Лекция 22

Изометрические операторы. — Унитарные матрицы. — Теорема о полярном разложении. — Нормальные операторы в унитарном пространстве. — Ортогональная диагонализируемость унитарных операторов. — Связность групп $GL(n; \mathbb{C})$ и $U(n)$.

Положительные операторы являются аналогами положительных вещественных чисел. Рассмотрим теперь операторы, являющиеся аналогами комплексных чисел, модуль которых равен единице.

Предложение 1. *Следующие свойства линейного оператора $\boldsymbol{A}$ в евклидовом или унитарном пространстве $\mathscr{V}$ равносильны:*

а) *Для любых двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathscr{V}$ имеет место равенство*

$$(\boldsymbol{Ax}, \boldsymbol{Ay}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

б) *Для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \mathscr{V}$ имеет место равенство*

$$|\boldsymbol{Ax}| = |\boldsymbol{x}|.$$

в) *Для любого ортонормированного базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ векторы $\boldsymbol{Ae}_1, \ldots, \boldsymbol{Ae}_n$ также составляют ортонормированный базис этого пространства.*

г) *Для элементов a_i^j матрицы оператора $\boldsymbol{A}$ в произвольном ортонормированном базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ имеют место соотношения*

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k a_j^k = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

если пространство $\mathscr{V}$ евклидово, и соотношения

$$\sum_{k=1}^{n} a_i^k \bar{a}_j^k = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

если пространство $\mathscr{V}$ унитарно.

д) *Имеет место равенство*

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

е) *Оператор $\boldsymbol{A}$ обратим, и*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^*.$$

ж) *Имеет место равенство*

$$AA^* = E$$

з) *Для элементов* a_i^j *матрицы оператора* A *в произвольном ортонормированном базисе* $e_1, \ldots, e_n$ *пространства* $\mathscr{V}$ *имеют место соотношения*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^i a_k^j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

если пространство $\mathscr{V}$ *евклидово, и соотношения*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^i \bar{a}_k^j = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

если пространство $\mathscr{V}$ *унитарно.*

Доказательство. Мы докажем, что имеют место следующие импликации:

$$\begin{tikzcd}
\text{а)} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{д)} \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Leftrightarrow] & \text{е)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{ж)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{з)} \\
\text{в)} \arrow[r, Leftrightarrow] & \text{г)} \arrow[ur, Rightarrow, "\text{б)}"] & & &
\end{tikzcd}$$

Импликация а) $\Rightarrow$ б). Достаточно положить $y = x$.

Импликация а) $\Rightarrow$ в). Так как $(Ae_i, Ae_j) = (e_i, e_j)$, то $(Ae_i, Ae_j) = \delta_{ij}$, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Импликация б) $\Rightarrow$ д). Если $|Ax| = |x|$, то $((A^*A - E)x, x) = (A^*Ax, x) - (x, x) = (Ax, Ax) - (x, x) = |Ax|^2 - |x|^2 = 0$, и, следовательно, $A^*A = E$ (в евклидовом пространстве $\mathscr{V}$ — потому, что оператор $A^*A - E$ симметричен, а в унитарном пространстве $\mathscr{V}$ — по предложению 1 лекции 19).

Эквивалентность в) $\Leftrightarrow$ г). По определению $Ae_i = a_i^j e_j$. Поэтому

$$(Ae_i, Ae_j) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k a_j^k$$

в евклидовом пространстве и

$$(Ae_i, Ae_j) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k \bar{a}_j^k$$

в унитарном пространстве. Следовательно, в) $\Rightarrow$ г) и г) $\Rightarrow$ в).

Эквивалентность а)$\Leftrightarrow$д). По определению $(A^*Ax, y) = (Ax, Ay)$. Поэтому а)$\Rightarrow$д) и д)$\Rightarrow$а) (ибо для некоторого оператора C и любых векторов x и y тогда и только тогда имеет место равенство $(Cx, y) = (x, y)$, когда $C = E$).

Эквивалентности г)$\Leftrightarrow$д) и ж)$\Leftrightarrow$з). Оператор A^* имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрицу $\|\bar{a}_i^j\|$. Следовательно, элементами матрицы оператора AA^* являются суммы $\sum_k a_k^i \bar{a}_k^j$, а элементами матрицы оператора A^*A — суммы $\sum_k a_i^k \bar{a}_j^k$. Поэтому г)$\Leftrightarrow$д) и ж)$\Leftrightarrow$з).

Импликации д)$\Rightarrow$е) и ж)$\Rightarrow$е). См. импликации 1°$\Rightarrow$5° и 3°$\Rightarrow$5° предложения 2 лекции 15.

Импликации е)$\Rightarrow$д) и е)$\Rightarrow$ж). Имеют место по определению. □

Операторы, обладающие свойством а), а потому и всеми свойствами а)—з), называются *изометрическими*. В евклидовом пространстве $\mathscr{V}$ изометрические операторы называются также *ортогональными*, а в унитарном — *унитарными*. (Для евклидова пространства $\mathscr{V}$ эта терминология нам уже знакома; см. лекцию 15.)

Вещественные матрицы, обладающие свойствами (1) или (3), — это в точности ортогональные матрицы. По аналогии матрицы с комплексными коэффициентами, обладающие свойствами (2) и (4), называются *унитарными матрицами*. Для них имеет место следующий аналог предложения 3 лекции I. 13 (символом $\bar{A}^\top$ мы обозначаем транспонированную матрицу, все элементы которой заменены комплексно сопряженными числами):

Предложение 2. *Матрица $A = \|a_i^j\|$ порядка n с комплексными коэффициентами тогда и только тогда унитарна, когда она обладает одним (а потому и каждым) из следующих равносильных свойств:*

а) *матрица A является матрицей перехода, связывающей два ортонормированных базиса n-мерного унитарного пространства;*

б) *столбцы матрицы A составляют ортонормированное семейство векторов унитарного пространства $\mathbb{C}^n$;*

в) *имеет место равенство*

$$\bar{A}^\top A = E;$$

г) *матрица A обратима, и*

$$A^{-1} = \bar{A}^\top;$$

д) *имеет место равенство*

$$A\bar{A}^{\mathrm{T}} = E;$$

е) *строки матрицы A составляют ортонормированное семейство векторов унитарного пространства* $\mathbb{C}^n$.

Доказательство. Введем в рассмотрение линейный оператор A, имеющий в некотором ортонормированном базисе матрицу A. Тогда свойства а)—е) перейдут в свойства в)—з) оператора A из предложения 1. □

Так как $\det \bar{A}^{\mathrm{T}} = \overline{\det A}$, то из свойств в) и д) следует, что

$$|\det A| = 1$$

для любой унитарной матрицы A.

Очевидно, что все унитарные матрицы порядка n образуют группу. Эта группа называется *унитарной группой* и обозначается символом $\mathrm{U}(n)$. Ее подгруппа, состоящая из унимодулярных ($\det A = 1$) матриц, обозначается символом $\mathrm{SU}(n)$.

Предложение 3. *Любой обратимый оператор A в евклидовом или унитарном пространстве единственным образом разлагается в произведение изометрического оператора U и положительного оператора B:*

$$A = UB. \tag{5}$$

Доказательство. Так как оператор A^*A положителен, то существует положительный квадратный корень

$$B = \sqrt{A^*A}.$$

Пусть $U = AB^{-1}$. Тогда $U^* = (B^*)^{-1}A^* = B^{-1}A^*$ (ибо оператор B самосопряжен), и потому $U^*U = B^{-1}A^*AB^{-1} = B^{-1}B^2B^{-1} = E$. Таким образом, $A = UB$, где оператор U изометричен, а оператор B положителен.

Если $UB = VC$, где U, V — изометрические операторы, а B и C — положительные, то $BU^* = CV^*$, и потому

$$B^2 = BU^*UB = CV^*VC = C^2.$$

Следовательно (положительный квадратный корень извлекается однозначно), $B = C$, и, значит, $U = V$. Этим доказано, что разложение (7) единственно. □

Разложение (5) называется *полярным разложением* оператора A. Оно аналогично разложению $re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ произвольного комплексного числа в произведение его модуля r и числа $e^{i\varphi}$, равного по модулю единице.

Для матриц над полем $\mathbb{R}$ предложение 3 утверждает, что любая невырожденная матрица A может быть разложена в произведение UB, где U — ортогональная матрица, а B — матрица (в ортонормированном базисе) некоторого положительного и, значит, ортогонально диагонализируемого оператора B. С другой стороны, утверждение, что оператор B ортогонально диагонализируем, означает, что $B = VDV^{-1}$, где V — ортогональная матрица, а D — диагональная матрица с положительными — ввиду положительности оператора B — диагональными элементами. При этом легко видеть, что матрицу V мы всегда можем выбрать собственной (переставив, если нужно, диагональные элементы матрицы D). Таким образом, мы видим, что *любая невырожденная вещественная матрица A допускает разложение вида*

$$A = UVDV^{-1}, \tag{6}$$

где U и V — ортогональные матрицы (причем $\det V = 1$*), а D — диагональная матрица с положительными диагональными элементами.*

С точностью до обозначений — это лемма 2 из лекции 12б.

Конечно, разложения вида (6) — с заменой ортогональных матриц на унитарные — имеют место и для матриц над полем $\mathbb{C}$.

В унитарном пространстве — в отличие от евклидова пространства — самосопряженные (эрмитовы) операторы составляют только часть всех ортогонально диагонализируемых операторов, поскольку у эрмитовой матрицы все диагональные элементы должны быть вещественны. Поэтому оператор, имеющий в некотором ортонормированном базисе диагональную матрицу, хотя бы один элемент которой невещественен, ортогонально диагонализируем, но не эрмитов.

Определение 1. Оператор A в унитарном (или евклидовом) пространстве называется *нормальным*, если он перестановочен с сопряженным оператором A^*.

Напомним (см. лекцию 20), что в унитарном про-

странстве любой оператор A однозначно представляется в виде

$$A = B + iC,$$

где B и C — эрмитовы операторы.

Предложение 4. *Оператор $A = B + iC$ в унитарном пространстве тогда и только тогда нормален, когда операторы B и C перестановочны ($BC = CB$).*

Доказательство. Так как

$$A^* = B^* + (iC)^* = B^* - iC^* = B - iC,$$

то

$$AA^* = (B + iC)(B - iC) = B^2 + C^2 + i(CB - BC)$$

и

$$A^*A = (B - iC)(B + iC) = B^2 + C^2 - i(CB - BC).$$

Следовательно, $AA^* = A^*A$ тогда и только тогда, когда $CB - BC = 0$. □

Заметим, что для нормального оператора A оператор $AA^* = A^*A$ выражается формулой

$$AA^* = B^2 + C^2,$$

аналогичной формуле для квадрата модуля комплексного числа.

Если оператор A в некотором ортонормированном базисе имеет диагональную матрицу A, то сопряженный оператор в том же базисе будет иметь комплексно сопряженную и транспонированную, а потому также диагональную, матрицу. Поскольку любые две диагональные матрицы коммутируют, операторы A и A^* также коммутируют. Этим доказано, что *в унитарном пространстве любой ортогонально диагонализируемый оператор нормален.*

Наша ближайшая цель будет состоять в доказательстве обратного утверждения. Для этого мы попробуем перенести на случай нормальных операторов предложения 1—4 лекции 21.

Предложение 1 лекции 21 на нормальные операторы непосредственно, конечно, не обобщается, поскольку собственные значения (= характеристические корни) нормального оператора могут быть любыми комплексными числами. Его аналогом для нормальных операторов является следующее предложение, из которого, кстати сказать, предложение 1 лекции 21 для унитарных пространств непосредственно вытекает:

Предложение 5. *Любой собственный вектор нормального оператора A, принадлежащий собственному значению λ, будет собственным вектором сопряженного оператора A^*, принадлежащим собственному значению $\bar{\lambda}$.*

Доказательство. Если оператор A нормален, то для любого вектора x

$$(Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (AA^*x, x) = (A^*x, A^*x),$$

т. е.

$$|Ax| = |A^*x|.$$

Поскольку вместе с оператором A нормален и каждый оператор вида $A - \lambda E$, отсюда следует (так как $(A - \lambda E)^* = A^* - \bar{\lambda}E$), что для любого λ

$$|(A - \lambda E)x| = |(A^* - \bar{\lambda}E)x|.$$

Поэтому, если $(A - \lambda E)x = 0$, то $(A^* - \bar{\lambda}E)x = 0$. □

Предложение 2 лекции 21 сохраняется для нормальных операторов полностью:

Предложение 6. *Любые два собственных вектора x и y нормального оператора A, принадлежащие различным собственным значениям λ и μ, ортогональны.*

Доказательство. Если $Ax = \lambda x$, то $(Ax, y) = \lambda(x, y)$. Аналогично, если $Ay = \mu y$ и, значит, согласно предложению 5, $A^*y = \bar{\mu}y$, то $(x, A^*y) = (x, \bar{\mu}y) = \mu(x, y)$. Следовательно, $\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, A^*y) = \mu(x, y)$, и потому $(x, y) = 0$ (ибо, по условию, $\lambda \neq \mu$). □

Напротив, предложение 3 лекции 21 для нормальных операторов, вообще говоря, неверно: существуют нормальные операторы, имеющие инвариантные подпространства с неинвариантным ортогональным дополнением (постройте пример!). Однако для собственных подпространств оно оказывается верным:

Предложение 7. *Ортогональное дополнение $\mathcal{P}_\lambda^\perp$ произвольного собственного подпространства $\mathcal{P}_\lambda$ нормального оператора A инвариантно относительно A.*

Доказательство. Если $x \in \mathcal{P}_\lambda^\perp$, то $(x, y) = 0$ для любого вектора $y \in \mathcal{P}_\lambda$. Поэтому $(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, \bar{\lambda}y) = \lambda(x, y) = 0$, ибо, согласно предложению 5, $A^*y = \bar{\lambda}y$. Следовательно, $Ax \in \mathcal{P}_\lambda^\perp$. □

Как уже было замечено в лекции 21, только это свойство оператора A необходимо в доказательстве предложения 4 лекции 21. Поэтому это предложение сохраняет силу для любого нормального оператора, что, ввиду

предложения 7 обеспечивает его ортогональную диагонализируемость.

Тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Линейный оператор в унитарном пространстве тогда и только тогда ортогонально диагонализируем, когда он нормален.* □

Эта теорема позволяет редуцировать свойства нормального оператора к свойствам его спектра. Например, теперь очевидно, что *нормальный оператор* A *в унитарном пространстве тогда и только тогда*

а) *эрмитов,*

б) *обратим,*

в) *идемпотентен,*

когда его собственные значения соответственно

а′) *вещественны,*

б′) *отличны от нуля,*

в′) *равны нулю или единице.*

Заметим, что импликации а)$\Rightarrow$а′), б)$\Rightarrow$б′) и в)$\Rightarrow$в′) имеют место для любых линейных операторов. Однако обратные — самые интересные — импликации имеют место только для нормальных операторов (постройте соответствующие примеры!).

Конечно, аналогичные утверждения о равносильности свойств имеют место и для симметрических операторов в евклидовом пространстве.

Поскольку каждый унитарный оператор, очевидно, нормален (так как $U^*U = E$ и $UU^* = E$, то $U^*U = UU^*$), из теоремы 2, в частности, следует, что *каждый унитарный оператор* U *ортогонально диагонализируем.*

При этом легко видеть, что *спектр произвольного унитарного оператора* U *расположен в плоскости комплексного переменного на единичной окружности*, т. е. модуль любого характеристического корня λ унитарного оператора равен единице:

$$|\lambda| = 1.$$

Действительно, над полем $\mathbb{C}$ каждый характеристический корень λ оператора U является собственным значением, т. е. существует такой вектор $x_0 \neq 0$, что $Ux_0 = \lambda x_0$. Поэтому $(x_0, x_0) = (Ux_0, Ux_0) = (\lambda x_0, \lambda x_0) = \lambda\bar{\lambda}(x_0, x_0)$, и, значит, $\lambda\bar{\lambda} = 1$. □

Поскольку $|\lambda| = 1$ тогда и только тогда, когда $\lambda = e^{i\varphi}$, тем самым доказана следующая теорема:

Теорема 2. Для каждого унитарного оператора U существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора является диагональной матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} e^{i\varphi_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\varphi_n} \end{Vmatrix}. \quad \square \tag{7}$$

Для унитарных матриц это означает, что *каждая унитарная матрица U допускает представление вида*

$$U = V^{-1}DV,$$

где V — унитарная матрица, а D — диагональная матрица вида (7).

Применив этот результат к матрице U из разложения (6), написанного для невырожденной комплексной матрицы C, и обозначив матрицы D и V из этого разложения символами B и U, мы немедленно получим, что *каждая невырожденная комплексная матрица C допускает представление вида*

$$C = V^{-1}DVUBU^{-1}, \tag{8}$$

где U и V — унитарные матрицы, D — диагональная матрица (7), *а B — диагональная матрица*

$$\begin{Vmatrix} b_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & b_n \end{Vmatrix}$$

с положительными элементами $b_1, \ldots, b_n$.

Отсюда следует, что в отличие от аналогичной группы над полем $\mathbb{R}$ *группа* $\mathrm{GL}(n; \mathbb{C})$ *комплексных невырожденных матриц связна.* Действительно, для любой матрицы (8) формула

$$C(t) = V^{-1}D(t)VUB(t)U^{-1}, \tag{9}$$

где $B(t)$ и $D(t)$ — диагональные матрицы с диагональными элементами

$$(1-t)+tb_1, \ldots, (1-t)+tb_n \quad \text{и} \quad e^{it\varphi_1}, \ldots, e^{it\varphi_n}$$

соответственно, определяет в группе $GL(n; \mathbb{C})$ путь $t \longmapsto C(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, соединяющий матрицу E с матрицей C. □

Если матрица C унитарна (и потому $B = E$), то все матрицы (9) также унитарны. Следовательно, *группа* $U(n)$ *также связна.*

Связными группами являются и группы унимодулярных матриц $SL(n; \mathbb{C})$ *и* $SU(n)$. (Для доказательства достаточно разделить каждую матрицу (9) на ее определитель.)

Связность групп $GL(n; \mathbb{C})$ и $U(n)$ объясняет, почему над полем $\mathbb{C}$ нет понятия ориентации.