Лекция 23

Комплексификация евклидова пространства. — Нормальные операторы в евклидовом пространстве. — Приведение к нормальному виду ортогональных операторов. — Аффинные и ортогональные преобразования. — Параллельные переносы и центроаффинные преобразования. — Вращения и несобственные вращения.

Для исследования нормальных операторов в евклидовом пространстве мы применим прием комплексификации.

Пусть $\mathcal{V}$ — евклидово пространство и $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ — его комплексификация (как линейного пространства над $\mathbb{R}$). По определению $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ является линейным пространством над $\mathbb{C}$, состоящим из векторов вида

$$z = x + iy, \quad \text{где} \quad x, y \in \mathcal{V}.$$

В частности, $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ (как подпространство над $\mathbb{R}$).

Предложение 1. *На пространстве $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ существует единственное скалярное умножение, продолжающее скалярное умножение на $\mathcal{V}$ (т. е. совпадающее с ним на векторах из $\mathcal{V}$).*

Это предложение означает, что комплексификация $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ евклидова пространства $\mathcal{V}$ естественным образом является унитарным пространством.

Подчеркнем, что в то время как скалярное умножение на $\mathcal{V}$ билинейно и симметрично, продолжающее его скалярное умножение на $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ полуторалинейно и эрмитово.

Доказательство предложения 1. Если скалярное умножение на $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ продолжает скалярное умножение на $\mathcal{V}$, то для любых векторов $c = a + ib$ и $z = x + iy$ пространства $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ будет иметь место равенство

$$\begin{aligned}(c, z) &= (a + ib, x + iy) = \\ &= (a, x) + (ib, x) + (a, iy) + (ib, iy) = \\ &= (a, x) + i(b, x) - i(a, y) + (b, y),\end{aligned}$$

т. е. равенство

$$(1) \qquad (c, z) = [(a, x) + (b, y)] + i[(b, x) - (a, y)].$$

Это доказывает единственность скалярного умножения на $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$.

Чтобы доказать его существование, мы примем формулу (1) за определение произведения (c, z). Тогда в первую очередь нужно проверить, что тем самым мы действительно получаем на $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$ скалярное умножение, т. е. что функционал A: $c, z \longmapsto (c, z)$ полуторалинеен, эрмитов и положительно определен. Но в отношении сложения и умножения на вещественные числа линейность функционала A сомнений не вызывает. С другой стороны, так как $ic = -b + ia$ и $iz = -y + ix$, то

$$(ic, z) = [(-b, x) + (a, y)] + i[(a, x) - (-b, y)] = \\ = -[(b, x) - (a, y)] + i[(a, x) + (b, y)] = i(c, z)$$

и

$$(c, iz) = [(a, -y) + (b, x)] + i[(b, -y) - (a, x)] = \\ = [(b, x) - (a, y)] - i[(a, x) + (b, y)] = -i(c, z).$$

Следовательно, функционал A полуторалинеен. Кроме того, так как

$$(z, c) = [(x, a) + (y, b)] + i[(y, a) - (x, b)] = \\ = [(a, x) + (b, y)] - i[(b, x) - (a, y)] = \overline{(c, z)}$$

и

$$(c, c) = (a, a) + (b, b) = |a|^2 + |b|^2,$$

то функционал A эрмитов и положительно определен.

Наконец, так как $(c, z) = (a, x)$ при $b = 0$ и $y = 0$, то скалярное умножение (1) продолжает скалярное умножение, заданное на $\mathscr{V}$. □

Из формулы (1) следует, что для любого линейного оператора A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ операторы

$$A^{\mathbb{C}}(x + iy) = Ax + iAy$$

и

$$A^{*\mathbb{C}}(x + iy) = A^*x + iA^*y$$

удовлетворяют соотношению

$$(A^{\mathbb{C}}c, z) = [(Aa, x) + (Ab, y)] + i[(Ab, x) - (Aa, y)] = \\ = [(a, A^*x) + (b, A^*y)] + i[(b, A^*x) - (a, A^*y)] = \\ = (c, A^{*\mathbb{C}}z),$$

показывающему, что

$$(A^{\mathbb{C}})^* = (A^*)^{\mathbb{C}}.$$

Поэтому, *если оператор A нормален, то оператор $A^{\mathbb{C}}$ также нормален*:

$$(A^{\mathbb{C}})^* A^{\mathbb{C}} = (A^*)^{\mathbb{C}} A^{\mathbb{C}} = (A^* A)^{\mathbb{C}} = \\ = (AA^*)^{\mathbb{C}} = A^{\mathbb{C}} (A^*)^{\mathbb{C}} = A^{\mathbb{C}} (A^{\mathbb{C}})^*. \ \square$$

Поскольку, согласно теореме 1 лекции 22, нормальные операторы в унитарном пространстве ортогонально диагонализируемы, отсюда следует, что каждый нормальный оператор A: $\mathscr{V} \to \mathscr{V}$ удовлетворяет условиям теоремы 2 лекции 18. Следовательно, согласно этой теореме, в пространстве $\mathscr{V}$ существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица оператора A является прямой суммой матриц первого порядка $\|\lambda_i\|$ и матриц второго порядка

$$\begin{Vmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{Vmatrix},$$

где λ_i — вещественные характеристические корни оператора A, а α_j и β_j — вещественные и мнимые части его невещественных характеристических корней.

Согласно описанной в лекции 18 конструкции базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathscr{V}$ получается из такого базиса $e_1^{\mathbb{C}}, \ldots, e_n^{\mathbb{C}}$ пространства $\mathscr{V}^{\mathbb{C}}$, что

а) каждый вектор $e_q^{\mathbb{C}}$ является собственным вектором оператора $A^{\mathbb{C}}$,

б) если $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ — все вещественные, а

$$\lambda_{r+1} = \alpha_1 + i\beta_1, \ \ldots, \ \lambda_{r+s} = \alpha_s + i\beta_s$$

— все невещественные и попарно комплексно несопряженные характеристические корни оператора A (собственные значения оператора $A^{\mathbb{C}}$), каждый из которых повторен столько раз, какова его кратность (так что $r + 2s = n$), то

1) при $1 \leqslant q \leqslant r$ вектор $e_q^{\mathbb{C}}$ вещественен и принадлежит собственному значению λ_q;

2) при $r + 1 \leqslant q \leqslant r + s$ вектор $e_q^{\mathbb{C}}$ невещественен и принадлежит собственному значению λ_q;

3) при $r + s + 1 \leqslant q \leqslant n$ вектор $e_q^{\mathbb{C}}$ комплексно сопряжен с вектором $e_{q-s}^{\mathbb{C}}$ и принадлежит собственному значению $\bar{\lambda}_{q-s}$. При этом

$$e_q = \begin{cases} e_q^{\mathbb{C}}, & \text{если} \quad q = 1, \ldots, r; \\ \operatorname{Re} e_{r+m}^{\mathbb{C}}, & \text{если} \quad q = r + 2m - 1; \\ \operatorname{Im} e_{r+m}^{\mathbb{C}}, & \text{если} \quad q = r + 2m, \end{cases} \tag{2}$$

где $m = 1, \ldots, s$.

Поскольку же оператор $A^{\mathbb{C}}$ диагонализируем ортогонально, мы, кроме того, можем считать, что базис $e_1^{\mathbb{C}}, \ldots, e_n^{\mathbb{C}}$ ортонормирован:

$$(e_p^{\mathbb{C}}, e_q^{\mathbb{C}}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p = q, \\ 0, & \text{если} \quad p \neq q, \end{cases}$$

откуда в силу формул (1) и (2) вытекает, что

$$(e_p, e_q) = 0 \quad \text{при} \quad p \neq q$$

и

$$(e_p, e_p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad p = 1, \ldots, r, \\ \frac{1}{2}, & \text{если} \quad p = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

(проделайте аккуратно соответствующее вычисление!). Следовательно, умножив все векторы $e_{r+1}, \ldots, e_n$ на $\sqrt{2}$, мы получим ортонормированный базис. Так как матрица оператора A при этой операции, как легко видеть, не меняется, то тем самым нами доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Для любого нормального оператора A в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{V}$ существует ортонормированный базис, в котором матрица этого оператора имеет вид*

$$(3) \qquad \left\| \begin{matrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & \\ & & & \begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ -\beta_1 & \alpha_1 \end{matrix} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \begin{matrix} \alpha_s & \beta_s \\ -\beta_s & \alpha_s \end{matrix} \end{matrix} \right\|, \qquad \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

где $r + 2s = n$. □

Эта теорема, в частности, применима к произвольному ортогональному оператору A (ясно, что каждый ортонормальный оператор нормален).

При этом, так как для ортогонального оператора A оператор $A^{\mathbb{C}}$, очевидно, унитарен:

$$(A^{\mathbb{C}})^* A^{\mathbb{C}} = (A^*)^{\mathbb{C}} A^{\mathbb{C}} = (A^* A)^{\mathbb{C}} = E^{\mathbb{C}} = E,$$

то все характеристические корни λ ортогонального оператора A (являющиеся одновременно собственными значениями унитарного оператора A^C) расположены в комплексной плоскости на единичной окружности

$$|\lambda| = 1.$$

Для матрицы (3) отсюда следует, что все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ равны ± 1, а числа α_q, β_q обладают тем свойством, что $\alpha_q^2 + \beta_q^2 = 1$, и, значит, могут быть представлены в виде

$$\alpha_q = \cos\varphi_q, \qquad \beta_q = \sin\varphi_q,$$

где $0 < \varphi_q < \pi$.

Поскольку матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

также имеют вид

$$\begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{Vmatrix} \tag{4}$$

(при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ соответственно), мы получаем, следовательно, что для ортогонального оператора матрицу (3) можно считать прямой суммой матриц второго порядка вида (4) с $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и при n нечетном матрицы первого порядка ± 1, а при n четном и $\det A = -1$ — матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Этим доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Для любого ортогонального оператора A в n-мерном евклидовом пространстве $\mathscr{V}$ существует ортонормированный базис, в котором его матрица при $n = 2m + 1$ имеет вид*

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon & & & & \\ & \begin{matrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & & \begin{matrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{matrix} & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & \begin{matrix} \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{matrix} \end{Vmatrix} \tag{5}$$

где $\varepsilon = \pm 1$, *а при* $n = 2m$ — *либо вид*

$$(6)\quad \begin{Vmatrix} \begin{matrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \begin{matrix} \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 \\ -\sin\varphi_2 & \cos\varphi_2 \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \begin{matrix} \cos\varphi_m & \sin\varphi_m \\ -\sin\varphi_m & \cos\varphi_m \end{matrix} \end{Vmatrix},$$

либо вид

$$(7)\quad \begin{Vmatrix} \begin{matrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 \end{matrix} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \begin{matrix} \cos\varphi_{m-1} & \sin\varphi_{m-1} \\ -\sin\varphi_{m-1} & \cos\varphi_{m-1} \end{matrix} & \\ 0 & & & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \end{Vmatrix}. \quad \square$$

Определитель матрицы (5) равен ε, определитель матрицы (6) положителен (равен 1), а определитель матрицы (7) отрицателен (равен -1).

Заметим, что для *псевдоортогональных операторов* аналогичная теорема имеет существенно более сложный вид (клеток размера 2×2 уже недостаточно, и нужны клетки размера 4×4).

Напомним (см. лекцию I.25), что *аффинным преобразованием* аффинного пространства $\mathscr{A}$ называется его произвольный автоморфизм, т. е. преобразование, действующее по равенству координат в двух аффинных координатных системах. Если в пространстве $\mathscr{A}$ выбрана начальная точка O, то произвольное аффинное преобразование точку с радиус-вектором $\boldsymbol{x}$ будет переводить в точку с радиус-вектором вида

$$(8)\qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

где $\boldsymbol{A}$ — некоторый обратимый линейный оператор на ассоциированном линеале $\mathscr{V}$, а $\boldsymbol{b}$ — фиксированный вектор (это лишь иная запись формулы (2) лекции I.25).

Аналогично, *ортогональным преобразованием* точечного евклидова пространства $\mathscr{E}$ называется его преобразование, действующее по равенству координат в двух евклидовых (прямоугольных) координатных системах. Оно записывается той же формулой (8), но уже с ортогональным оператором $\boldsymbol{A}$.

Аффинные пространства над полем C, в ассоциированный линеал которых введена структура унитарного линейного пространства, называются *унитарными точечными пространствами*. Автоморфизмами таких пространств являются *унитарные преобразования*, записывающиеся формулой (8) с унитарным оператором $\boldsymbol{A}$.

Поскольку любое евклидово (или унитарное) точечное пространство является одновременно аффинным, имеет смысл говорить о его аффинных преобразованиях (8). Полярному разложению $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{UB}$ оператора $\boldsymbol{A}$ будет отвечать при этом разложении аффинного преобразования (8) в композицию аффинного преобразования

$$y = \boldsymbol{B}x \tag{9}$$

и ортогонального (или унитарного) преобразования

$$y = \boldsymbol{U}x + \boldsymbol{b}.$$

В прямоугольных координатах, выбранных соответствующим образом, преобразование (9) записывается формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= \lambda_1 x_1, \\ &\cdots\cdots \\ y_n &= \lambda_n x_n, \end{aligned}$$

где $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, и представляет собой композицию n сжатий к n взаимно перпендикулярным гиперплоскостям. Этим доказано следующее предложение:

Предложение 2. *Каждое аффинное преобразование n-мерного евклидова (унитарного) точечного пространства является композицией ортогонального (унитарного) преобразования и n сжатий к n взаимно перпендикулярным гиперплоскостям.* □

При $n=2$ это утверждение составляет содержание предложения 1 лекции I.25

При $A = E$ преобразование (8) имеет вид

$$y = x + b$$

и называется *параллельным переносом* на вектор b. При $b = 0$ преобразование (8) имеет вид

$$y = Ax$$

и называется *центроаффинным преобразованием*. Оно оставляет на месте точку O, которая называется его *центром*. Любое аффинное преобразование является композицией параллельного переноса и некоторого центроаффинного преобразования.

Подчеркнем, что преобразование (8) с $b \neq 0$ вполне может быть центроаффинным преобразованием (с центром, отличным от O). Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовал вектор x_0 (радиус-вектор центра), удовлетворяющий соотношению

$$x_0 = Ax_0 + b,$$

т. е. такой, что $(A - E)x_0 = b$. В частности, так обязательно будет, *если оператор $A - E$ обратим*, т. е. если число 1 не является собственным значением оператора A.

Ортогональное преобразование (8) называется *собственным*, если матрица оператора A (в некотором, а потому и в любом) ортонормированном базисе имеет положительный определитель (и, следовательно, унимодулярна). Собственные ортогональные преобразования называются также *движениями*. Движение, оставляющее на месте точку O (т. е. являющееся центроаффинным преобразованием), называется *вращением*.

Каждое вращение Ω оставляет на месте все точки некоторой плоскости, проходящей через точку O. Наибольшая такая плоскость (имеющая максимальную размерность) называется *осью* вращения. Размерность оси — для нетождественного вращения — может принимать любое значение от нуля до $n - 2$ (осью размерности 0 является точка O, а случай оси размерности $n - 1$ невозможен).

Плоскость Π, перпендикулярную оси, вращение Ω переводит в себя и индуцирует в ней снова вращение.

Допуская вольность, принято говорить, что Ω является *вращением в плоскости* Π.

В частности, если $\dim \Pi = 2$ и евклидова координатная система $Oe_1e_2 \ldots e_n$ выбрана так, что векторы e_1 и e_2 параллельны плоскости Π (а значит, остальные векторы $e_3, \ldots, e_n$ параллельны оси вращения Ω), то вращение Ω будет задаваться матрицей вида

$$\begin{Vmatrix} \boxed{\begin{matrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{matrix}} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{Vmatrix}.$$

Отсюда следует, что теорема 2 — применительно к вращениям — сводится к утверждению, что *каждое вращение точечного евклидова пространства является композицией вращений в попарно ортогональных двумерных плоскостях.*

Если число этих плоскостей равно m, то размерность оси вращения равна $n - 2m$, где n — размерность пространства. Поэтому *в нечетномерном пространстве любое вращение обладает осью положительной размерности.*

Что касается несобственных ортогональных преобразований, оставляющих на месте точку O (такие преобразования называются иногда *несобственными вращениями*), то о них теорема 2 утверждает, что *каждое такое преобразование является композицией вращения, обладающего осью положительной размерности, и симметрии относительно гиперплоскости, перпендикулярной прямой, содержащейся в оси.*

Это описание вращений и несобственных вращений позволяет перенести на случай пространств произвольной размерности практически все результаты, полученные в первом семестре для ортогональных преобразований плоскости и трехмерного пространства.

Например, так как вращение, имеющее нульмерную ось (точнее, соответствующий ортогональный оператор ассоциированного линеала), не имеет собственных значений, равных 1, то его композиция с произвольным параллельным переносом снова является вращением (но с другим центром). Для вращения с осью положительной размерности отсюда следует, что его композиция с

параллельным переносом будет вращением, если вектор переноса ортогонален оси вращения. Называя *винтовым движением* композицию некоторого вращения и параллельного переноса на вектор, параллельный оси вращения, мы тем самым немедленно получаем, что *каждое движение евклидова пространства является винтовым* (при $n = 2$ — это предложение 2 лекции I.25, а при $n = 3$ — предложение 3 лекции I.26).

Дальнейшие результаты в этом направлении мы оставим инициативе читателя.