# *Лекция 1*

Простые линии на плоскости.— Задание линий уравнением.— Теорема Уитни.— Жордановы кривые.— Гладкие и регулярные кривые.— Непараметризованные кривые.— Натуральный параметр.

Существует несколько различных подходов к четкому определению (экспликации) интуитивного понятия линии, приводящие, вообще говоря, к различным результатам. Однако в простейших ситуациях все подходы дают фактически одно и то же.

Обсудим сначала линии на плоскости.

Множество Г на плоскости называется *графиком*, если существует такая система (евклидовых или аффинных) координат $x$, $y$ и такая дифференцируемая (вариант — непрерывная) функция $f\colon I \to \mathbb{R}$, определенная на (замкнутом, полуоткрытом или открытом) интервале $I$ оси $\mathbb{R}$, что точка с координатами $x$, $y$ тогда и только тогда принадлежит множеству Г, когда $x \in I$ и $y = f(x)$. С интуитивной точки зрения все графики являются, конечно, *линиями*.

Точка $p_0$ множества $C$ на плоскости называется *простой*, если существует такой открытый круг $U$ с центром в $p_0$, что пересечение $U \cap C$ является графиком.

Множество $C$ называется *связным*, если его нельзя разбить на два множества, обладающие тем свойством, что каждая предельная точка одного множества не принадлежит другому. (Наглядно это означает, что множество состоит из одного куска.)

Множество $C$ на плоскости называется *простой линией*, если оно связно и состоит только из простых точек.

Задача 1. Докажите, что любой график связен (и, значит, является простой линией).

Различные варианты экспликации понятия линии различаются в основном тем, какие допускаются непростые точки. Мы избежим обсуждения этих вопросов раз и навсегда, условившись рассматривать только простые линии.

Простая линия может иметь (или не иметь) *концевые точки*. Этих точек может быть не более двух. Простая линия с двумя концевыми точками (имеющая вид изогнутого замкнутого интервала числовой оси) называется *замкнутой*, а с одной концевой точкой (имеющая вид изогнутого полуоткрытого интервала числовой оси) — *полуоткрытой*. Простая линия без концевых точек может иметь либо вид изогнутого открытого интервала числовой оси, либо вид изогнутой окружности. В первом случае она называется *открытой*, а во втором — *замкнутой*. (Таким образом, термин «замкнутая» применительно к простым линиям имеет два значения! Об этой двусмысленности, сложившейся исторически, надо постоянно помнить.)

Распространенный способ задания линий на плоскости заключается в том, что они задаются уравнениями вида

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

где $x$, $y$ — координаты на плоскости (аффинные или прямоугольные), а $F$ — некоторая функция от $x$, $y$. [Утверждение, что множество $\mathscr{L}$ задается уравнением (1), по определению означает, что точка $p$ плоскости тогда и только тогда принадлежит $\mathscr{L}$, когда ее координаты $x$, $y$ удовлетворяют уравнению (1). При трактовке $F$ как функции на плоскости, это означает, что $p \in \mathscr{L}$ тогда и только тогда, когда $F(p) = 0$.]

Конечно, чтобы получить линии (в смысле той или иной четкой экспликации), нужно подчинить функцию $F$ определенным условиям. В первую очередь естественно потребовать, чтобы эта функция была *непрерывна*. [Если допускать разрывные функции, то уравнением вида (1) можно задать произвольное множество $A$ точек плоскости; достаточно принять за $F$ функцию $1 - \chi$, где $\chi$ — так называемая *характеристическая функция* множества $A$, равная единице для точек из $A$ и равная нулю вне $A$.]

Напомним из курса анализа, что точка $p$ плоскости (или, вообще, произвольного метрического — в частности, евклидова — пространства) называется *внутренней точкой* множества $A$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon$-окрестность этой точки (открытый шар — на плоскости круг — радиуса $\varepsilon$ с центром в точке $p$) целиком содержится в $A$. Множество, состоящее только из внутренних точек, называется *открытым*. Множество $C$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто, или, что равносильно, если для любой сходящейся последовательности точек $p_n \in C$ ее предел $\lim p_n$ также принадлежит $C$.

Подмножество аффинного (вещественного и конечномерного) пространства $\mathscr{A}$ называется *замкнутым* (*откры-*

*тым*), если оно замкнуто (открыто) по отношению к некоторой евклидовой метрике на $\mathcal{A}$.

Задача 2. Покажите, что если подмножество аффинного пространства $\mathcal{A}$ замкнуто (открыто) по отношению к одной евклидовой метрике на $\mathcal{A}$, то оно замкнуто (открыто) и по отношению к любой другой.

Замечание 1. Замкнутая простая линия на плоскости является замкнутым (и ограниченным) множеством (при каждом из двух пониманий термина «замкнутая линия»). Напротив, *ни одна простая линия* — в том числе и открытая! — не является открытым множеством. Более того, существуют открытые линии (например, график тангенса), являющиеся замкнутыми множествами (обязательно неограниченными).

Замечание 2. Легко видеть, что *ни одна простая линия не имеет ни одной внутренней точки.* На этом основании Кантор предложил считать линиями на плоскости произвольные замкнутые множества без внутренних точек. Это определение имеет свои преимущества, но для большинства математических теорий оно, по-видимому, слишком общо (вместе с тем это определение не охватывает, скажем, открытых простых линий).

Очевидно, что для каждой непрерывной функции $F$ на метрическом пространстве $\mathcal{X}$ множество всех точек, в которых эта функция равна нулю, замкнуто. Это означает, что *уравнением вида* (1) *с непрерывной функцией $F$ можно задать лишь замкнутые множества плоскости.*

Задача 3. Покажите, что и, обратно, для любого замкнутого множества $C$ метрического пространства $\mathcal{X}$ существует на $\mathcal{X}$ такая непрерывная функция $F$, что $p\in C$ тогда и только тогда, когда $F(p)=0$. [Указание. Рассмотрите на $\mathcal{X}$ функцию

$$F(p)=\inf_{q\in C}\rho(p, q), \qquad p\in\mathcal{X},$$

— *расстояние $p$ от $C$*; здесь $\rho$ — метрика в $\mathcal{X}$.]

Точка множества (1) называется *неособой*, если в этой точке обе частные производные

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}$$

функции $F$ существуют, непрерывны и хотя бы одна из них отлична от нуля. Остальные точки множества (1) называются его *особыми точками.*

Известная из курса анализа теорема о неявной функции утверждает, что в окрестности любой неособой точки каждое множество (1) является графиком, т. е. *каждая неособая точка является простой точкой.* (Обратное неверно. Например, при $F(x, y)=x(x^2+y^2)$ множество (1) состоит из точек оси ординат $x=0$, и потому все его точки просты. Вместе с тем точка (0, 0) является его особой точкой.)

Отсюда следует, что *множество всех неособых точек каждого множества* (1) *является объединением простых линий* (вообще говоря, соединяющихся в особых точках). Поэтому, если особых точек не очень много, например, конечное число, то множество вида (1) вполне отвечает интуитивному представлению о линиях. (И их вполне уместно так называть.) Однако если особых точек много, то дело обстоит совсем иначе. Именно, как показал американский математик Уитни, уравнением вида (1) с бесконечно дифференцируемой функцией $F$ можно задать любое замкнутое подмножество плоскости.

Теорема Уитни относится к произвольному конечномерному точечному аффинному пространству $\mathcal{A}$. Каждую функцию $F$ на этом пространстве мы можем, выбрав начало отсчета $O$, рассматривать как функцию на ассоциированном линеале $\mathcal{V}^{\circ}$ и, значит,— после выбора в $\mathcal{V}^{\circ}$ базиса $e_1, \ldots, e_n$ — как функцию на арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$. Функция $F$ называется *гладкой функцией класса* $C^\infty$, если, рассматриваемая как функция на $\mathbb{R}^n$, она обладает непрерывными частными производными всех порядков. (Ясно, что если это условие выполнено при одном выборе репера $Oe_1 \ldots e_n$, то оно выполнено и при любом другом его выборе.)

***Теорема 1*** (теорема Уитни). *Для любого замкнутого подмножества $C$ аффинного пространства $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}$ существует такая гладкая класса $C^\infty$ функция $F$, что $p \in C$ тогда и только тогда, когда $F(p)=0$.*

Доказательство теоремы 1 опирается на следующую лемму, имеющую и самостоятельный интерес:

***Лемма 1.*** *Существует такая гладкая класса $C^\infty$ монотонная функция $\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что:*

1° $0 \leqslant \alpha(t) \leqslant 1$ *для любого* $t \in \mathbb{R}$,

2° $\alpha(t)=0$ *тогда и только тогда, когда* $t \leqslant 0$.

Доказательство. Положим

$$\alpha(t)=\begin{cases} e^{-1/t}, & \text{если } t>0, \\ 0, & \text{если } t\leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Ясно, что функция (2) монотонна и обладает свойствами 1° и 2°. Кроме того, при $t\neq 0$ эта функция, очевидно, бесконечно дифференцируема. Поэтому нам нужно только доказать, что эта функция бесконечно дифференцируема и при $t=0$.

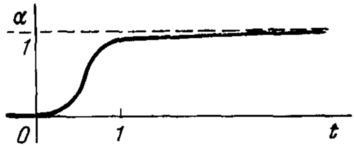


График функции $\alpha$

С этой целью мы напомним, что функция $f$, определенная в окрестности точки $t=0$, дифференцируема в этой точке, если существуют пределы

$$\lim_{t\uparrow 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}, \quad \lim_{t\downarrow 0}\frac{f(t)-f(0)}{t} \tag{3}$$

(левые и правые производные числа функции $f$ в точке $t=0$) и если эти пределы равны.

С другой стороны, если функция $f$ дифференцируема в окрестности точки $t=0$, за исключением, возможно, самой этой точки, и если существуют пределы

$$\lim_{t\uparrow 0} f'(t), \quad \lim_{t\downarrow 0} f'(t), \tag{4}$$

то, как непосредственно вытекает из теоремы Лагранжа о конечных приращениях, пределы (3) существуют и равны пределам (4).

Поскольку для всех функций $f=\alpha^{(n)}$ левые пределы (4), очевидно, существуют и равны нулю (ибо при $t<0$ эти функции тождественно равны нулю), отсюда следует, что для доказательства леммы 1 нам достаточно установить, что для любого $n\geqslant 0$ предел

$$\lim_{t\downarrow 0}\alpha^{(n)}(t)=\lim_{t\downarrow 0}(e^{-1/t})^{(n)}$$

существует и равен нулю.

Но легко видеть, что для любого $n\geqslant 0$ имеет место формула

$$(e^{-1/t})^{(n)}=e^{-1/t}p_n\left(\frac{1}{t}\right),$$

где $p_n = p_n(T)$ — многочлен степени $2n$. [Эта формула верна при $n=0$; если она верна для некоторого $n \geqslant 0$, то

$$(e^{-1/t})^{(n+1)} = \left[ e^{-1/t} p_n \left( \frac{1}{t} \right) \right]' =$$
$$= e^{-1/t} \left[ \frac{1}{t^2} p_n \left( \frac{1}{t} \right) - \frac{1}{t^2} p_n' \left( \frac{1}{t} \right) \right] = e^{-1/t} p_{n+1} \left( \frac{1}{t} \right),$$

где $p_{n+1}(T) = T^2 p_n(T) - T^2 p_n'(T)$ — многочлен степени $2n+2$.]

Поэтому

$$\lim_{t \downarrow 0} (e^{-1/t})^{(n)} = \lim_{t \to +\infty} \frac{p_n(t)}{e^t} = 0,$$

что и требуется. □

***Следствие 1.*** *Для любого отрезка* $[a, b]$ *оси* $\mathbb{R}$ *существует такая гладкая класса* $C^\infty$ *функция* $\beta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *что* $0 \leqslant \beta(t) \leqslant 1$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$ *и*

$$\beta(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \leqslant a, \\ 0, & \text{если } t \geqslant b. \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно положить

$$\beta(t) = \frac{\alpha(b-t)}{\alpha(b-t) + \alpha(t-a)},$$

где $\alpha$ — функция из леммы 1. □

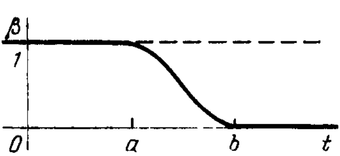


График функции β

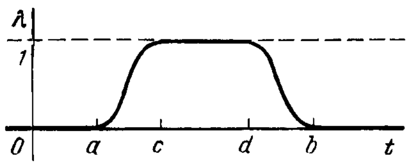


График функции λ

Замечание 3. Аналогичным образом можно строить функции класса $C^\infty$ с более сложным поведением. Например, для любых чисел $a < c < d < b$ формула

$$\lambda(t) = \frac{\alpha(B - |t - C|)}{\alpha(B - |t - C|) + \alpha(|t - D| - A)},$$

где

$$A = \frac{d-c}{2}, \quad B = \frac{b-a}{2}, \quad C = \frac{b+a}{2}, \quad D = \frac{d+c}{2},$$

определяет гладкую класса $C^\infty$ функцию, равную нулю вне отрезка $[a, b]$ и единице на отрезке $[c, d]$. Нам такая функция понадобится в лекции 15.

Пусть $\mathcal{V}^\circ$ — евклидово векторное пространство.

Обозначения. Для любого $r > 0$ символом $\mathbb{B}_r^{\mathcal{V}^\circ}$ (или просто $\mathbb{B}_r$) мы будем обозначать шар радиуса $r$ евклидова пространства $\mathcal{V}^\circ$ с центром в точке $\mathbf{0}$, т. е. множество всех векторов $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}^\circ$, для которых $|\boldsymbol{x}| \leqslant r$. Соответствующий *открытый шар* (множество векторов $\boldsymbol{x} \in \mathcal{V}^\circ$, для которых $|\boldsymbol{x}| < r$) мы будем обозначать символом $\mathring{\mathbb{B}}_r^{\mathcal{V}^\circ}$.

При $\mathcal{V}^\circ = \mathbb{R}^n$ вместо $\mathbb{B}_r^{\mathbb{R}^n}$ мы, как правило, будем писать $\mathbb{B}_r^n$.

В евклидовом точечном пространстве $\mathcal{A}$ шар радиуса $r$ с центром в точке $p$ мы будем обозначать символом $\mathbb{B}_r^{\mathcal{A}}(p)$ (а открытый шар — символом $\mathring{\mathbb{B}}_r^{\mathcal{A}}(p)$).

Этими обозначениями мы постоянно будем пользоваться на протяжении всего курса.

***Следствие 2.*** *Для любой точки $p_0$ евклидова точечного пространства $\mathcal{A}$ и любого $r > 0$ существует такая функция $f\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$, что $0 \leqslant f \leqslant 1$ на $\mathcal{A}$ и*

$$f(p) = \begin{cases} 1 \text{ тогда и только тогда, когда } p \in \mathbb{B}_r(p), \\ 0 \text{ тогда и только тогда, когда } p \notin \mathring{\mathbb{B}}_{2r}(p). \end{cases}$$

Доказательство. Достаточно положить

$$f(p) = \beta(|\boldsymbol{x}|),$$

где $\boldsymbol{x} = \overrightarrow{p_0 p}$ — радиус-вектор точки $p$, отсчитываемый от точки $p_0$, а $\beta$ — функция из следствия 1, построенная для отрезка $[r, 2r]$. $\square$

Выбрав в пространстве $\mathcal{A}$ систему прямоугольных координат, мы назовем точку $p \in \mathcal{A}$ *рациональной*, если все ее координаты являются рациональными числами. Шар $\mathring{\mathbb{B}}_r(p)$ мы назовем *рациональным*, если его центр $p$ и радиус $r$ рациональны.

***Лемма 2.*** *Каждое открытое множество $U \subset \mathcal{A}$ является объединением счетного (или конечного) множества рациональных шаров, т. е. существуют такие рациональные точки $q_1, \ldots, q_m, \ldots$ и такие рациональные числа $r_1, \ldots, r_m, \ldots$, что*

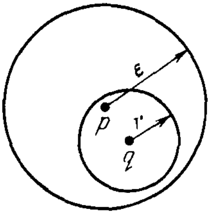
$$U = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathring{\mathbb{B}}_{r_m}(q_m). \tag{5}$$

Доказательство. По условию для любой точки $p \in U$ существует такое $\varepsilon > 0$, что $\mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon(p) \subset U$. Рассмотрим рациональный шар $\mathring{\mathbb{B}}_r(q)$, где $q$ — такая рациональная точка, что $\rho(p, q) < \varepsilon/2$, а $r$ — такое рациональное число, что $\rho(p, q) < r < \varepsilon/2$ (существование точки $q$ и числа $r$ обеспечивается тем, что любое вещественное число можно сколь угодно точно аппроксимировать рациональным). Так как $\rho(p, q) < r$, то $p \in \mathring{\mathbb{B}}_r(q)$, а так как

$$\rho(x, p) \leqslant \rho(x, q) + \rho(p, q) < 2r < \varepsilon$$

для любой точки $x \in \mathring{\mathbb{B}}_r(q)$, то $\mathring{\mathbb{B}}_r(q) \subset \mathring{\mathbb{B}}_\varepsilon(p) \subset U$.

Мы видим, таким образом, что любая точка $p \in U$ содержится в некотором рациональном шаре $\mathring{\mathbb{B}}_r(q) \subset U$. Это означает, что множество $U$ является объединением рациональных шаров вида $\mathring{\mathbb{B}}_r(q)$, построенных для всевозможных точек $p \in U$. Но множество всех рациональных шаров пространства $\mathscr{A}$, очевидно, счетно. Поэтому число различных шаров вида $\mathring{\mathbb{B}}_r(q)$ не более чем счетно. Обозначив их через $\mathring{\mathbb{B}}_{r_m}(q_m)$, мы и получим разложение (5). □




Теперь у нас все готово для доказательства теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Без ограничения общности мы можем, очевидно, считать, что рассматриваемое аффинное пространство $\mathscr{A}$ евклидово и, значит, дополнение $U = \mathscr{A} \setminus C$ множества $C$ допускает представление вида (5). Пусть $f_m$ — функция из следствия 2 леммы 1, отвечающая точке $q_m$ и числу $r_m/2$. Эта функция (а значит, и каждая ее частная производная) тождественно равна нулю вне компактного (замкнутого и ограниченного) множества $\mathbb{B}_{r_m}(q_m)$. Поэтому для любого $k \geqslant 0$ существует такое число $c_m^k > 0$, что абсолютная величина каждой частной производной порядка $k$ функции $f_m$ на всем пространстве $\mathscr{A}$ не превосходит $c_m^k$. Пусть

$$c_m = \max(1, c_m^0, c_m^1, \ldots, c_m^m).$$

Рассмотрим функциональный ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{2^m c_m}. \tag{6}$$

Так как по построению $c_m \geqslant 1$ и $f_m \leqslant 1$, то этот ряд мажорируется числовым сходящимся рядом

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m}. \tag{7}$$

Следовательно, ряд (6) сходится к некоторой функции $F\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Если $p \in C$, то $p \notin \mathrm{B}_{r_m}(q_m)$ для каждого $m \geqslant 1$ и, значит, $f_m(p)=0$. Если же $p \notin C$ (т. е. $p \in U$), то существует такое $m \geqslant 1$, что $p \in \mathrm{B}_{r_m}(q_m)$. Тогда $f_m(p) \neq 0$ и, значит, $F(p) \neq 0$. Таким образом, $F(p)=0$ тогда и только тогда, когда $p \in C$.

С другой стороны, так как для любого $m \geqslant k$ каждая частная производная $m$-го члена ряда (6) порядка $k$ не превосходит, очевидно, $m$-го члена ряда (7), то, продифференцировав $k$ раз ряд (6), мы получим ряд, все члены которого, за исключением, быть может, первых $k$ членов, также мажорируются членами ряда (7) и который, следовательно, равномерно сходится. Поэтому, согласно известной теореме о дифференцировании рядов, сумма ряда (6) бесконечно дифференцируема (и каждая ее частная производная является суммой ряда, составленного из соответствующих частных производных ряда (6)).

Этим теорема 1 полностью доказана. $\square$

Другой подход к понятию линии, связываемый обычно с именем французского математика Жордана, основывается на представлении о линии как траектории движущейся точки. Линии в смысле Жордана мы будем называть кривыми.

Согласно Жордану, *кривой* в $n$-мерном аффинном пространстве $\mathcal{A}$ называется произвольное непрерывное отображение

$$\gamma\colon I \to \mathcal{A}, \tag{8}$$

где $I$ — некоторый интервал оси $\mathbb{R}$ (открытый, полуоткрытый или замкнутый), т. е. после выбора в $\mathcal{A}$ начала отсчета непрерывная вектор-функция

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t), \quad t \in I, \tag{9}$$

принимающая значения в ассоциированном линеале $\mathcal{V}$.

В аффинных координатах $x^1, \ldots, x^n$ жорданова кривая (8) задается непрерывными числовыми функциями

$$x^1=x^1(t), \ \ldots, \ x^n=x^n(t), \quad t \in I. \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) называются *параметрическими уравнениями* кривой (8) (соответственно *векторным* и *координатными*).

Подчеркнем, что кривые являются — в отличие от линий! — не множествами, а отображениями.

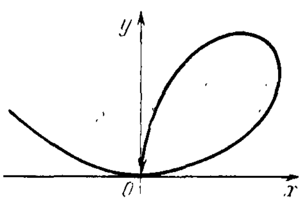
Однако на практике удобно обращаться с кривыми — по крайней мере в терминологическом отношении — как будто они являются множествами. Например, для любого $t_0 \in I$ точку $p_0 = \gamma(t_0)$ пространства $\mathcal{A}$ называют *точкой кривой* (8), *отвечающей значению параметра* $t_0$, а также говорят, что *кривая* (8) *проходит при* $t = t_0$ *через точку* $p_0$. В случае, когда интервал $I$ замкнут (имеет вид $[a, b]$) точки $\gamma(a)$ и $\gamma(b)$ называются *концевыми точками* кривой (8). Говорят также, что кривая (8) *соединяет* точку $\gamma(a)$ с точкой $\gamma(b)$ и т.д. и т.п.

При $\gamma(a) = \gamma(b)$ кривую (8) можно рассматривать как непрерывное отображение окружности. Такие кривые называются *замкнутыми*.

В случае, когда требуется специально подчеркнуть различие между кривой и множеством ее точек, последнее называют *носителем* кривой. Таким образом, носитель кривой (8) является не чем иным, как образом $\gamma(I)$ интервала $I$ при отображении (8).

Вообще говоря, носитель кривой может иметь строение, весьма далекое от интуитивного представления о линии. Например, он может иметь внутренние точки и даже — как показывает пример знаменитой кривой Пеано — заполнять собой квадрат.

Кривая (8) называется *простой*, если она является, во-первых, инъективным отображением $I \to \mathcal{A}$, т. е. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$, $t_1, t_2 \in I$, тогда и только тогда, когда $t_1 = t_2$, и, во-вторых, взаимно непрерывным (или, как еще говорят, *монеоморфным*) отображением, т. е. таким, что если для последовательности $\{t_m\}$ точек отрезка $I$ существует такая точка $\tau \in I$, что $\lim \gamma(t_m) = \gamma(\tau)$, то последовательность $\{t_m\}$ сходится (и $\lim t_m = \tau$). Замкнутая кривая




Срезанный декартов лист

$$(11) \qquad \gamma\colon [a, b] \to \mathcal{A}, \quad \gamma(a) = \gamma(b),$$

называется *простой*, если $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ при $t_1 < t_2$ тогда и только тогда, когда $t_1 = a$ и $t_2 = b$.

Типичным примером инъективного, но не монеоморфного, отображения открытого интервала в пространство $\mathcal{A}$

является кривая

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad -1 < t < +\infty$$

(«срезанный декартов лист»).

Задача 4. Докажите, что при $I=[a, b]$ любое инъективное отображение $I \to \mathcal{A}$ мономорфно.

Носители простых кривых называются *простыми дугами*.

Простые дуги, вообще говоря, уже соответствуют интуитивному представлению о линии; во всяком случае, из теоремы о топологической инвариантности размерности (см. ниже лекцию 8) следует, что внутренних точек они не имеют (конечно, при $n > 1$). Вместе с тем они могут быть устроены довольно сложно.

Пример 1. Пусть $x = x(t)$, $y = y(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,— параметрические уравнения кривой Пеано на плоскости. Тогда уравнения

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

будут задавать в пространстве простую дугу, проекция которой на плоскость $Oxy$ является квадратом. Образно говоря, это означает, что квадратный участок мы можем сплошь накрыть крышей, являющейся тем не менее, не поверхностью, а линией!

Напомним (см. курс анализа), что вещественная функция, заданная на интервале $(a, b)$, называется *гладкой функцией класса* $C^r$, где $r$ — либо натуральное число, либо символ $\infty$, если она имеет непрерывные производные всех порядков $\leqslant r$ (при $r = \infty$ это по определению означает существование непрерывных частных производных всех порядков; см. выше). В соответствии с этим кривую (8), заданную на интервале $I = (a, b)$, мы будем называть *гладкой кривой класса* $C^r$, если все функции (10) являются гладкими функциями класса $C^r$. Поскольку производные

$$x^i(t)' = \frac{dx^i(t)}{dt}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

функций (10) являются координатами вектора

$$r'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}, \tag{12}$$

это условие равносильно существованию при $r \neq \infty$ непрерывных производных всех порядков $\leqslant r$ (при $r = \infty$ — непрерывных производных всех порядков) вектор-функции (9).

В дальнейшем мы всегда будем считать число $r$ достаточно большим, чтобы все нужные нам дифференцирования имели смысл, и упоминания о классе $C^r$ будем, как правило, опускать.

В случае, когда интервал $I$ имеет концевые точки (т. е. в случае, когда либо $I=[a, b]$, либо $I=[a, b)$ или $I=(b, a]$) кривая (8) называется гладкой, если она является ограничением гладкой кривой (данного класса $C^r$), заданной на некотором большем интервале $I' \supset I$.

Задача 5. Докажите, что это равносильно тому, что (при $r \neq \infty$) функции (10) обладают на интервале $(a, b)$ непрерывными производными всех порядков $\leqslant r$, а в точках $t=a$ и/или $t=b$—соответствующими односторонними производными.

Замкнутая кривая (11) называется гладкой, если, кроме того, односторонние производные в точках $t=a$ и $t=b$ совпадают.

Вектор (12) называется *касательным вектором* к гладкой кривой (11) в точке $t$. Допуская определенную нечеткость, его называют также касательным вектором *в точке* $\gamma(t)$. (Впрочем, для простых кривых эта терминология вполне законна.)

В лекции 15 мы докажем теорему Сарда, из которой, в частности, вытекает, что *носитель гладкой кривой не имеет внутренних точек* (и даже является так называемым множеством меры нуль). Поскольку проекция гладкой кривой, очевидно, представляет собой гладкую кривую, отсюда следует, что в классе гладких кривых феномен, описанный в примере 1, невозможен.

Интересно, что гладкая кривая может иметь изломы.

Пример 2. Кривая на плоскости с уравнениями

$$x=\alpha(t), \quad y=\alpha(-t), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{13}$$

где $\alpha$—функция из леммы 1, имеет носитель, состоящий из двух координатных полупрямых $x=0$, $y \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, $y=0$, соединяющихся под прямым углом!

Кривая (8) (или (11)) называется *регулярной в точке* $t_0$, если $\boldsymbol{r}'(t_0) \neq 0$. Кривая регулярная во всех точках называется *регулярной*.

Заметим, что кривая (13) в точке излома $t=0$ не регулярна. Это не случайно, поскольку, как известно из курса анализа, *носитель простой кривой* (8), *регулярной в точке* $t_0$, *имеет в точке* $\gamma(t_0)$ *единственную касательную* (направляющим вектором служит вектор $\boldsymbol{r}'(t_0)$).

Две кривые

(14) $$\gamma\colon I \to \mathscr{A}, \quad \gamma^*\colon I^* \to \mathscr{A},$$

где $I$ и $I^*$ — интервалы одного и того же типа (оба замкнутые, оба открытые или оба полуоткрытые), называются *эквивалентными*, если существует гладкая (класса $C^r$) функция

(15) $$\varphi\colon I^* \to I$$

со всюду отличной от нуля производной, отображающая интервал $I^*$ на интервал $I$ и такая, что $\gamma^* = \gamma \circ \varphi$, т. е. такая, что

(16) $$\gamma^*(t^*) = \gamma(\varphi(t^*)) \text{ для любого } t^* \in I^*.$$

Говорят также, что функция $\varphi$ осуществляет на кривой $\gamma$ *замену параметра*.

Классы эквивалентности кривых называются *непараметризованными кривыми*. Чтобы подчеркнуть отличие кривых от непараметризованных кривых, первые иногда называются *параметризованными кривыми*.

Непараметризованная кривая называется *гладкой*, *простой* или *регулярной*, если она является классом эквивалентности гладкой, простой или регулярной непараметризованной кривой. Так как кривая, эквивалентная гладкой, простой или регулярной кривой, также, очевидно, гладка или соответственно проста и регулярна, то это определение корректно.

Если кривые (14) связаны соотношением (16), где $\varphi$, вообще говоря, — произвольная функция, то носители этих кривых совпадают. Поэтому *эквивалентные кривые имеют один и тот же носитель* (который называется носителем соответствующей непараметризованной кривой), но обратное, вообще говоря, неверно.

Однако в классе простых и регулярных кривых дело обстоит более удовлетворительно.

***Предложение 1.*** *Если обе кривые* (14) *просты и регулярны, то они тогда и только тогда имеют один и тот же носитель, когда эти кривые эквивалентны.*

Доказательство. Если кривые (14) просты и имеют один и тот же носитель, то корректно определено непрерывное (почему?) отображение $\varphi = \gamma^{-1} \circ \gamma^*$ интервала $I^*$ на интервал $I$. Поэтому надо лишь доказать, что отображение $\varphi$ гладко и его производная всюду отлична от нуля.

Пусть $t_0^*$ — произвольная точка интервала $I^*$, и пусть $t_0=\varphi(t_0^*)$. Тогда, если $p_0=\gamma^*(t_0^*)$, то $p_0=\gamma(t_0)$ и в точке $p_0$ носитель кривых (14) имеет единственную касательную. При этом, если $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}^*(t^*)$ — векторные параметрические уравнения кривых (14), то векторы $\boldsymbol{r}'(t_0)$ и $\boldsymbol{r}_2^{*\prime}(t_0^*)$ будут направляющими векторами этой касательной. Поэтому *эти векторы коллинеарны*.

Так как кривая $\gamma$ регулярна в точке $t_0$, то $\boldsymbol{r}_1'(t_0)\neq 0$. Поэтому, если

$$x^1=f^1(t),\ \dots,\ x^n=f^n(t),\ t\in I,$$

и

$$x^1=g^1(t^*),\ \dots,\ x^n=g^n(t),\ t^*\in I^*,$$

— координатные параметрические уравнения кривых (14), то без ограничения общности можно считать, что $\frac{df^1}{dt}(t_0)\neq$ $\neq 0$ и, значит, — в силу коллинеарности векторов $\boldsymbol{r}_1'(t_0)$ и $\boldsymbol{r}_2^{*\prime}(t_0^*)$ — что $\frac{dg^1}{dt}(t_0^*)\neq 0$.

Но если $\frac{df^1}{dt}(t_0)\neq 0$, то по известной из курса анализа теореме об обратной функции, функция $f^1$ локально обратима, т. е. существуют такой интервал $(a, b)$ оси $x$, содержащий точку $x_0=f^1(t_0)$, и на этом интервале такая функция $t=h(x)$, отображающая этот интервал на некоторый интервал $(\alpha, \beta)$ оси $t$, содержащий точку $t_0$ (и содержащийся в интервале $I$), что

$$h(f^1(t))=t \text{ для любой точки } t\in(\alpha, \beta).$$

При этом функция $h$ принадлежит тому же классу гладкости $C^r$, что и функция $f^1$, а ее производная в точке $x_0$ отлична от нуля.

По построению $g^1(t_0^*)=f^1(t_0)=x_0\in(a, b)$. Поэтому существует такой интервал $(\alpha^*, \beta^*)$ оси $t^*$, содержащий точку $t_0^*$ и содержащийся в интервале $I^*$, что $g^1(t^*)\in(a, b)$ для любой точки $t^*\in(\alpha^*, \beta^*)$. Следовательно, на интервале $(\alpha^*, \beta^*)$ определена функция

$$h\circ g^1\colon\ t^*\mapsto h(g^1(t^*)), \tag{17}$$

принимающая значения в интервале $(\alpha, \beta)$. Эта функция принадлежит классу гладкости $C^r$ и обладает тем свойством, что ее производная в точке $t_0^*$ отлична от нуля.

С другой стороны, по условию

$$f^i(\varphi(t^*))=g^i(t^*)$$

для любой точки $t^* \in I^*$ и любого $i = 1, \ldots, n$; в частности, при $t^* \in (\alpha^*, \beta^*)$ и $i = 1$. Поэтому $\varphi(t^*) = (h \circ g^1)(t^*)$ при $t^* \in (\alpha^*, \beta^*)$, т. е. функция (17) является ограничением функции $\varphi$ на интервале $(\alpha^*, \beta^*)$. Следовательно, функция $\varphi$ принадлежит классу гладкости $C^r$ на интервале $(\alpha^*, \beta^*)$ и ее производная в точке $t_0^*$ отлична от нуля. Поскольку $t_0^*$ — произвольная точка интервала $I^*$, а интервалы вида $(\alpha^*, \beta^*)$ покрывают весь этот интервал; этим доказано, что функция $\varphi$ принадлежит классу $C^r$ на всем интервале $I^*$ и ее производная всюду на этом интервале отлична от нуля.

Тем самым предложение 1 полностью доказано. $\square$

Предложение 1 означает, что с точностью до эквивалентности простые регулярные кривые однозначно определяются их носителями (и потому могут быть с ними отождествлены). Эти носители называются *регулярными простыми дугами.* Регулярная простая кривая, носителем которой является регулярная простая дуга $\mathscr{L}$, называется также *параметризацией* дуги $\mathscr{L}$. Как правило, мы будем отождествлять регулярные простые дуги с их параметризациями (рассматриваемыми с точностью до эквивалентности).

Замечание 4. Кажущаяся естественной проблема о переносе предложения 1 на произвольные кривые посредством более общих замен параметра (например, с производными, обращающимися в нуль) принадлежит к числу — увы довольно большому! — надуманных задач, не имеющих содержательного значения.

При $n = 2$ (на плоскости) любой график является, очевидно, регулярной простой дугой. Более того, можно показать (попробуйте сделать это!), что *на плоскости регулярные простые дуги — это в точности простые линии.* Таким образом, в отношении простых линий все экспликации интуитивного понятия линии приводят к одному и тому же результату.

Задача 6. Покажите, что *на плоскости каждая регулярная кривая* (8) *локально эквивалентна графику*, т. е. для любой точки $t_0 \in I$ существует в $\mathbb{R}$ такая ее окрестность $(a, b) \subset I$, что кривая $\gamma|_{(a,b)}$ эквивалентна кривой с уравнениями вида $x = t$, $y = f(t)$ (и, значит, является регулярной простой кривой).

Задача 7. Приведите пример, показывающий, что регулярная кривая, являющаяся инъективным отображением, тем не менее может не быть простой кривой (и даже может иметь целый отрезок непростых точек).

Если пространство $\mathcal{A}$ евклидово, то для любой гладкой кривой (8) на отрезке $I$ определена функция

$$t \mapsto |\boldsymbol{r}'(t)|, \quad t \in I,$$

— длина касательного вектора $\boldsymbol{r}'(t)$. Эта функция заведомо непрерывна, и потому в случае, когда $I = [a, b]$, существует интеграл

$$s = \int_a^b |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt$$

этой функции по отрезку $[a, b]$. Как показывается в курсе анализа этот интеграл равен пределу длин ломаных, вписанных в кривую (8), — *длине кривой* (8).

Пусть теперь интервал $I$ произволен, и пусть $t_0 \in I$. Тогда формула

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{r}'(t)|\,dt, \quad t \in I, \tag{18}$$

определяет на интервале $I$ гладкую функцию, отображающую этот интервал на некоторый интервал $J$ оси $s$, содержащий точку 0. Эта функция называется *длиной дуги*. (Заметим, что она может принимать и отрицательные значения.)

Если $s(t) = t - t_0$, то параметр $t$ называется *натуральным*. Таким образом, допуская общепринятую в анализе неточность, можно сказать, что *параметр $t$ натурален, если он является длиной дуги.*

Свойство параметра быть натуральным равносильно тождественному равенству $s'(t) = 1$. Поскольку по определению $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$, мы видим, следовательно, что *параметр $t$ на кривой* (8) *тогда и только тогда натурален, когда*

$$|\boldsymbol{r}'(t)| = 1 \text{ *для всех* } t \in I.$$

В частности, мы видим, что *кривая, отнесенная к натуральному параметру, заведомо регулярна.*

Обратно, пусть кривая (8) регулярна. Тогда $|\boldsymbol{r}'(t)| > 0$ для всех $t \in I$, и потому функция (18) монотонна и для нее определена обратная функция

$$\varphi\colon J \to I.$$

Кривая

$$\gamma_1 = \gamma \circ \varphi \colon J \to \mathcal{A}$$

эквивалентна кривой $\gamma$, и для нее

$$\boldsymbol{r}_1'(s) = \boldsymbol{r}'(t)\frac{d\varphi}{ds}(s) = \boldsymbol{r}'(t)\frac{1}{s'(t)},$$

где $t = \varphi(s)$. Поскольку $s'(t) = |\boldsymbol{r}'(t)|$, отсюда следует, что

$$|\boldsymbol{r}_1'(s)| = 1 \text{ для всех } s \in J,$$

т. е. что параметр $s$ на кривой $\gamma_1$ натурален.

Таким образом, мы видим, что *каждая регулярная кривая эквивалентна кривой, отнесенной к натуральному параметру.*

Поэтому, поскольку мы ограничиваемся регулярными (и, кроме того, простыми) кривыми, все рассматриваемые кривые мы без ограничения общности можем считать отнесенными к натуральному параметру. Важно при этом иметь в виду, что *для регулярной простой дуги натуральный параметр определен однозначно с точностью до преобразований вида*

$$t \mapsto \pm t + t_0$$

(т. е. с точностью до выбора начальной точки и направления отсчета длин).

В дальнейшем натуральный параметр, как правило, мы будем обозначать символом $s$.

Дифференцирование по $s$ будем обозначать точкой:

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{d\boldsymbol{r}(s)}{ds}, \quad \ddot{\boldsymbol{r}}(s) = \frac{d^2\boldsymbol{r}(s)}{ds^2}, \ \ldots \text{ и т. д.}$$

Как мы уже видели, натуральность параметра $s$ равносильна тождеству

$$|\dot{\boldsymbol{r}}(s)| = 1 \text{ для всех } s.$$

В связи с этим полезно иметь в виду следующую лемму (в которой $s$, конечно, не натуральный параметр):

**Лемма 3.** *Пусть* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(s)$ — *такая векторзначная гладкая функция, что* $|\boldsymbol{u}(s)| = 1$ *для всех* $s$. *Тогда*

(19) $$\boldsymbol{u}(s)\,\dot{\boldsymbol{u}}(s) = 0 \text{ для каждого } s.$$

Доказательство. Равенство $|\boldsymbol{u}(s)| = 1$ равносильно равенству $\boldsymbol{u}(s)^2 = 1$. Но легко видеть, что для скалярного (также, как, кстати сказать, и для векторного) умножения векторов сохраняется обычная формула дифференцирования произведения. В частности,

$$(\boldsymbol{u}^2)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\dot{\boldsymbol{u}} = 2\boldsymbol{u}\dot{\boldsymbol{u}}.$$

Поэтому, если $\boldsymbol{u}^2 = 1$, то $\boldsymbol{u}\dot{\boldsymbol{u}} = 0$. □

***Следствие.*** *Для любой кривой* $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, *отнесенной к натуральному параметру, имеет место формула*

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s)\,\ddot{\boldsymbol{r}}(s) = 0 \quad \text{для каждого } s. \tag{20}$$