Лекция 21

Спектральные свойства самосопряженных операторов. — Ортогональная диагонализируемость самосопряженных операторов. — Приведение квадратичных и эрмитовых форм к нормальному виду. — Одновременное приведение к нормальному виду двух квадратичных форм. — Характеризация положительных операторов.

Следующие предложения справедливы как для евклидовых, так и для унитарных пространств (хотя и требуют, вообще говоря, различных доказательств).

Предложение 1 (о вещественности). *Все характеристические корни произвольного самосопряженного оператора вещественны.*

Доказательство. Пусть A — самосопряженный оператор в евклидовом или унитарном пространстве $\mathscr{V}$ и пусть λ — его произвольный характеристический корень.

Если пространство $\mathscr{V}$ унитарно (и, следовательно, оператор A эрмитов), то число λ будет собственным значением оператора A, т. е. будет существовать такой вектор $x_0 \neq 0$, что $Ax_0 = \lambda x_0$. Для этого вектора $(Ax_0, x_0) = (\lambda x_0, x_0) = \lambda (x_0, x_0)$, и, значит,

$$\lambda = \frac{(Ax_0, x_0)}{(x_0, x_0)}.$$

Для завершения доказательства предложения 1 в этом случае остается заметить, что так как функционал A: $x, y \longmapsto (Ax, y)$ эрмитов, то, согласно предложению 2 лекции 19, правая сторона этой формулы вещественна. Поэтому вещественно и число λ.

Пусть теперь пространство $\mathscr{V}$ евклидово. Рассуждая от противного, предположим, что $\lambda = \alpha + i\beta$, где $\beta \neq 0$. Тогда, как было показано в лекции 17а, для оператора A в пространстве $\mathscr{V}$ существует двумерное инвариантное подпространство $\mathscr{P}$ и в нем такой базис x, y, что

$$Ax = \alpha x - \beta y,$$
$$Ay = \beta x + \alpha y.$$

Поэтому

$$(Ax, y) = (\alpha x - \beta y, y) = \alpha (x, y) - \beta (y, y)$$

и

$$(x, Ay) = (x, \beta x + \alpha y) = \beta (x, x) + \alpha (x, y).$$

Поскольку оператор A самосопряжен (симметричен) и, значит, $(Ax, y) = (x, Ay)$, отсюда следует, что

$$\beta [(x, x) + (y, y)] = 0.$$

Поскольку последнее равенство невозможно (ибо $x, x) > 0$, $(y, y) > 0$ и, по условию, $\beta \neq 0$), тем самым доказано, что $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Предложение 2 (об ортогональности). *Любые два собственных вектора x и y самосопряженного оператора A, принадлежащие различным собственным значениям λ и μ, ортогональны.*

Доказательство. Имеем

$$(Ax, y) = (\lambda x, y) = \lambda (x, y),$$
$$(x, Ay) = (x, \mu y) = \mu (x, y)$$

(последнее верно и в унитарном пространстве, так как, согласно предложению 1, число μ вещественно). Поэтому, в силу самосопряженности,

$$\lambda (x, y) = \mu (x, y),$$

что при $\lambda \neq \mu$ возможно только при $(x, y) = 0$. □

Предложение 3 (об ортогональном дополнении). *Для любого самосопряженного оператора A ортогональное дополнение $\mathcal{P}^{\perp}$ произвольного инвариантного подпространства $\mathcal{P}$ также является инвариантным подпространством.*

Доказательство. Если $x \in \mathcal{P}^{\perp}$, то $(x, y) = 0$ для всех $y \in \mathcal{P}$, и потому $(Ax, y) = (x, Ay) = 0$, ибо, по условию, $Ay \in \mathcal{P}$. Следовательно, $Ax \in \mathcal{P}^{\perp}$. □

Предложение 4 (о кратностях). *Геометрическая кратность p_{λ_0} произвольного собственного значения λ_0 самосопряженного оператора A равна его алгебраической кратности n_{λ_0}:*

$$p_{\lambda_0} = n_{\lambda_0}.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ — собственное подпространство, принадлежащее собственному значению λ_0, и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — такой ортонормированный базис пространства $\mathcal{V}$, что векторы $e_1, \ldots, e_p$, где $p = p_{\lambda_0}$, составляют базис подпространства $\mathcal{P}_{\lambda_0}$ (и, следовательно,

векторы $e_{p+1}, \ldots, e_n$ — базис пространства $\mathscr{P}_{\lambda_0}^{\perp}$). Так как, согласно предложению 3, подпространство $\mathscr{P}_{\lambda_0}^{\perp}$ также инвариантно, то матрица оператора A в этом базисе имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \lambda_0 & \\ \hline & 0 & & B \end{array} \right\|,$$

где B — матрица оператора $B = A|_{\mathscr{P}_{\lambda_0}^{\perp}}$. Следовательно $f_A(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^p f_B(\lambda)$, и потому, если $p_{\lambda_0} < n_{\lambda_0}$, то $f_B(\lambda_0) = 0$, и, значит, λ_0 является собственным значением оператора B. Соответствующий собственный вектор из $\mathscr{P}_{\lambda_0}^{\perp}$ будет собственным вектором оператора A, принадлежащим собственному значению λ_0, что невозможно, так как все эти векторы лежат в $\mathscr{P}_{\lambda_0}$. Следовательно, $p_{\lambda_0} \geqslant n_{\lambda_0}$, и, значит, $p_{\lambda_0} = n_{\lambda_0}$ (поскольку всегда $p_{\lambda_0} \leqslant n_{\lambda_0}$; см. лекцию 16). □

Замечание 1. В доказательстве предложения 4 мы пользовались только тем свойством самосопряженного оператора, что ортогональное дополнение каждого его собственного подпространства является инвариантным подпространством (так что в полной мере предложение 3 нам даже не понадобилось). Поэтому *предложение 4 справедливо для любого оператора, для которого ортогональное дополнение каждого собственного подпространства инвариантно.*

Согласно теореме 1 лекции 16 из предложения 4 (для евклидовых пространств — вместе с предложением 1) вытекает, что произвольный самосопряженный оператор A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ диагонализируем, т. е. что

$$\mathscr{V} = \mathscr{P}_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus \mathscr{P}_{\lambda_m}, \tag{1}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — всевозможные собственные значения оператора A. Выбрав в каждом из подпространств $\mathscr{P}_{\lambda_i}$ ортонормированный базис, мы, ввиду предложения 2, получим ортонормированный базис пространства $\mathscr{V}$, в котором оператор A имеет диагональную матрицу.

Определение 1. Оператор $\boldsymbol{A}$ в евклидовом или унитарном пространстве $\mathscr{V}$ называется *ортогонально диагонализируемым*, если в пространстве $\mathscr{V}$ существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора $\boldsymbol{A}$ диагональна (т. е. который состоит из собственных векторов этого оператора).

Таким образом, нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Каждый самосопряженный оператор в евклидовом или унитарном пространствах ортогонально диагонализируем.* □

Замечание 2. В евклидовом пространстве каждый ортогонально диагонализируемый оператор, имея в некотором ортонормированном базисе диагональную, а следовательно, симметрическую матрицу, симметричен (самосопряжен). Таким образом, *линейный оператор в евклидовом пространстве тогда и только тогда ортогонально диагонализируем, когда он самосопряжен.*

Класс ортогонально диагонализируемых операторов в унитарном пространстве мы охарактеризуем в следующей лекции.

Поскольку в прямой сумме (1) подпространства $\mathscr{P}_{\lambda_i}$ попарно ортогональны, ей соответствует (см. лекцию 19а) разложение

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{P}_1 + \ldots + \boldsymbol{P}_m \tag{2}$$

тождественного оператора $\boldsymbol{E}$ в сумму попарно ортогональных проекторов (где $\boldsymbol{P}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, — проектор на $\mathscr{P}_{\lambda_i}$ вдоль $\mathscr{P}_{\lambda_i}^{\perp}$). При этом, так как для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ вектор $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}$ принадлежит $\mathscr{P}_i$ и, значит, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}) = \lambda_i\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i = \lambda_i\boldsymbol{P}_i$. Следовательно, умножив (2) слева на $\boldsymbol{A}$, мы получим равенство

$$\boldsymbol{A} = \lambda_1\boldsymbol{P}_1 + \ldots + \lambda_m\boldsymbol{P}_m. \tag{3}$$

Каждое равенство (3) с попарно ортогональными самосопряженными (и отличными от нуля) проекторами $\boldsymbol{P}_i$, удовлетворяющими соотношению (2), и различными числами λ_i называется *спектральным разложением* оператора $\boldsymbol{A}$. В силу соотношения (2) каждое такое разложение определяет разложение пространства $\mathscr{V}$ в прямую сумму подпространств $\mathscr{P}_i = \operatorname{Im}\boldsymbol{P}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. При этом, ввиду ортогональности проекторов $\boldsymbol{P}_i$, для любого $i = 1, \ldots, m$ будет иметь место равенство $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_i = \lambda_i\boldsymbol{P}_i^2 = \lambda_i\boldsymbol{P}_i$, показывающее, что каждый вектор подпростран-

ства $\mathscr{P}_i$ является собственным вектором оператора A, принадлежащим собственному значению λ_i. Поэтому $\mathscr{P}_i = \mathscr{P}_{\lambda_i}$, и, значит, оператор A ортогонально диагонализируем.

Таким образом, *операторы, обладающие спектральным разложением, — это в точности ортогонально диагонализируемые операторы.*

Кроме того, мы видим, что *спектральное разложение оператора (когда оно существует) единственно (с точностью до порядка слагаемых).*

На языке спектральных разложений теорема 1 утверждает, таким образом, что *любой самосопряженный оператор обладает спектральным разложением.*

На этом основании теорема 1 называется теоремой о спектральном разложении.

Другую полезную переформулировку теоремы 1 — по крайней мере для случая операторов в евклидовом пространстве — мы получим, приняв во внимание биективное соответствие между симметрическими линейными операторами и симметрическими билинейными (или, что равносильно, — квадратичными) функционалами.

Пусть

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,\, j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j \tag{4}$$

— произвольная квадратичная форма от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами q_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$.

Выбрав в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{V}$ ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, мы можем рассмотреть в $\mathscr{V}$ квадратичный функционал Q, выражающийся в этом базисе формой $Q(x_1, \ldots, x_n)$, а, значит, и соответствующий симметрический линейный оператор $\boldsymbol{Q}$: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ (т. е. такой, что $Q(x) = (\boldsymbol{Q}x, x)$ для любого вектора $x \in \mathscr{V}$). Согласно теореме 1 в пространстве $\mathscr{V}$ существует ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$, в котором оператор $\boldsymbol{Q}$ имеет диагональную матрицу с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Это означает, что для любого вектора $x \in \mathscr{V}$ имеет место равенство

$$Q(x) = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2, \tag{5}$$

где

$$
(6)\qquad \begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= c_{n1}x_1 + \ldots + c_{nn}x_n \end{aligned}
$$

— координаты вектора x в базисе $f_1, \ldots, f_n$. Поскольку оба базиса $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ ортонормированы, преобразование (6) ортогонально, т. е. матрица C его коэффициентов является ортогональной матрицей (см. лекцию I. 25). Этим доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Любая квадратичная форма* (4) *ортогональным преобразованием переменных может быть приведена к виду*

$$
(7)\qquad \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.
$$

Коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *являются корнями уравнения*

$$
\det(Q - \lambda E) = 0
$$

и потому определены однозначно (*с точностью до порядка*). □

Отличие этой теоремы от (существенно более простой) теоремы Лагранжа из лекции 11 состоит формально только в том, что приведение к каноническому виду (7) достигается не произвольным, а ортогональным преобразованием переменных. Именно поэтому канонический вид (7) оказывается единственным.

Теорема 2, являющаяся, конечно, лишь переформулировкой теоремы 1 (для случая операторов в евклидовом пространстве), имеет то преимущество, что она формулируется в чисто алгебраических — не связанных с теорией операторов — терминах и потому может быть применена, например, к квадратичной форме, выражающей кинетическую энергию системы материальных точек или к тензору инерции твердого тела.

В унитарном пространстве роль квадратичных форм играют эрмитовы формы, и аналог теоремы 2 для эрмитовых форм утверждает, что *каждая эрмитова форма унитарным преобразованием переменных может быть приведена к виду*

$$
\lambda_1 z_1 \bar{z}_1 + \ldots + \lambda_n z_n \bar{z}_n,
$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *однозначно определенные вещественные числа.*

Теорема 1 (теорема 2) имеет много разнообразных следствий.

Рассмотрим, например, вопрос о приведении двух квадратичных форм Q и A к виду (5) одним и тем же линейным преобразованием переменных.

Произвольное линейное невырожденное преобразование (6) зависит от n^2 параметров c_{ij} (подчиненных лишь одному неравенству $\det \|c_{ij}\| \neq 0$), а требование ортогональности накладывает на эти параметры $\frac{n(n+1)}{2}$ независимых соотношений

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}c_{jk} = \delta_{ik}, \qquad i, k = 1, \ldots, n.$$

Поэтому при приведении квадратичной формы Q к виду (5) линейным преобразованием мы из n^2 параметров используем лишь

$$n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

параметров, остальные же параметры $\left(\text{в числе } \frac{n(n+1)}{2}\right)$ мы, вообще говоря, можем выбирать как угодно. Пользуясь этой свободой, можно надеяться распорядиться дополнительными параметрами так, чтобы то же преобразование приводило к нормальному виду (5) и некоторую другую квадратичную форму A (для чего нужно $\frac{n(n-1)}{2} < \frac{n(n+1)}{2}$ параметров). Более того, поскольку

$$\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = n,$$

можно, истратив еще не более n параметров, обратить в ± 1 все отличные от нуля коэффициенты $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ в нормальном виде (5) формы Q.

Однако подобного рода соображения, основанные на подсчете параметров, не имеют, вообще говоря, доказательной силы и могут служить лишь для эвристических целей и каждый раз должны быть подкреплены строгим доказательством.

В частности, несмотря на то что для приведения двух квадратичных форм к нормальному виду одним и тем же линейным преобразованием параметров — как мы подсчитали — хватает, все же это приведение в общем случае осуществить нельзя.

Пример 1. При $n = 2$ рассмотрим формы

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2 \quad \text{и} \quad A(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2.$$

Линейное преобразование

$$(8)\qquad \begin{aligned} x_1 &= c_{11}y_1 + c_{12}y_2, \\ x_2 &= c_{21}y_1 + c_{22}y_2, \end{aligned} \qquad c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} \neq 0,$$

переводит эти формы в формы

$$Q'(y_1, y_2) = (c_{11}y + c_{12}y_2)^2 - (c_{21}y_1 + c_{22}y_2)^2 =$$
$$= (c_{11}^2 - c_{21}^2)\, y_1^2 + 2(c_{11}c_{12} - c_{21}c_{22})\, y_1y_2 + (c_{12}^2 - c_{22}^2)\, y_1^2$$

и

$$A'(y_1, y_2) = [(c_{11} - c_{21})\, y_1 + (c_{12} - c_{22})\, y_2]^2 =$$
$$= (c_{11} - c_{21})^2 y_1^2 + 2(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22})\, y_1y_2 + (c_{12} - c_{22})^2 y_2^2,$$

тогда и только тогда имеющие вид (6), когда

$$c_{11}c_{12} - c_{21}c_{22} = 0,$$
$$(c_{11} - c_{21})(c_{12} - c_{22}) = 0,$$

т. е. когда $c_{11}c_{12} = c_{21}c_{22}$ и либо $c_{11} = c_{21}$, либо $c_{12} = c_{22}$. Но тогда $c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21}$, что противоречит невырожденности преобразования (8). Следовательно, преобразования (8), приводящего обе формы Q и A к виду (5), существовать не может.

Тем не менее справедливо следующее предложение:

Предложение 5 (теорема об одновременном приведении двух квадратичных форм к нормальному виду). *Если квадратичная форма Q положительно определена, то для любой другой квадратичной формы A существует невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее форму Q к виду*

$$(9)\qquad y_1^2 + \ldots + y_n^2,$$

а форму A — к виду

$$(10)\qquad \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2.$$

Доказательство. Согласно теореме Лагранжа существует линейное преобразование переменных, приводящее форму Q к виду (9). Это преобразование переведет форму A в некоторую форму A'. Согласно теореме 2 существует ортогональное преобразование переменных, переводящее форму A' в форму (10). Поскольку ортогональное преобразование не меняет, очевидно, формы (9), композиция обоих преобразований

будет переводить форму A в форму (10), а форму Q — в форму (9). □

С помощью теоремы 1 легко доказывается также предложение 1 лекции 19.

Доказательство предложения 1 лекции 19. Пусть A — такой самосопряженный оператор, что $(Ax, x) \geqslant 0$ для любого вектора $x \in \mathscr{V}$, пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис пространства $\mathscr{V}$, состоящий из собственных векторов оператора A, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Так как

$$(Ae_i, e_i) = \lambda_i (e_i, e_i) \geqslant 0,$$

то $\lambda_i \geqslant 0$, и, значит, в $\mathbb{R}$ существуют корни $\sqrt{\lambda_i} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть B — оператор, имеющий в базисе $e_1, \ldots, e_n$ диагональную матрицу с числами $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$ по главной диагонали, т. е. такой, что

$$Be_1 = \sqrt{\lambda_1}\, e_1, \ldots, Be_n = \sqrt{\lambda_n}\, e_n. \tag{11}$$

Ясно, что оператор B самосопряжен (в евклидовом случае — потому, что диагональная матрица симметрична, а в унитарном — потому, что диагональная матрица с вещественными элементами эрмитова) и обладает тем свойством, что $B^2 = A$. Следовательно, оператор A неотрицателен.

Если $(Ax, x) > 0$ при $x \neq 0$, и, в частности, $(Ae_i, e_i) > 0$, то $\lambda_i > 0$, и потому оператор B невырожден. Следовательно, оператор $A = B^2$ положителен. □

Заметим, что по ходу дела мы также доказали, что *самосопряженный оператор A тогда и только тогда неотрицателен (положителен), когда все его собственные значения неотрицательны (положительны)*.

В частности, отсюда следует, что определенный формулами (11) оператор B неотрицателен (а при A положительном — положителен). Таким образом, для любого неотрицательного (положительного) оператора A существует неотрицательный (соответственно положительный) оператор B, удовлетворяющий соотношению

$$A = B^2, \tag{12}$$

и легко видеть, что *этот оператор единствен*. Действительно, пусть B — произвольный неотрицательный оператор, удовлетворяющий соотношению (12), и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис, состоящий из собственных векторов

оператора $\boldsymbol{B}$, а $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — соответствующие собственные значения (по условию, неотрицательные). Тогда $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_i) = \mu_i^2 \boldsymbol{e}_i$ для любого $i = 1, \ldots, n$, и, значит, векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ являются собственными векторами оператора $\boldsymbol{A}$ с собственными значениями $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$. Поэтому числа $\mu_1^2, \ldots, \mu_n^2$ совпадают (после возможной перенумерации) с числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и, значит, $\mu_1 = \sqrt{\lambda_1}, \ldots, \mu_n = \sqrt{\lambda_n}$. Следовательно, оператор $\boldsymbol{B}$ совпадает с оператором (11). □

Единственный неотрицательный (положительный) оператор, удовлетворяющий соотношению (12), называется *квадратным корнем* из оператора $\boldsymbol{A}$ и обозначается символом $\sqrt{\boldsymbol{A}}$.