$

где B и C — эрмитовы операторы. Это означает (см. определение 1 лекции 1.19), что *для любого унитарного пространства $\mathscr{V}$ линейное пространство* $\operatorname{End}\mathscr{V}$ *несет естественную структуру вещественно-комплексного линеала, причем соответствующим вещественным подпространством является пространство эрмитовых операторов.*

Мы видим, таким образом, что в определенном отношении эрмитовы операторы аналогичны вещественным числам. Эта аналогия прослеживается весьма далеко.

Например, неотрицательные вещественные числа могут быть охарактеризованы как числа вида b^2, где $b \in \mathbb{R}$. По аналогии, мы примем следующее определение:

Определение 6. Самосопряженный оператор A (в евклидовом или унитарном пространстве) называется *неотрицательным*, если существует такой самосопряженный оператор B, что $A = B^2$. В случае, когда оператор B можно выбрать невырожденным, оператор A называется *положительным*.

Поскольку квадрат оператора тогда и только тогда невырожден, когда сам оператор невырожден, *неотрицательный оператор положителен тогда и только тогда, когда он невырожден.*

Замечание 4. Многие авторы неотрицательные операторы называют *положительными*, а положительные операторы — *строго положительными.*

Так как $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$, то

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Bx}, \boldsymbol{Bx}) = |\boldsymbol{Bx}|^2 \geqslant 0$$

для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$, причем если оператор $\boldsymbol{B}$ невырожден (т. е. оператор $\boldsymbol{A}$ положителен), то $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) > 0$ при $\boldsymbol{x} \neq 0$. Оказывается, что обратное утверждение также верно:

Предложение 1. *Если самосопряженный оператор* $\boldsymbol{A}$ *обладает тем свойством, что* $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$ *для каждого вектора* $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$, *то этот оператор неотрицателен. Если же* $(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) > 0$ *при* $\boldsymbol{x} \neq 0$, *то оператор* $\boldsymbol{A}$ *положителен.*

Доказательство предложения 1 мы пока отложим, поскольку оно основывается на свойствах самосопряженных операторов, которые мы еще не доказали. Чтобы быть уверенным в отсутствии порочного круга, можно во всем дальнейшем под неотрицательными (соответственно, положительными) операторами пока понимать самосопряженные операторы $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющие условиям предложения 1.

Следствие 1. *Самосопряженный оператор* $\boldsymbol{A}$ *тогда и только тогда неотрицателен (положителен), когда существует такой (невырожденный) линейный оператор* $\boldsymbol{C}$, *что* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}$.

Доказательство. Если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}^2$ и $\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}$ при $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}$. Обратно, пусть $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C}$. Тогда для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{Cx}, \boldsymbol{Cx}) \geqslant 0,$$

причем, если оператор $\boldsymbol{C}$ невырожден, то при $\boldsymbol{x} \neq 0$ имеет место строгое неравенство. Поэтому, согласно предложению 1, оператор $\boldsymbol{A}$ неотрицателен (положителен). □