Лекция 24

Спиноры и спинтензоры. — Спинорная модель геометрии Минковского. — Гомоморфизм $SL(2; C) \to O_+^\uparrow(1, 3)$. — Спинорная модель трехмерной геометрии Евклида. — Кватернионы. — Гомоморфизм $SU(2) \to SO(3)$. — Доказательство предложения 1. — Гомоморфизм $SL(2; R) \to O_+^\uparrow(1, 2)$.

Прием комплексификации не является единственным способом применять комплексные числа к изучению вещественных объектов. Другой очень важный и интересный метод мы рассмотрим в этой лекции на конкретном примере так называемых *спиноров*, введенных в науку первоначально физиками и до сих пор играющих в ряде вопросов математической физики основополагающую роль.

За недостатком места и времени мы ограничимся изложением спинорной техники лишь на простейших примерах пространства Минковского и трехмерного пространства Евклида.

Пусть $\mathscr{M}$ — линейное пространство Минковского (псевдоевклидово пространство типа (1, 3)). Выбрав в $\mathscr{M}$ произвольный псевдоортонормированный базис e_0, e_1, e_2, e_3, мы сопоставим каждому вектору

$$x = x^0 e_0 + x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$

пространства $\mathscr{M}$ эрмитову матрицу

$$X = \begin{Vmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

В соответствии с общей системой обозначений, введенной в лекции 18, элементы этой матрицы не будем обозначать символами $x^{\alpha\bar{\beta}}$, где $\alpha, \beta = 0, 1$ и

$$\begin{aligned} x^{0\bar{0}} &= x^0 + x^3, & x^{1\bar{0}} &= x^1 - ix^2, \\ x^{0\bar{1}} &= x^1 + ix^2, & x^{1\bar{1}} &= x^0 - x^3. \end{aligned} \tag{2}$$

Числа (2) называются *спинорными компонентами* вектора x.

Замечание 1. В физической литературе спинорные компоненты обозначаются обычно символами вида $x^{A\overline{B}}$, $x^{AB'}$ или x^{AB}.

На инвариантном бескоординатном языке переход к спинорным компонентам означает, что векторы пространства $\mathscr{M}$ мы отождествляем с эрмитовыми функционалами на некотором вспомогательном двумерном комплексном пространстве $\mathscr{H}$.

Векторы пространства $\mathscr{H}$ называются *спинорами*, а тензоры (обобщенные) на нем — *спинтензорами*.

Отождествление векторов пространства $\mathscr{M}$ (тензоров вида x^i) со спинтензорами вида $x^{\alpha\bar{\beta}}$ (подчиненными условию эрмитовости) распространяется по мультипликативности на любые тензоры (например, тензоры b^{ij} отождествляются с некоторыми спинтензорами вида $b^{\alpha\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}$, тензоры вида a^i_j — с некоторыми спинтензорами вида $a^{\alpha\bar{\beta}}_{\gamma\bar{\delta}}$ и т. п.). Это вложение пространства тензоров в пространство спинтензоров увеличивает силу и гибкость тензорного исчисления, позволяя использовать для исследования тензоров произвольные спинтензоры, не являющиеся, вообще говоря, образами тензоров пространства $\mathscr{M}$.

Конечно, чтобы эта процедура имела смысл, необходимо, чтобы она не зависела от выбора базисов, т. е. была согласована с правилами преобразований тензоров и спинтензоров. Мы проверим эту согласованность — которая, кстати сказать, имеет место отнюдь не в полном объеме, — заново начав все построение с пространства $\mathscr{H}$.

Итак, пусть $\mathscr{H}$ — произвольное двумерное линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и пусть $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ — множество всех эрмитовых функционалов на пространстве $\mathscr{H}$. В отличие от предыдущих лекций мы будем использовать для обозначения элементов пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ строчные греческие буквы.

Так как в произвольном базисе e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$ каждый функционал ξ из $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ задается эрмитовой матрицей (1) и так как для любой такой матрицы имеет место равенство

$$X = x^0\sigma_0 + x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3,$$

где

$$\sigma_0 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},$$

(3) $$\sigma_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{Vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{Vmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix}$$

— так называемые *матрицы Паули* (они были введены известным немецким физиком Паули в его теории спина электрона), то

а) множество $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ всех эрмитовых функционалов на пространстве $\mathscr{H}$ является четырехмерным линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел;

б) каждый базис e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$ определяет базис

(4) $$\sigma_0, \ \sigma_1, \ \sigma_2, \ \sigma_3$$

пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$, состоящий из функционалов, имеющих в базисе e_0, e_1 матрицы (3).

Мы будем называть базис (4) *базисом Паули* пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$, отвечающим данному базису e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$.

Поскольку определитель $\det X$ матрицы (1) выражается, как легко видеть, формулой

$$\det X = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2,$$

мы видим, что, приняв за скалярный квадрат $|\xi|^2 = (\xi, \xi)$ вектора $\xi \in \mathscr{M}(\mathscr{H})$ определитель $\det X$ его матрицы в базисе e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$, мы введем в $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ структуру пространства Минковского. [Легко видеть, что соответствующее скалярное умножение задается формулой

(5) $$(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\operatorname{Tr} X \operatorname{Tr} Y - \operatorname{Tr} XY),$$

где X и Y — матрицы функционалов ξ и η. Действительно, ясно, что умножение (5) билинейно и симметрично. Поэтому нужно лишь показать, что для любого вектора $\xi \in \mathscr{M}(\mathscr{H})$ имеет место равенство $(\xi, \xi) = \det X$, т. е. для любой эрмитовой матрицы (1) — равенство

(6) $$(\operatorname{Tr} X)^2 - \operatorname{Tr} X^2 = 2 \det X.$$

Проверка последнего равенства без труда осуществляется непосредственным вычислением, которого, впрочем, можно и избежать, введя в рассмотрение характеристические корни λ и μ матрицы X. Так как характе-

ристическими корнями матрицы X^2 служат числа λ^2 и μ^2 (почему?), то $\operatorname{Tr} X^2 = \lambda^2 + \mu^2$. Поскольку же $\operatorname{Tr} X = \lambda + \mu$ и $\det X = \lambda\mu$, соотношение (6) сводится тем самым к очевидному тождеству

$$(\lambda + \mu)^2 - (\lambda^2 + \mu^2) = 2\lambda\mu.]$$

В построении скалярного умножения (5) участвует — хотя и неявно — некоторый базис пространства $\mathscr{H}$, и потому возникает вопрос, в какой мере умножение (5) зависит от выбора этого базиса.

В каждом другом базисе $e_{0'}$, $e_{1'}$ пространства $\mathscr{H}$ функционал ξ имеет матрицу $X' = \bar{C}^{\mathrm{T}} X C$, где C — матрица перехода от базиса e_0, e_1 к базису $e_{0'}$, $e_{1'}$, и, значит,

$$\det X' = |\det C|^2 \det X.$$

В частности, если $\det C = 1$ (или хотя бы $|\det C| = 1$), то $\det X' = \det X$, и, значит, в базисах e_0, e_1 и $e_{0'}$, $e_{1'}$ мы получаем на $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ одно и то же скалярное умножение.

Имея это в виду, мы будем считать, что *в пространство спиноров $\mathscr{H}$ введена дополнительная структура*, состоящая в фиксации некоторого бивектора $\mathfrak{a}_0 \neq 0$, и будем рассматривать лишь базисы e_0, e_1, *допустимые* относительно этой структуры, т. е. такие, что $e_0 \wedge e_1 = \mathfrak{a}_0$. Так как для матриц перехода, связывающих допустимые базисы, условие $\det C = 1$ заведомо выполнено, то в силу этого соглашения *структура пространства Минковского на линеале $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ определена корректно (не зависит от выбора базиса)*.

Ясно, что *каждый базис Паули* (4) *пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ псевдоортонормирован.*

Через тензорные произведения векторов e_0, e_1 элементы базиса Паули (4) выражаются, очевидно, формулами

$$\sigma_0 = e_0 \otimes e_{\bar{0}} + e_1 \otimes e_{\bar{1}}, \qquad \sigma_1 = e_0 \otimes e_{\bar{1}} + e_1 \otimes e_{\bar{0}},$$

$$\sigma_2 = ie_0 \otimes e_{\bar{1}} - ie_1 \otimes e_{\bar{0}}, \qquad \sigma_3 = e_0 \otimes e_{\bar{0}} - e_1 \otimes e_{\bar{1}}.$$

Поэтому любая деформация базиса e_0, e_1 вызывает деформацию базиса σ_0, σ_1, σ_2, σ_3, состоящую из базисов Паули (и, значит, псевдоортонормированную). Поскольку любые два допустимых базиса пространства $\mathscr{H}$ деформируемы друг в друга (группа $\mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ связна), отсюда непосредственно следует, что *все базисы Паули*

определяют одну и ту же ориентацию псевдоевклидова пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$.

Это означает, что *пространство* $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ *естественным образом ориентировано.*

Теперь мы можем вернуться к произвольному пространству Минковского $\mathscr{M}$. Описанная в начале лекции спинорная интерпретация векторов этого пространства означает в инвариантных терминах, что мы отождествляем пространство $\mathscr{M}$ с пространством $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ посредством некоторого (раз навсегда фиксированного) изоморфизма. Поскольку пространство $\mathscr{M}(\mathscr{H})$, как только что было сказано, естественно ориентировано, пространство $\mathscr{M}$ оказывается, тем самым, также ориентированным. Таким образом, *введение в рассмотрение спиноров предполагает, что пространство* $\mathscr{M}$ *ориентировано.*

В силу отождествления $\mathscr{M}(\mathscr{H}) = \mathscr{M}$ каждый базис Паули будет базисом пространства $\mathscr{M}$, задающим данную его ориентацию (такие базисы мы будем называть *положительно ориентированными*).

Поэтому для любой матрицы $C \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$, интерпретируемой как матрица перехода между двумя базисами пространства $\mathscr{H}$, матрица $s(C)$, связывающая отвечающие этим базисам базисы Паули пространства $\mathscr{M}$, будет принадлежать группе Лоренца $\mathrm{O}_+^\uparrow(1, 3)$. Получающееся отображение

$$s\colon \mathrm{SL}(2;\ \mathbb{C}) \to \mathrm{O}_+^\uparrow(1,\ 3) \tag{7}$$

является, очевидно, гомоморфизмом.

Предложение 1. *Отображение* (7) *является эпиморфизмом с ядром* $\{E, -E\}$.

Помимо того, что это предложение дает вполне удовлетворительное описание алгебраического строения группы $\mathrm{O}_+^\uparrow(1, 3)$, оно доказывает также, что *любой положительно ориентированный псевдоортонормированный базис пространства* $\mathscr{M}$ *является базисом Паули, отвечающим некоторому базису пространства спиноров* $\mathscr{H}$. Это означает, что спинорный подход к геометрии Минковского обладает свойством адекватности.

Предложение 1 мы докажем позже.

Замечание 2. Отображение s можно без особого труда задать явными формулами. Рассмотрим для любой матрицы $C \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$ и любого $i = 0, 1, 2, 3$ матрицу $\overline{C}^{\mathrm{T}}\sigma_i C$. Эта матрица эрмитова и потому является

линейной комбинацией матриц Паули, т. е. существуют такие вещественные числа $a_i^{i'}$, $i'=0, 1, 2, 3$, что

$$\bar{C}^{\top}\sigma_i C = a_i^{i'}\sigma_{i'}.$$

Матрица $A=\|a_i^{i'}\|$ является не чем иным, как матрицей линейного оператора

$$X \longmapsto \bar{C}^{\top} X C, \tag{8}$$

действующего в пространстве всех эрмитовых матриц (1), вычисленной в базисе, состоящем из матриц Паули. [Ее явное вычисление через матрицу C не требует ничего, кроме внимательности и терпения.] Так как оператор (8), очевидно, обратим (обратный оператор задается обратной матрицей C^{-1}), то матрица A невырождена, и значит, обладает обратной матрицей $A^{-1}=\|a_{i'}^{i}\|$. Оказывается, что *матрицей* $s(C)$ *и служит матрица* A^{-1}:

$$s(C)=A^{-1}.$$

Действительно, если C — матрица перехода от базиса e_0, e_1 к базису $e_{0'}$, $e_{1'}$ и если X — матрица функционала $\xi \in \mathscr{M}$ в базисе e_0, e_1, то, как мы знаем, матрицей X' этого функционала в базисе $e_{0'}$, $e_{1'}$ будет матрица $C^{\top}XC$. Поэтому, если $X=x^i\sigma_i$, то

$$X'=\bar{C}^{\top}XC=x^i\left(\bar{C}^{\top}\sigma_i C\right)=a_i^{i'}x^i\sigma_{i'}.$$

По определению это означает, что координаты $x^{i'}$ вектора $\xi \in \mathscr{M}$ в базисе Паули $\sigma_{i'}$, $0 \leqslant i \leqslant 3$, отвечающем базису $e_{0'}$, $e_{1'}$, связаны с его координатами x^i в базисе Паули σ_i, $0 \leqslant i \leqslant 3$, отвечающем базису e_0, e_1, формулами

$$x^{i'}=a_i^{i'}x^i.$$

Следовательно, сами базисы связаны контрагредиентным преобразованием

$$\sigma_{i'}=a_{i'}^{i}\sigma_i,$$

(см. лекцию I.6), т. е. матрицей перехода $s(C)$, связывающей эти базисы, является, как и утверждалось, матрица $A^{-1}=\|a_{i'}^{i}\|$. □

Перейдем теперь к трехмерной геометрии Евклида.

Чтобы получить спинорную интерпретацию этой геометрии, мы, выбрав в пространстве Минковского $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ некоторый базис Паули σ_i, $0 \leqslant i \leqslant 3$, рассмотрим ор-

тогональное дополнение $\sigma_0^\perp$ его первого вектора σ_0. Согласно общей теории псевдоевклидовых пространств (см. лекцию 12а), это ортогональное дополнение является антиевклидовым (а, значит, после смены знаков у всех скалярных произведений — и евклидовым) пространством с ортонормированным базисом σ_1, σ_2, σ_3.

Ограничение подпространством $\sigma_0^\perp$ означает, что мы теперь допускаем к рассмотрению лишь базисы Паули с одним и тем же вектором σ_0 и, значит, — лишь базисы пространства $\mathscr{H}$, связанные матрицами перехода C, удовлетворяющими соотношению $\bar{C}^\top \sigma_0 C = \sigma_0$, т. е. (напомним, что $\sigma_0 = E$) являющимися унитарными матрицами. Поскольку выбор в линейном пространстве над полем $\mathbb{C}$ класса базисов, связанных унитарными матрицами перехода, равносилен заданию в этом пространстве структуры унитарного пространства (по отношению к которой данные базисы ортонормированы), мы видим, следовательно, что *пространство $\mathscr{H}$ мы должны теперь считать унитарным*. С другой стороны, поскольку $|\det C| = 1$ для любой унитарной матрицы C, фиксировать бивектор $\mathfrak{a}_0 \neq 0$ (т. е. ограничиваться унимодулярными матрицами C) нам теперь не нужно.

Далее, унитарность пространства $\mathscr{H}$ позволяет нам вместо эрмитовых функционалов рассматривать соответствующие эрмитовы операторы ξ: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$. При этом включение $\xi \in \sigma_0^\perp$ (равносильное равенству $x_0 = 0$) будет означать, что $\operatorname{Tr} \xi = 0$.

Резюмируя, мы видим, что за *спинорную модель трехмерного евклидова пространства мы можем принять пространство $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ всех эрмитовых операторов ξ: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ двумерного унитарного пространства $\mathscr{H}$, след* $\operatorname{Tr} \xi$ *которых равен нулю* (в физической литературе такие операторы называются *бесследовыми*).

В каждом ортонормированном базисе e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$ операторы $\xi \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$ задаются бесследовыми эрмитовыми матрицами вида

$$\left\| \begin{matrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{matrix} \right\| = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3, \tag{9}$$

откуда следует, что операторы σ_1, σ_2, σ_3, имеющие в базисе e_0, e_1 соответственно матрицы σ_1, σ_2, σ_3, составляют базис пространства $\mathscr{E}(\mathscr{H})$. Мы будем называть базис σ_1, σ_2, σ_3 *базисом Паули* пространства $\mathscr{E}(\mathscr{H})$, отвечающим ортонормированному базису e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$.

Таблица умножения элементов базиса Паули имеет вид

(10)

	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_0	$i\sigma_3$	$-i\sigma_2$
σ_2	$-i\sigma_3$	σ_0	$i\sigma_1$
σ_3	$i\sigma_2$	$-i\sigma_1$	σ_0

,

где σ_0 — тождественный оператор. [Верность этой таблицы проверяется непосредственным вычислением.]

Так как ортонормированные базисы пространства $\mathscr{H}$ деформируемы друг в друга в классе ортонормированных базисов (группа $U(2)$ связна), то любые два базиса Паули также деформируемы друг в друга (определяют одну и ту же ориентацию пространства $\mathscr{E}(\mathscr{M})$).

Это означает, что *пространство $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ обладает естественной ориентацией* (в которой его базисы Паули положительно ориентированы).

Скалярное умножение в пространстве $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ определяется формулой

$$(\xi, \eta) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \xi\eta, \qquad \xi, \eta \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$$

(ср. формулу (5) для скалярного умножения в $\mathscr{M}(\mathscr{H})$). Билинейность этого умножения очевидна, симметричность обеспечивается формулой (6) лекции 15, а положительная определенность проверяется непосредственным вычислением (которого можно и избежать, если заметить, что собственные значения оператора $\xi \neq 0$ имеют вид $\pm\lambda$, где $\lambda \neq 0$, и, значит, след оператора ξ^2 равен $2\lambda^2 > 0$).

Заметим, что *для любого оператора $\xi \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$ оператор ξ^2 скалярен* (равен $\lambda^2 E$).

Кроме того, так как $\operatorname{Tr} \xi^2 = 2\lambda^2$ и $\det \xi = \lambda(-\lambda) = -\lambda^2$, то *длина вектора $\xi \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$ равна его положительному собственному значению λ, а квадрат его длины равен его определителю с обратным знаком*:

$$|\xi| = \lambda, \qquad |\xi|^2 = -\det \xi.$$

В частности, $|\xi| = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\xi^2 = E$.

По теореме Пифагора $(\xi, \eta) = 0$ тогда и только тогда, когда $|\xi + \eta|^2 = |\xi|^2 + |\eta|^2$, т. е. когда

$$\mathrm{Tr}\,((\xi + \eta)^2 - \xi^2 - \eta^2) = 0.$$

С другой стороны, так как оператор $(\xi + \eta)^2 - \xi^2 - \eta^2$ скалярен (как линейная комбинация скалярных операторов), то его след равен нулю тогда и только тогда, когда сам оператор равен нулю. Поскольку $(\xi + \eta)^2 - \xi^2 - \eta^2 = \xi\eta + \eta\xi$, этим доказано, что $(\xi, \eta) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\xi\eta + \eta\xi = 0$.

В частности, мы видим, что *базис* ξ_1, ξ_2, ξ_3 *пространства* $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ *тогда и только тогда ортонормирован, когда*

$$\xi_i^2 = \boldsymbol{E} \quad \text{и} \quad \xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$$

для любых $i, j = 1, 2, 3$.

Из таблицы (10) немедленно следует, что эти соотношения выполнены, в частности, для элементов σ_1, σ_2, σ_3 произвольного базиса Паули. Таким образом, *каждый базис Паули ортонормирован* (и, по определению, положительно ориентирован). Поэтому, если

$$(11) \quad \xi = x^1\sigma_1 + x^2\sigma_2 + x^3\sigma_3 \quad \text{и} \quad \eta = y^1\sigma_1 + y^2\sigma_2 + y^3\sigma_3,$$

то

$$(12) \qquad (\xi, \eta) = x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3.$$

Легко видеть, что для любых эрмитовых операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ их коммутатор

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$$

является косоэрмитовым оператором (если $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*$, то $\boldsymbol{C}^* = (\boldsymbol{AB})^* - (\boldsymbol{BA})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^* = -\boldsymbol{C}$) и значит, оператор $i\boldsymbol{C}$ — эрмитовым (см. лекцию 19). При этом, в силу формулы (6) лекции 15, след оператора $i\boldsymbol{C}$ равен нулю.

Применительно к операторам из $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ этим доказано, что *для любых операторов* $\xi, \eta \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$ *оператор*

$$(13) \qquad \xi \times \eta = \frac{i}{2}(\xi\eta - \eta\xi)$$

также принадлежит $\mathscr{E}(\mathscr{H})$.

Непосредственное вычисление (использующее таблицу (10)) показывает при этом, что

$$\sigma_1 \times \sigma_2 = \sigma_3, \quad \sigma_2 \times \sigma_3 = \sigma_1, \quad \sigma_3 \times \sigma_1 = \sigma_2.$$

Сравнив эти формулы с формулами для векторных произведений векторов положительно ориентированного

ортонормированного базиса (см. формулы (1) лекции I.15), мы немедленно получим, что *умножение* (13) *является не чем иным, как векторным умножением в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве* $\mathscr{E}(\mathscr{H})$.

Из таблицы (10) следует также, что произведение $\xi\eta$ операторов (11) выражается формулой

$$\xi\eta = (x^1y^1 + x^2y^2 + x^3y^3)\,\sigma_0 + i\,(x^2y^3 - x^3y^2)\,\sigma_1 - \\ - i\,(x^1y^3 - x^3y^1)\,\sigma_2 + i\,(x^1y^2 - x^2y^1)\,\sigma_3,$$

т. е. формулой

$$\xi\eta = (\xi\eta)\,\sigma_0 + i\,(\xi \times \eta). \tag{14}$$

Поэтому умножение операторов, вообще говоря, выводит нас из пространства $\mathscr{E} = \mathscr{E}(\mathscr{H})$ (пропадает как эрмитовость, так и равенство нулю следа).

Однако из формулы (14) следует, что $\xi\eta$ принадлежит четырехмерному (над полем $\mathbb{R}$) линейному пространству $\mathsf{H} = \mathbb{R}\sigma_0 \oplus i\mathscr{E}$, состоящему из всех операторов вида $\lambda\sigma_0 + i\xi$, где $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in \mathscr{E}$ (напомним, что по определению $\sigma_0 = E$). Более того, легко видеть, что *пространство* H *замкнуто относительно умножения операторов*, т. е. является алгеброй над полем $\mathbb{R}$.

Абстрактно H можно описать как четырехмерную алгебру с базисом 1, $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, где 1 — единица алгебры, а таблица умножения элементов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ имеет вид

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}$	-1	$\boldsymbol{k}$	$-\boldsymbol{j}$
$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{k}$	-1	$\boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{j}$	$-\boldsymbol{i}$	-1

(в нашем представлении $1 = \sigma_0$, $\boldsymbol{i} = -i\sigma_1$, $\boldsymbol{j} = -i\sigma_2$, $\boldsymbol{k} = -i\sigma_3$). Эта алгебра называется *алгеброй кватернионов*, а ее элементы — *кватернионами*.

Таким образом, мы фактически описали представление алгебры кватернионов операторами в пространстве спиноров $\mathscr{H}$ (или, что, конечно, равносильно, комплексными матрицами второго порядка). В этом представлении кватерниону $a + b\boldsymbol{i} + c\boldsymbol{j} + d\boldsymbol{k}$ отвечает матрица

$$\begin{Vmatrix} a - id & -b - ic \\ b + ic & a + id \end{Vmatrix},$$

и, значит, пространство кватернионов $\mathbb{H}$ отождествляется тем самым с линейным пространством всех матриц вида

$$\begin{Vmatrix} \alpha & \bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{Vmatrix}, \tag{15}$$

где α, β — произвольные комплексные числа.

Зафиксировав в $\mathscr{H}$ ортонормированный базис e_0, e_1, рассмотрим произвольную унитарную матрицу второго порядка C (элемент группы $U(2)$) и ортонормированный базис $e_{0'}$, $e_{1'}$, связанный с базисом e_0, e_1 матрицей перехода C. Пусть σ_1, σ_2, σ_3 и $\sigma_{1'}$, $\sigma_{2'}$, $\sigma_{3'}$ — базисы Паули пространства $\mathscr{E}(\mathscr{H})$, отвечающие соответственно базисам e_0, e_1 и $e_{0'}$, $e_{1'}$, и пусть $s(C)$ — матрица перехода от базиса σ_1, σ_2, σ_3 к базису $\sigma_{1'}$, $\sigma_{2'}$, $\sigma_{3'}$. Поскольку последние базисы ортонормированы и одноименны, матрица $s(C)$ третьего порядка является собственной ортогональной матрицей (принадлежит группе $SO(3)$). Таким образом, соответствие $C \longmapsto s(C)$ представляет собой отображение

$$s\colon U(2) \to SO(3) \tag{16}$$

группы $U(2)$ в группу $SO(3)$. Ясно, что это отображение является гомоморфизмом.

Замечание 3. Поскольку в пространстве $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ выбран базис σ_1, σ_2, σ_3, матрицы из $SO(3)$ мы можем отождествить с ортогональными операторами в $\mathscr{E}(\mathscr{H})$. В частности, для любого вектора $\xi \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$ мы можем говорить о векторе $s(C)\xi$. С другой стороны, матрице перехода C мы можем сопоставить унитарный оператор $C\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}$, имеющий в базисе e_0, e_1 матрицу C. Тогда непосредственное сравнение определений показывает, что $s(C)\xi = C\xi C^{-1}$. При желании эту формулу можно принять за определение гомоморфизма (16).

Предложение 2. Отображение (16) *является эпиморфизмом. Ядро этого эпиморфизма состоит из всех скалярных матриц* λE, *где* $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Утверждение об эпиморфности отображения (16) означает, что любой положительно ориентированный ортонормированный базис ξ_1, ξ_2, ξ_3 пространства $\mathscr{E}(\mathscr{H})$ является базисом Паули, отвечающим некоторому ортонормированному базису e_0, e_1

пространства $\mathscr{H}$. В этой форме мы его и будем доказывать.

Так как $\xi_3^2 = E$, то собственными значениями оператора ξ_3 являются числа ± 1. Поскольку же след оператора ξ_3 равен нулю, то одно из этих собственных значений равно $+1$, а другое -1. Следовательно, в $\mathscr{H}$ существует такой ортонормированный базис e_0, e_1, что $\xi_3 e_0 = e_0$ и $\xi_3 e_1 = -e_1$, т. е. такой, что матрицей оператора ξ_3 в этом базисе является матрица Паули σ_3.

Пусть теперь $k = 1$ или 2. Так как, по условию, $\xi_3\xi_k = -\xi_k\xi_3$, то

$$\xi_3\xi_k e_0 = -\xi_k\xi_3 e_0 = -\xi_k e_0,$$

и, значит, вектор $\xi_k e_0$ является собственным вектором оператора ξ_3, принадлежащим собственному значению -1 (или равен нулю). Поэтому существует такое α_k, что $\xi_k e_0 = \alpha_k e_1$. По аналогичным соображениям существует такое β_k, что $\xi_k e_1 = \beta_k e_0$. Это означает, что в базисе e_0, e_1 оператор ξ_k имеет матрицу

$$\begin{Vmatrix} 0 & \beta_k \\ \alpha_k & 0 \end{Vmatrix}. \tag{17}$$

Поэтому, во-первых, $\beta_k = \bar{\alpha}_k$ (так как оператор ξ_k эрмитов) и во-вторых, $\alpha_k\beta_k = 1$ (так как $\xi_k^2 = E$, а квадрат матрицы (17) равен $\alpha_k\beta_k E$). Следовательно, $|\alpha_k| = 1$ (откуда, в частности, следует, что $\xi_k e_0 \neq 0$).

Заменим теперь векторы e_0 и e_1 векторами $\bar{\alpha}_1 e_0$ и $\alpha_1 e_1$ (в силу равенства $|\alpha_1| = 1$ также составляющими ортонормированный базис). Ясно, что в базисе $\bar{\alpha}_1 e_0$, $\alpha_1 e_1$ оператор ξ_3 будет по-прежнему иметь матрицу σ_3, а матрицей оператора ξ_1 станет матрица σ_1. Что же касается матрицы оператора ξ_2, то она будет иметь вид

$$\begin{Vmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix}$$

с $\alpha = \alpha_1\alpha_2$. При этом, в силу условия ортогональности $\xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_1 = 0$, должно иметь место равенство

$$\begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 0 & \bar{\alpha} \\ \alpha & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} = 0,$$

выполняющееся, как легко видеть, тогда и только тогда, когда $\alpha + \bar{\alpha} = 0$. Так как $|\alpha| = 1$, это возможно только при $\alpha = i$ или $\alpha = -i$, т. е. когда матрицей оператора ξ_2 служит матрица $\pm\sigma_2$. Таким образом, если σ_1, σ_2, σ_3 — базис Паули, отвечающий базису $\bar{\alpha}_1 e_0$, $\alpha_1 e_1$ пространства

$\mathscr{H}$, то $\xi_1 = \sigma_1$, $\xi_2 = \pm\sigma_2$, $\xi_3 = \sigma_3$. Но так как по условию оба базиса ξ_1, ξ_2, ξ_3 и $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ одноименны, то равенство $\xi_2 = -\sigma_2$ невозможно. Поэтому базис ξ_1, ξ_2, ξ_3 является базисом Паули $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Вычислим теперь ядро гомоморфизма (16). Ясно, что если $C = \lambda E$ (где в силу унитарности $|\lambda| = 1$), то $s(C) = E$ (ибо $C\xi C^{-1} = \xi$ для любого оператора $\xi \in \mathscr{E}(\mathscr{H})$). Обратно, пусть $s(C) = E$, т. е. пусть базисы Паули $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и $\sigma_{1'}, \sigma_{2'}, \sigma_{3'}$, отвечающие базисам e_0, e_1 и $e_{0'}, e_{1'}$ пространства $\mathscr{H}$, связанным матрицей C, совпадают. Но если $\sigma_{3'} = \sigma_3$, то векторы $e_{0'}$ и $e_{1'}$ должны быть собственными векторами оператора σ_3, отвечающими собственным значениям 1 и -1 соответственно, и потому должны быть пропорциональны векторам e_0 и e_1. Этим доказано, что существуют такие числа λ и μ, что $e_{0'} = \lambda e_0$, $e_{1'} = \mu e_1$. При этом, так как векторы $e_{0'}$ и $e_{1'}$ являются ортами, то $|\lambda| = 1$ и $|\mu| = 1$, а так как $\sigma_{1'} = \sigma_1$ и $\sigma_1 e_0 = e_1$, $\sigma_{1'} e_{0'} = e_{1'}$, то $e_{1'} = \sigma_{1'} e_{0'} = \lambda\sigma_{1'} e_0 = \lambda\sigma_1 e_0 = \lambda e_1$, и, значит, $\mu = \lambda$. Таким образом, $e_{0'} = \lambda e_0$, $e_{1'} = \lambda e_1$, т. е. $C = \lambda E$, где $|\lambda| = 1$. □

Следствие 1. *Ограничение*

$$s\colon \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{SO}(3) \tag{18}$$

гомоморфизма (16) *на подгруппе* SU(2) *унимодулярных унитарных матриц второго порядка является эпиморфизмом с ядром* $\{E, -E\}$.

Доказательство. Достаточно заметить, что для любой унитарной матрицы C второго порядка число $\lambda = \sqrt{\det C}$ обладает тем свойством, что $\lambda C \in \mathrm{SU}(2)$ и $|\lambda| = 1$ (и, значит, $s(\lambda C) = s(C)$). □

Эпиморфизм (18) другим — существенно менее элегантным способом — был построен и изучен в первом семестре (см. лекции I. 26, I. 27). Теперь, идя «обратным ходом», можно заново доказать все полученные там результаты (например, ввести углы Эйлера). Мы оставляем все это читателю для самостоятельного продумывания.

Докажем теперь предложение 1.

Доказательство предложения 1. Пусть $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ — произвольный положительно ориентированный псевдоортонормированный базис пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$. По определению ξ_0 представляет собой такой эрмитов функционал на двумерном комплексном пространстве $\mathscr{H}$ (который унитарным пока не предпола-

гается), что $|\xi_0|^2 > 0$, т. е. такой, что для его матрицы X в некотором (допустимом) базисе e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$ имеет место неравенство $\det X > 0$. Поскольку $\det X = \lambda\mu$, где λ и μ — характеристические корни матрицы X, то либо матрица X, либо матрица $-X$ имеет положительные характеристические корни, и, значит, соответствующий функционал ξ_0 положительно определен. Мы введем в $\mathscr{H}$ структуру унитарного пространства, приняв этот функционал за скалярное умножение. Тогда в произвольном ортонормированном базисе e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$ функционал $\pm\xi_0$ будет иметь матрицу $E = \sigma_0$, т. е. будет вектором σ_0 соответствующего базиса Паули σ_0, σ_1, σ_2, σ_3.

Более того, поскольку базисы ξ_0, ξ_1, ξ_2, ξ_3 и σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 определяют по условию одну и ту же ориентацию псевдоевклидова пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ типа (1, 3), равенство $\xi_0 = -\sigma_0$ невозможно, и, значит, $\xi_0 = \sigma_0$.

Что же касается функционалов ξ_1, ξ_2, ξ_3, то они (или, точнее, — соответствующие эрмитовы операторы $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$) будут, подобно функционалам σ_1, σ_2, σ_3, составлять ортонормированный и положительно ориентированный базис евклидова пространства $\sigma_0^\perp = \mathscr{E}(\mathscr{H})$, и, значит, согласно предложению 2 мы можем базисом e_0, e_1 распорядиться так, чтобы имели место равенства

$$\xi_1 = \sigma_1 \quad \xi_2 = \sigma_2, \quad \xi_3 = \sigma_3.$$

Таким образом, любой положительно ориентированный псевдоортонормированный базис пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ является базисом Паули, отвечающим некоторому (очевидно, допустимому) базису e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$. Следовательно, отображение (7) эпиморфно.

Его ядро состоит из таких матриц $C \in \mathrm{SL}(2; \mathbb{C})$, что $\overline{C}^{\mathrm{T}}\sigma_i C = \sigma_i$ для любого $i = 0, 1, 2, 3$. Но при $i = 0$ это дает, что матрица C унитарна (и, значит, принадлежит группе $\mathrm{SU}(2)$), а при $i = 1, 2, 3$ — что матрица C принадлежит ядру гомоморфизма (18). Следовательно, $C = \pm E$. □

Рассмотрим теперь группу $O_+^\uparrow(1, 2)$. Так как для любого базиса Паули σ_0, σ_1, σ_2, σ_3 пространства $\mathscr{M}(\mathscr{H})$ ортогональное дополнение $\sigma_2^\perp$ вектора σ_2 является, очевидно, псевдоевклидовым пространством типа (1, 2) (с псевдоортонормированным базисом σ_0, σ_1, σ_3) и так

как функционалы ξ из $\sigma_2^{\perp}$ характеризуются тем, что их матрицы (в базисе e_0, e_1 пространства $\mathscr{H}$, которому отвечает базис Паули σ_0, σ_1, σ_2, σ_3) являются вещественными симметрическими матрицами вида

$$X = \begin{Vmatrix} x^0 + x^3 & x^1 \\ x^1 & x^0 - x^3 \end{Vmatrix}, \tag{19}$$

то эту группу мы можем отождествить с подгруппой группы $O_+^{\uparrow}(1, 3)$, состоящей из таких матриц $s(C)$, $C \in SL(2; \mathbb{C})$, что для любой матрицы (19) матрица $\overline{C}^{\top} XC$ также вещественна (и симметрична). Поскольку последнее условие заведомо выполнено для вещественных матриц C, этим доказано, что гомоморфизм (7) индуцирует гомоморфизм

$$s\colon SL(2; \mathbb{R}) \to O_+^{\uparrow}(1, 2) \tag{20}$$

группы $SL(2; \mathbb{R})$ унимодулярных вещественных матриц второго порядка в группу $O_+^{\uparrow}(1, 2)$.

Предложение 3. *Гомоморфизм* (20) *является эпиморфизмом с ядром* $\{E, -E\}$.

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать, что если матрица $C \in SL(2; \mathbb{C})$ обладает тем свойством, что для любой матрицы (19) матрица $\overline{C}^{\top} XC$ вещественна, то существует такое комплексное число α, $|\alpha| = 1$, что матрица αC (для которой заведомо $s(\alpha C) = s(C)$) вещественна. Но если матрица $\overline{C}^{\top} XC$ вещественна, то (ввиду вещественности матрицы X)

$$C^{\top} X\overline{C} = \overline{C}^{\top} XC,$$

и, значит,

$$\overline{D}^{\top} XD = X, \tag{21}$$

где $D = C\overline{C}^{-1}$. При $X = \sigma_0$ из (21) следует, что матрица D унитарна и потому имеет вид

$$D = \begin{Vmatrix} a & b \\ \lambda\overline{b} & -\lambda\overline{a} \end{Vmatrix}, \text{ где } |a|^2 + |b|^2 = 1 \text{ и } |\lambda| = 1.$$

Поэтому при $X = \sigma_3$ из (21) следует, что $a\overline{a} - \lambda\overline{\lambda}b\overline{b} = 1$ и, значит, $|a| = 1$ и $b = 0$, а при $X = \sigma_2$ — что $-\overline{\lambda}a^2 = 1$, и, значит, $-\lambda\overline{a} = a$. Таким образом, $D = aE$, где $|a| = 1$, и потому $C = a\overline{C}$.

Следовательно, если $\alpha^2 = a^{-1}$, то $\overline{\alpha C} = \overline{\alpha}\overline{C} = \alpha\alpha^2 C = \alpha C$, т. е. матрица αC вещественна. □