Лекция 20а

Самосопряженные проекторы. — Ортогональные проекторы.

Интересные свойства имеют самосопряженные операторы, являющиеся одновременно проекторами (см. лекцию 14).

Поскольку для любого подпространства $\mathscr{P}$ евклидова или унитарного пространства $\mathscr{V}$ имеет место разложение

$$\mathscr{V} = \mathscr{P} \oplus \mathscr{P}^{\perp},$$

мы можем говорить о проекторе $\boldsymbol{P}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ на подпространство $\mathscr{P} = \operatorname{Im} \boldsymbol{P}$ вдоль подпространства $\mathscr{P}^{\perp} = \operatorname{Ker} \boldsymbol{P}$.

Предложение 1. *Идемпотентный оператор $\boldsymbol{P}: \mathscr{V} \to \mathscr{V}$ тогда и только тогда является проектором на некоторое подпространство $\mathscr{P}$ вдоль его ортогонального дополнения $\mathscr{P}^{\perp}$, когда этот оператор самосопряжен.*

Доказательство. Если оператор $\boldsymbol{P}$ является проектором на $\mathscr{P}$ вдоль $\mathscr{P}^{\perp}$, то для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ векторы $\boldsymbol{Px}$ и $\boldsymbol{Py}$ принадлежат $\mathscr{P}$, а векторы $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Px}$ и $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Py}$ принадлежат $\mathscr{P}^{\perp}$. Поэтому $(\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Py}) = 0$, $(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Px}, \boldsymbol{Py}) = 0$, и, значит,

$$(\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{Py}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{Py}).$$

Следовательно, проектор $\boldsymbol{P}$ самосопряжен.

Обратно, если идемпотентный оператор $\boldsymbol{P}$ (являющийся, как мы знаем; проектором на $\mathscr{P} = \operatorname{Im} \boldsymbol{P}$ вдоль $\operatorname{Ker} \boldsymbol{P}$) самосопряжен, то для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ будет иметь место равенство

$$(\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{Py}) = (\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{y}),$$

а потому и равенство

$$(\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{y} - \boldsymbol{Py}) = (\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{Px}, \boldsymbol{Py}) = 0.$$

Поскольку векторы $\boldsymbol{Px}$ исчерпывают подпространство $\mathscr{P} = \operatorname{Im} \boldsymbol{P}$, а векторы $\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Py}$ — подпространство $\operatorname{Ker} \boldsymbol{P}$, это доказывает, что $\operatorname{Ker} \boldsymbol{P} = \mathscr{P}^{\perp}$, т. е. что $\boldsymbol{P}$ является проектором на $\mathscr{P}$ вдоль $\mathscr{P}^{\perp}$. □

Заметим, что по ходу дела мы фактически также доказали, что *проектор $\boldsymbol{P}$ тогда и только тогда самосо-*

пряжен, когда для любых векторов $x, y \in \mathscr{V}$ имеет место равенство

$$(Px, y) = (Px, Py).$$

Действительно, это равенство равносильно соотношению $(Px, y - Py) = 0$, обеспечивающему, что P является проектором на $\mathscr{P} = \operatorname{Im} P$ вдоль $\mathscr{P}^{\perp}$. □

При $x = y$ мы получаем отсюда, что $(Px, x) \geqslant 0$, т. е. что *каждый самосопряженный проектор является неотрицательным оператором.*

Кроме того, так как $x = Px + y$, где $y \perp Px$, то по теореме Пифагора $|Px| \leqslant |x|$. Таким образом, *каждый самосопряженный проектор не увеличивает длин:*

$$|Px| \leqslant |x| \quad \textit{для любого вектора} \quad x \in \mathscr{P}.$$

Интересно, что, и наоборот, *любой идемпотентный оператор P, не увеличивающий длин, самосопряжен.* Действительно, если $x \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$, то $(x, x - Px) = 0$ (так как $x - Px \in \operatorname{Ker} P$), и, значит,

$$\begin{aligned} |x - Px|^2 &= (x - Px, x - Px) = -(Px, x - Px) = \\ &= -(Px, x) + (Px, Px) \leqslant -(Px, x) + (x, x) = \\ &= (x - Px, x) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $|x - Px|^2 = 0$, т. е. $x = Px$. Следовательно, $(\operatorname{Ker} P)^{\perp} \subset \operatorname{Im} P$.

Обратно, если $x = Px$ и $x = y + z$, где $y \in \operatorname{Ker} P$ и $z \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$, то $x = P(y + z) = Pz$, а так как, по доказанному, $z \in \operatorname{Im} P$, то $Pz = z$. Следовательно, $x = z \in (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$, т. е. $\operatorname{Im} P \subset (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$.

Таким образом, $\operatorname{Im} P = (\operatorname{Ker} P)^{\perp}$, и, значит, P представляет собой проектор на $\mathscr{P} = \operatorname{Im} P$ вдоль $\mathscr{P}^{\perp} = \operatorname{Ker} P$. Поэтому этот проектор самосопряжен. □

Для операторов отношение «больше или равно» можно вводить несколькими различными способами. Например, можно считать, что $A \leqslant B$, если оператор $B - A$ неотрицателен (для самосопряженных операторов A и B это определение, по-видимому, наиболее естественно) или если $|Ax| \leqslant |Bx|$ для любого $x \in \mathscr{V}$, или если $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} B$ и т. д. и т. п. Вообще говоря, эти способы приводят к различным результатам но, оказывается, что для самосопряженных проекторов все они совпадают.

Предложение 2. *Для самосопряженных проекторов P и Q следующие утверждения равносильны:*

1° *Оператор* $Q - P$ *неотрицателен.*

2° *Для любого вектора* $x \in \mathscr{V}$ *имеет место неравенство*

$$|Px| \leqslant |Qx|.$$

3° *Подпространство* $\operatorname{Im} P$ *содержится в подпространстве* $\operatorname{Im} Q$:

$$\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q.$$

4° *Имеет место равенство*

$$PQ = P.$$

5° *Имеет место равенство*

$$QP = P.$$

Доказательство. Мы докажем следующую диаграмму импликаций:

$$\begin{tikzcd} 1^\circ \arrow[r, Rightarrow] & 2^\circ \arrow[r, Rightarrow] & 3^\circ \arrow[d, Rightarrow] \\ 4^\circ \arrow[u, Rightarrow] & & 5^\circ \arrow[ll, Leftrightarrow] \end{tikzcd}$$

Импликация $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Так как операторы P и Q являются самосопряженными проекторами, то

$$(Px, x) = (Px, Px), \qquad (Qx, x) = (Qx, Qx),$$

и, значит,

$$|Qx|^2 - |Px|^2 = (Qx, Qx) - (Px, Px) = (Qx, x) - (Px, x) = \\ = ((Q - P)x, x).$$

Поэтому, если $((Q - P)x, x) \geqslant 0$ (оператор $Q - P$ неотрицателен), то $|Px| \leqslant |Qx|$.

Импликация $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Если $|Px| \leqslant |Qx|$ и $x \in \operatorname{Im} P$, т. е. $x = Px$, то $|x| \leqslant |Qx|$, что возможно (поскольку оператор Q, как мы знаем, не увеличивает длины) только при $|x| = |Qx|$, т. е. при $(x, x) = (Qx, Qx) = (Qx, x)$. Это означает, что самосопряженный проектор $E - Q$ обладает тем свойством, что $((E - Q)x, x) = 0$. Поэтому

$$|(E - Q)x|^2 = ((E - Q)x, (E - Q)x) = ((E - Q)x, x) = 0,$$

и, значит $Qx = x$, т. е. $x \in \operatorname{Im} Q$. Следовательно, если $|Px| \leqslant |Qx|$ для всех x, то $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$.

Импликация $3^\circ \Rightarrow 5^\circ$. Если $\operatorname{Im} P \subset \operatorname{Im} Q$, то $Px \in \operatorname{Im} Q$ для любого вектора $x \in \mathscr{V}$, и, значит $Q(Px) = Px$, т. е. $QP = P$.

Эквивалентность $4^\circ \Leftrightarrow 5^\circ$. Если $PQ = P$, то $QP = Q^*P^* = (PQ)^* = P^* = P$, а если $QP = P$, то аналогично $PQ = P^*Q^* = (QP)^* = P^* = P$.

Импликация $5^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Если $QP = P$ и, значит, по доказанному, $PQ = P$, то $QP = PQ$, и потому оператор $Q(E - P)$ самосопряжен и является проектором. Следовательно, $(Q(E - P)x, x) \geqslant 0$, и, значит,

$$((Q - P)x, x) = ((Q - QP)x, x) = (Q(E - P)x, x) \geqslant 0,$$

т. е. оператор $Q - P$ неотрицателен. □

Самосопряженные проекторы P и Q называются *ортогональными, если* $PQ = 0$ (и, значит, $QP = Q^*P^* = (PQ)^* = 0$). Это название оправдывается тем, что, как легко видеть, *проекторы P и Q тогда и только тогда ортогональны, когда ортогональны подпространства $\mathscr{P} = \operatorname{Im} P$ и $\mathscr{Q} = \operatorname{Im} Q$* (т. е. $(x, y) = 0$ для любого вектора $x \in \mathscr{P}$ и любого вектора $y \in \mathscr{Q}$).

Действительно, если проекторы P и Q ортогональны (и, в частности, самосопряжены) и если $x = Px$ и $y = Qy$, то

$$(x, y) = (Px, Qy) = (x, PQy) = 0.$$

Обратно, если подпространства $\mathscr{P}$ и $\mathscr{Q}$ ортогональны, то

$$\mathscr{Q} \subset \mathscr{P}^\perp = \operatorname{Ker} P,$$

и, значит, для любого вектора $x \in \mathscr{V}$ имеет место равенство $PQx = P(Qx) = 0$. □

Предложение 3. *Сумма*

$$P = P_1 + \ldots + P_m$$

самосопряженных проекторов $P_1, \ldots, P_m$ тогда и только тогда является проектором (автоматически самосопряженным), когда эти проекторы попарно ортогональны.

Доказательство. Если $P_iP_j = 0$ при $i \neq j$, то

$$P^2 = P_1^2 + \ldots + P_m^2 = P_1 + \ldots + P_m = P.$$

Обратно, пусть $P^2 = P$ и пусть $x \in \operatorname{Im} P_i$, т. е. $x = P_ix$. Так как проектор P самосопряжён (как сумма самосопряженных операторов), то

$$|x|^2 \geqslant |Px|^2 = (Px, x) = (P_1x, x) + \ldots + (P_mx, x) =$$
$$= |P_1x|^2 + \ldots + |P_mx|^2 \geqslant |P_ix|^2 = |x|^2,$$

и, следовательно, $|x| = |Px|^2$ и $|P_1x|^2 + \ldots + |P_mx|^2 = |P_ix|^2$. Это возможно только тогда, когда для любого $j \neq i$ имеет место равенство $|P_jx| = 0$, т. е. равенство $P_jx = 0$. Поскольку $x = P_ix$, тем самым доказано, что $P_jP_ix = 0$, т. е. что $P_iP_j = 0$. □

Особо интересен случай, когда $P = E$. Если

$$P_1 + \ldots + P_m = E,$$

то

$$x = P_1x + \ldots + P_mx$$

для любого вектора $x \in \mathscr{V}$, и, значит, $\mathscr{V} = \mathscr{P}_1 + \ldots + \mathscr{P}_m$, где

$$\mathscr{P}_1 = \operatorname{Im} P_1, \ \ldots, \ \mathscr{P}_m = \operatorname{Im} P_m. \tag{1}$$

Кроме того, если проекторы $P_1, \ldots, P_m$ попарно ортогональны, то пространства (1) также попарно ортогональны и потому обладают тем свойством, что каждое из них дизъюнктно с суммой всех остальных. Следовательно (см. лекцию 3),

$$\mathscr{V} = \mathscr{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{P}_m.$$

Обратно, пусть $\mathscr{V}$ является прямой суммой попарно ортогональных подпространств $\mathscr{P}_1, \ldots, \mathscr{P}_m$ и пусть P_i — проектор на $\mathscr{P}_i$ вдоль $\mathscr{P}_i^{\perp}$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда для любого вектора $x \in \mathscr{V}$ имеет место равенство

$$x = x_1 + \ldots + x_m,$$

где $x_i \in \mathscr{P}_i$, и, значит, $x_i = P_ix_i$. Кроме того, так как подпространства $\mathscr{P}_i$, $\mathscr{P}_j$, а значит, и проекторы P_i, P_j ортогональны, то $P_ix_j = P_iP_jx_j = 0$ при $i \neq j$. Поэтому $x_i = P_i(x_1 + \ldots + x_m) = P_ix$, и, следовательно,

$$x = P_1x + \ldots + P_mx = (P_1 + \ldots + P_m)x,$$

т. е. $P_1 + \ldots + P_m = E$.

Тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Разложения*

$$\mathscr{V} = \mathscr{P}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{P}_m$$

пространства $\mathscr{V}$ в прямую сумму попарно ортогональных подпространств находятся в биективном соответствии с разложениями

$$E = P_1 + \ldots + P_m$$

тождественного оператора в сумму попарно ортогональных самосопряженных проекторов.