Лекция 2

Кривые на плоскости. — Формулы Френе для пространственной кривой. — Проекции кривой на координатные плоскости сопровождающего репера. — Формулы Френе для кривой в n-мерном пространстве. — Существование и единственность кривой с данными кривизнами.

Пусть

$$\gamma: I \longrightarrow \mathcal{A} \tag{1}$$

— произвольная регулярная и простая кривая в n-мерном евклидовом пространстве $\mathcal{A}$. Как мы знаем из предыдущей лекции, без ограничения общности можно считать, что кривая (1) отнесена к натуральному параметру s.

Пусть $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ — векторное параметрическое уравнение кривой (1), и пусть

$$\boldsymbol{t}(s) = \dot{\boldsymbol{r}}(s) \tag{2}$$

— ее касательный вектор. Так как параметр s натурален, то вектор (2) является ортом, а вектор

$$\dot{\boldsymbol{t}}(s) = \ddot{\boldsymbol{r}}(s)$$

ему ортогонален:

$$\boldsymbol{t}(s)\,\dot{\boldsymbol{t}}(s) = 0 \text{ для всех } s.$$

Определение 1. Длина $|\dot{\boldsymbol{t}}(s)|$ вектора $\dot{\boldsymbol{t}}(s)$ обозначается символом $k(s)$ (или просто k) и называется *кривизной* кривой (1) в точке s (или $\boldsymbol{r}(s)$).

Например, для плоской кривой

$$k(s) = \sqrt{\ddot{x}^2(s) + \ddot{y}^2(s)},$$

где $x = x(s)$ и $y = y(s)$ — координатные параметрические уравнения кривой (1) в евклидовой системе координат x, y.

Кривизной кривой, отнесенной к произвольному параметру, называется кривизна эквивалентной кривой, отнесенной к натуральному параметру. Формула для этой кривизны (которую можно получить простыми, но довольно громоздкими вычислениями, не пользуясь ничем, кроме формул дифференцирования функций) имеет — даже для плоских кривых — довольно сложный вид:

$$k = \left| \frac{x''y' - y''x'}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \right|.$$

Наглядно число k является мгновенной скоростью поворота единичного вектора $\boldsymbol{t}$. Ясно, что эта скорость тем больше, чем кривая «искривленнее». Отсюда и термин — «кривизна».

На ориентированной плоскости можно рассматривать так называемую *относительную кривизну* $k_{\text{отн}}$, равную кривизне k, если (при $k \neq 0$) векторы $\boldsymbol{t}$ и $\dot{\boldsymbol{t}}$ составляют положительно ориентированный базис плоскости, и равную $-k$ в противном случае. Нам эта кривизна понадобится в лекции 4.

Пример 1. Если

$$x = x_0 + sl, \quad y = y_0 + sm, \text{ где } l^2 + m^2 = 1,$$

т. е. если рассматриваемая кривая является прямой, то $\ddot{x} = 0$ и $\ddot{y} = 0$. Поэтому $k = 0$ для всех s, т. е., как и следовало ожидать, *кривизна прямой тождественно равна нулю.*

Поскольку линейные функции являются единственными функциями, вторая производная которых тождественно равна нулю, верно и обратное, т. е. *кривая, кривизна которой тождественно равна нулю, является прямой* (или ее отрезком).

Точка $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{r}(s_0)$ кривой $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ называется *точкой распрямления*, если $k(s_0) = 0$.

Пример 2. Параметрические уравнения окружности радиуса R в натуральном параметре s имеют, очевидно, вид

$$x = R\cos\frac{s}{R}, \quad y = R\sin\frac{s}{R}.$$

Так как

$$\ddot{x} = -\frac{1}{R}\cos\frac{s}{R}, \quad \ddot{y} = -\frac{1}{R}\sin\frac{s}{R},$$

то для окружности

$$k(s) = \frac{1}{R} \qquad \text{для всех } s.$$

Таким образом, *кривизна окружности постоянна и равна величине, обратной ее радиусу.*

Из доказываемой ниже общей теоремы 1 следует, что и, обратно, *кривая с постоянной кривизной является окружностью* (или ее дугой).

Если для некоторой кривой $k(s_0) \neq 0$, то определено число $R(s_0) = \frac{1}{k(s_0)}$, называемое *радиусом кривизны* кривой в рассматриваемой точке.

Кривая $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ называется *кривой общего типа*, если на ней нет точек распрямления, т. е. если $k(s)\neq 0$ для всех s. В каждой точке такой кривой определен единичный вектор

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{\dot{\boldsymbol{t}}(s)}{k(s)},$$

направленный по *нормали* к кривой (т. е. по прямой, проходящей через точку касания перпендикулярно касательной).

Для любого s векторы $\boldsymbol{t}(s)$ и $\boldsymbol{n}(s)$ образуют ортонормированный базис, который называется *сопровождающим базисом Френе* данной кривой общего типа.

По определению

$$\dot{\boldsymbol{t}}(s)=k(s)\,\boldsymbol{n}(s).$$

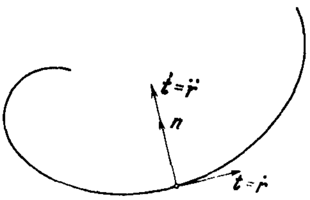
Найдем аналогичную формулу для вектора $\dot{\boldsymbol{n}}(s)$. Пусть

$$\dot{\boldsymbol{n}}(s)=\alpha(s)\,\boldsymbol{t}(s)+\beta(s)\,\boldsymbol{n}(s)$$

— разложение этого вектора по векторам базиса $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(s)$. Так как $\boldsymbol{tn}=0$, то $\dot{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\dot{\boldsymbol{n}}=0$ (мы снова пользуемся тем, что для скалярного произведения векторов справедлива обычная формула дифференцирования произведения), и потому $\alpha=\boldsymbol{t}\dot{\boldsymbol{n}}=-\dot{\boldsymbol{t}}\boldsymbol{n}=-k$. С другой стороны, согласно лемме 2 лекции 1 $\beta=\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{n}}=0$. Этим доказано, что *для любой кривой общего типа имеют место формулы*

$$\dot{\boldsymbol{t}}=k\boldsymbol{n},\qquad\qquad (3)$$
$$\dot{\boldsymbol{n}}=-k\boldsymbol{t}$$

(мы опускаем указание на аргумент s), описывающие мгновенный поворот сопровождающего базиса.



Базис Френе плоской кривой

Формулы (3) называются *формулами Френе для плоской кривой*.

З а м е ч а н и е 1. На ориентированной плоскости базис Френе можно определить и для кривых с точками распрямления, принимая за $\boldsymbol{n}(s)$ вектор, образующий вместе с вектором $\boldsymbol{t}(s)$ положительно ориентированный базис плоскости. Тогда в формулах (3) вместо кривизны k появится относительная кривизна $k_{\text{отн}}$.

Для кривых в трехмерном пространстве (отнесенном к прямоугольным координатам x, y, z) формула для кривизны имеет вид

$$k=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}.$$

Кривая (1) при $n=3$ называется, как и в случае $n=2$, *кривой общего типа*, если $k(s)\neq 0$ при всех s. Для такой кривой определен единичный вектор

$$\boldsymbol{n}(s)=\frac{\dot{\boldsymbol{t}}(s)}{k(s)},$$

называемый *вектором главной нормали* кривой.

Но теперь мы можем (предполагая пространство ориентированным) ввести в рассмотрение еще третий вектор $\boldsymbol{b}(s)$, составляющий вместе с векторами $\boldsymbol{t}(s)$ и $\boldsymbol{n}(s)$ положительно ориентированный ортонормированный базис $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ (т. е. такой, что $\boldsymbol{b}(s)=\boldsymbol{t}(s)\times\boldsymbol{n}(s)$). Этот вектор называется *вектором бинормали*, а базис $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$, $\boldsymbol{b}(s)$ — *сопровождающим базисом Френе* данной кривой общего типа.

По построению (для упрощения формул мы опускаем аргумент s)

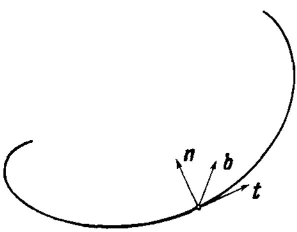
$$\dot{\boldsymbol{t}}=k\boldsymbol{n}.$$

Кроме того, так как $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}$, то

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\dot{\boldsymbol{t}}\times\boldsymbol{n}+\boldsymbol{t}\times\dot{\boldsymbol{n}}=\boldsymbol{t}\times\dot{\boldsymbol{n}},$$

откуда следует, что $\dot{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{t}=0$. Поскольку, согласно лемме 2 лекции 1, $\dot{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{b}=0$, этим доказано, что вектор $\dot{\boldsymbol{b}}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}$, т. е. существует такое число $\varkappa=\varkappa(s)$, что

$$\dot{\boldsymbol{b}}=-\varkappa\boldsymbol{n}.$$



Базис Френе пространственной кривой

Число $\varkappa(s)$ называется *кручением* данной кривой в точке $\boldsymbol{r}(s)$. Оно является скоростью поворота вектора бинормали.

Продифференцировав теперь равенства $\boldsymbol{nt}=0$ и $\boldsymbol{nb}=0$, мы немедленно получим, что $\dot{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{t}}=-k$ и $\dot{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{n}\dot{\boldsymbol{b}}=\varkappa$. Поскольку, кроме того, $\dot{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}=0$ (лемма 2 лекции 1), тем самым доказано, что

$$\dot{\boldsymbol{n}}=-k\boldsymbol{t}+\varkappa\boldsymbol{b}.$$

Таким образом, *для любой кривой общего типа имеют место формулы*

$$\dot{\boldsymbol{t}} = k\boldsymbol{n},$$
$$\dot{\boldsymbol{n}} = -k\boldsymbol{t} + \varkappa\boldsymbol{b}, \tag{4}$$
$$\dot{\boldsymbol{b}} = -\varkappa\boldsymbol{n}.$$

Эти формулы называются *формулами Френе для пространственной кривой*.

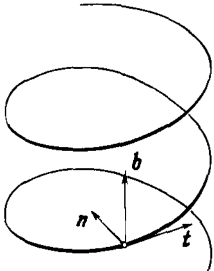
Пример 3. Если кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ расположена в плоскости П, то векторы $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$ и $\ddot{\boldsymbol{r}}(s)$ параллельны этой плоскости (ибо это так для приращений $\boldsymbol{r}(s+\Delta s) - \boldsymbol{r}(s)$ и $\dot{\boldsymbol{r}}(s+\Delta s) - \dot{\boldsymbol{r}}(s)$ векторов $\boldsymbol{r}(s)$ и $\dot{\boldsymbol{r}}(s)$). Поэтому $\boldsymbol{t}(s)$, $\boldsymbol{n}(s) \parallel \Pi$ и, значит, $\boldsymbol{b}(s) \perp \Pi$. Это доказывает, что $\boldsymbol{b}(s) = \mathrm{const}$, и потому $\varkappa(s) = 0$ для всех s. Обратно, пусть $\varkappa(s) = 0$ для всех s и, значит, $\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{b}_0 = \mathrm{const}$. Тогда $(\boldsymbol{r}(s)\boldsymbol{b}_0)^{\cdot} = \dot{\boldsymbol{r}}(s)\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{t}(s)\boldsymbol{b}_0 = 0$ для всех s, и потому $\boldsymbol{r}(s)\boldsymbol{b}_0 = \mathrm{const}$. Это означает, что кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ расположена в плоскости $\boldsymbol{r}\boldsymbol{b}_0 = \mathrm{const}$. Таким образом, *кривая в пространстве тогда и только тогда является плоской кривой, когда ее кручение тождественно равно нулю.*

Пример 4. *Винтовой кривой* называется траектория точки, движущейся с постоянной скоростью по образующей прямого кругового цилиндра, равномерно вращающегося вокруг своей оси. Параметрические уравнения этой кривой имеют вид

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt.$$

Так как $x' = -a\sin t$, $y' = a\cos t$, $z' = b$, то

$$s' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$



Винтовая линия

и, значит, $s = ct$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Поэтому

$$x = a\cos\frac{s}{c}, \quad y = a\sin\frac{s}{c}, \quad z = \frac{b}{c}s.$$

Но тогда

$$\dot{x} = -\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c}, \quad \dot{y} = \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c}, \quad \dot{z} = \frac{b}{c},$$

$$\ddot{x} = -\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c}, \quad \ddot{y} = -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c}, \quad \ddot{z} = 0,$$

и потому

$$k=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2}=\frac{a}{c^2}=\text{const}.$$

Кроме того,

$$\boldsymbol{t}=\left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right),$$
$$\boldsymbol{n}=\left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

и

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{t}\times\boldsymbol{n}=\left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right).$$

Поэтому

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)=-\frac{b}{c^2}\boldsymbol{n},$$

и, следовательно,

$$\varkappa=\frac{b}{c^2}=\text{const}.$$

Таким образом, *кривизна и кручение винтовой кривой постоянны.*

Согласно доказываемой ниже общей теореме 1 и обратно, *каждая кривая, кривизна и кручение которой постоянны, является винтовой кривой* (или ее дугой).

Замечание 2. Обратим внимание на различие в трактовке понятия кривой общего типа на плоскости и в пространстве. Чтобы достичь единства, надо для кривых на плоскости рассматривать не абсолютную, а относительную кривизну. Ср. замечание 1.

Чтобы исследовать поведение произвольной пространственной кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$ вблизи некоторой ее точки, мы выберем начало координат O в этой точке, за координатный базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ примем сопровождающий базис $\boldsymbol{t}_0$, $\boldsymbol{n}_0$, $\boldsymbol{b}_0$ в точке O и будем натуральный параметр s отсчитывать от O. Тогда

$$\boldsymbol{r}(0)=0,\quad \dot{\boldsymbol{r}}(0)=\boldsymbol{t}_0=\boldsymbol{i},\quad \ddot{\boldsymbol{r}}(0)=k_0\boldsymbol{n}_0=k_0\boldsymbol{j},$$
$$\dddot{\boldsymbol{r}}(0)=\dot{k}_0\boldsymbol{n}_0+k_0\dot{\boldsymbol{n}}_0=-k_0^2\boldsymbol{i}+\dot{k}_0\boldsymbol{j}+k_0\varkappa_0\boldsymbol{k},$$

где k_0, $\dot{k}_0$ и $\varkappa_0$ — значение функций k, $\dot{k}$ и $\varkappa$ при $s=0$.

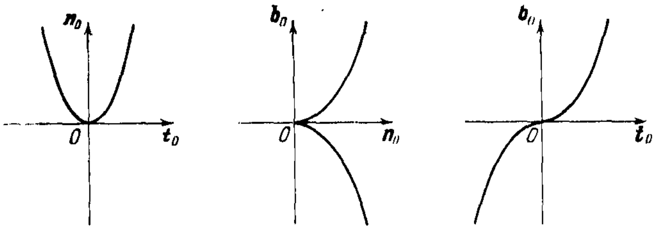
Следовательно, по формуле Тейлора

$$\boldsymbol{r}(s) = \boldsymbol{r}(0) + s\dot{\boldsymbol{r}}(0) + \frac{s^2}{2}\ddot{\boldsymbol{r}}(0) + \frac{s^3}{6}\dddot{\boldsymbol{r}}(0) + \ldots =$$
$$= (s + \ldots)\,\boldsymbol{i} + \left(\frac{k_0}{2}s + \ldots\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{k_0\varkappa_0}{6}s^3 + \ldots\right)\boldsymbol{k}.$$

Это означает, что вблизи точки O наша кривая задается параметрическими уравнениями

$$x = s + \ldots$$
$$y = \frac{k_0}{2}s^2 + \ldots$$
$$z = \frac{k_0\varkappa_0}{6}s^3 + \ldots$$

Если $k_0 \neq 0$, $s_0 \neq 0$, то проекция кривой на плоскость $O\boldsymbol{ij} = O\boldsymbol{t}_0\boldsymbol{n}_0$ (кстати сказать, эта плоскость называется



Проекция на соприкасающуюся плоскость | Проекция на нормальную плоскость | Проекция на спрямляющую плоскость

соприкасающейся плоскостью кривой в точке O) приближенно совпадает с параболой

$$x = s, \quad y = \frac{k_0}{2}s^2;$$

ее проекция на плоскость $O\boldsymbol{jk} = O\boldsymbol{n}_0\boldsymbol{b}_0$ (которая называется *нормальной плоскостью* кривой в точке O) — с полукубической параболой

$$y = \frac{k_0}{2}s^2, \quad z = \frac{k_0\varkappa_0}{6}s^3;$$

и, наконец, ее проекция на плоскость $O\boldsymbol{ik} = O\boldsymbol{t}_0\boldsymbol{b}_0$ (которая называется *спрямляющей плоскостью* кривой в точке O) — с кубической параболой

$$x = s, \quad z = \frac{k_0\varkappa_0}{2}s^3.$$

Это дает достаточно отчетливое представление об устройстве пространственной кривой вблизи любой ее точки (в которой отличны от нуля кривизна и кручение).

Рассмотрим теперь общий случай евклидова пространства произвольной размерности $n \geqslant 2$.

Отнесенная к натуральному параметру кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$ в n-мерном ориентированном евклидовом пространстве называется *кривой общего типа*, если для любого s векторы

$$\dot{\boldsymbol{r}}(s), \ldots, \overset{(n-1)}{\boldsymbol{r}}(s) \tag{5}$$

линейно независимы.

Применив к векторам (5) процесс ортогонализации Грама—Шмидта, мы получим ортонормированное семейство векторов $\boldsymbol{t}_1(s), \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}(s)$. Пусть $\boldsymbol{t}_n(s)$—вектор (однозначно определенный), дополняющий это семейство до положительно ориентированного ортонормированного базиса

$$\boldsymbol{t}_1(s), \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}(s), \boldsymbol{t}_n(s). \tag{6}$$

Определение 2. Базис (6) называется *сопровождающим базисом Френе* кривой общего типа в точке $\boldsymbol{r}(s)$.

Пусть

$$\dot{\boldsymbol{t}}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \boldsymbol{t}_j, \qquad i = 1, \ldots, n$$

(для упрощения формул мы опускаем аргумент s). Так как по построению вектор $\boldsymbol{t}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, линейно выражается через векторы $\dot{\boldsymbol{r}}, \ldots, \overset{(i)}{\boldsymbol{r}}$, то вектор $\dot{\boldsymbol{t}}_i$ линейно выражается через векторы $\dot{\boldsymbol{r}}, \ldots, \overset{(i+1)}{\boldsymbol{r}}$. Поскольку же последние векторы линейно выражаются через векторы $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{i+1}$, этим доказано, что $\alpha_{ij} = 0$ при $j > i+1$.

С другой стороны, так как $\boldsymbol{t}_i \boldsymbol{t}_j = \delta_{ij}$, то $\dot{\boldsymbol{t}}_i \boldsymbol{t}_j + \boldsymbol{t}_i \dot{\boldsymbol{t}}_j = 0$, т. е.

$$\alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0.$$

Потому $\alpha_{ii} = 0$ и $\alpha_{ij} = 0$ при $j < i-1$.

Таким образом, могут быть отличны от нуля лишь коэффициенты $\alpha_{i,\,i+1} = -\alpha_{i+1,\,i}$. Полагая

$$k_1 = \alpha_{12}, \; k_2 = \alpha_{23}, \; \ldots, \; k_{n-1} = \alpha_{n-1,\,n},$$

мы видим, следовательно, что имеют место формулы

$$
(7) \qquad \begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{t}}_1 &= k_1 \boldsymbol{t}_2, \\
\dot{\boldsymbol{t}}_2 &= -k_1 \boldsymbol{t}_1 + k_2 \boldsymbol{t}_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
\dot{\boldsymbol{t}}_{n-1} &= -k_{n-2} \boldsymbol{t}_{n-2} + k_{n-1} \boldsymbol{t}_n, \\
\dot{\boldsymbol{t}}_n &= -k_{n-1} \boldsymbol{t}_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Эти формулы называются *формулами Френе для кривой в n-мерном пространстве.*

Функции $k_1 = k_1(s), \dots, k_{n-1} = k_{n-1}(s)$ называются *кривизнами* кривой. Подчеркнем, что они определены только для кривой общего типа.

В формулах

$$
(8) \qquad \boldsymbol{t}_i = \beta_{i1} \dot{\boldsymbol{r}} + \dots + \beta_{ii} \overset{(i)}{\boldsymbol{r}}, \qquad i = 1, \dots, n-1,
$$

получающихся применением процесса ортогонализации Грама—Шмидта, последние коэффициенты β_{ii} положительны. Поэтому в обратных формулах

$$
(9) \qquad \overset{(i)}{\boldsymbol{r}} = \gamma_{i1} \boldsymbol{t}_1 + \dots + \gamma_{ii} \boldsymbol{t}_i
$$

коэффициенты $\gamma_{ii} = \beta_{ii}^{-1}$ также положительны. Продифференцировав формулы (8), мы получим соотношения вида

$$
\dot{\boldsymbol{t}}_i = \dot{\beta}_{i1} \dot{\boldsymbol{r}} + (\dot{\beta}_{i2} + \beta_{i1}) \ddot{\boldsymbol{r}} + \dots
$$

$$
\dots + (\dot{\beta}_{ii} + \beta_{i,\,i-1}) \overset{(i)}{\boldsymbol{r}} + \beta_{ii} \overset{(i+1)}{\boldsymbol{r}}, \qquad i = 1, \dots, n-1.
$$

Заменив здесь (при $i < n-1$) векторы $\dot{\boldsymbol{r}}, \dots, \overset{(i+1)}{\boldsymbol{r}}$ выражениями (9), мы должны получить формулы (7). Это показывает, что

$$
k_i = \beta_{ii} \gamma_{i+1,\,i+1}, \qquad i = 1, \dots, n-2.
$$

Отсюда, в частности, следует, что *для любой кривой общего типа кривизны*

$$
k_1, \dots, k_{n-2}
$$

положительны. Кривизна же k_{n-1} (аналог кручения) может иметь произвольный знак.

Покажем теперь, что любые $n-1$ функций

$$
(10) \qquad k_1(s) > 0, \dots, k_{n-2}(s) > 0, \ k_{n-1}(s)
$$

(заданные на некотором интервале (a, b) оси $\mathbb{R}$) могут служить кривизнами некоторой кривой (регулярной, но, вообще говоря, не простой) и что эти кривизны однозначно (с точностью до конгруэнтности) определяют кривую.

Пусть для определенности $a < 0 < b$.

Теорема 1. *Пусть на интервале (a, b) заданы $n-1$ гладких функций (10), которые все положительны, кроме, быть может, последней. Тогда для любой начальной точки $O \in \mathcal{A}$ и любого положительно ориентированного ортонормированного базиса $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$ существует одна и только одна кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $a < s < b$, общего типа, обладающая следующими двумя свойствами:*

1° кривизнами этой кривой являются данные функции (10);

2° при $s = 0$ имеют место равенства

$$\boldsymbol{r}(0) = 0, \quad \boldsymbol{t}_1(0) = \boldsymbol{i}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{t}_n(0) = \boldsymbol{i}_n.$$

Доказательство мы проведем в четыре этапа.

Этап 1. На этом этапе мы воспользуемся следующей общей теоремой, известной как теорема существования и единственности решений (СЕР) линейных дифференциальных уравнений и которая доказывается в курсе теории дифференциальных уравнений.

Теорема СЕР. *Пусть на интервале (a, b) заданы m^2 гладких функций $A_{ij}(s)$, $i, j = 1, \ldots, m$, и пусть $x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}$ — произвольные числа. Тогда существует одно и только одно семейство гладких функций $x_1(s), \ldots, x_m(s)$, $a < s < b$, обладающих следующими двумя свойствами:*

1° тождественно по s, $a < s < b$, выполнены соотношения

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + \ldots + A_{1m}x_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_m &= A_{m1}x_1 + \ldots + A_{mm}x_m; \end{aligned} \tag{11}$$

2° при $s = 0$ имеют место равенства

$$x_1(0) = x_1^{(0)}, \ \ldots, \ x_m(0) = x_m^{(0)}. \ \square$$

Мы применим эту теорему к соотношениям (7), которые при данных функциях $k_1, \ldots, k_{n-1}$ являются уравнениями вида (11) для $m = n^2$ координат векторов $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$. Таким образом, согласно теореме СЕР, на интервале (a, b) существует одно и только одно семейство таких векторзначных функций $\boldsymbol{t}_1(s), \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}(s)$, $a<s<b$, что:

1° при любом s выполнены соотношения (7);

2° при $s=0$ имеют место равенства

$$\boldsymbol{t}_1(0)=\boldsymbol{i}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{t}_n(0)=\boldsymbol{i}_n. \tag{12}$$

Этап 2. Рассмотрим скалярные произведения $\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j$, $i, j=1, \ldots, n$. Согласно соотношениям (7) для этих произведений имеют место равенства

$$(\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j)^{\cdot}=\dot{\boldsymbol{t}}_i\boldsymbol{t}_j+\boldsymbol{t}_i\dot{\boldsymbol{t}}_j=$$
$$=(-k_{i-1}\boldsymbol{t}_{i-1}+k_i\boldsymbol{t}_{i+1})\boldsymbol{t}_j+\boldsymbol{t}_i(-k_{j-1}\boldsymbol{t}_{j-1}+k_j\boldsymbol{t}_{j+1})$$

(мы условно полагаем, что $\boldsymbol{t}_0=0$ и $\boldsymbol{t}_{n+1}=0$), т. е. равенства

$$(\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j)^{\cdot}=-k_{i-1}(\boldsymbol{t}_{i-1}\boldsymbol{t}_j)+k_i(\boldsymbol{t}_{i+1}\boldsymbol{t}_j)-$$
$$-k_{j-1}(\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_{j-1})+k_j(\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_{j+1}), \tag{13}$$

которые мы можем рассматривать как уравнения вида (11) для $m=\dfrac{n(n+1)}{2}$ функций $\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j$. Поэтому, согласно теореме СЕР, существует только единственный набор этих функций, обладающих тем свойством, что при $s=0$ они равны $\delta_{ij}=\boldsymbol{i}_i\boldsymbol{i}_j$ (т. е. равны нулю, если $i\neq j$, и единице, если $i=j$).

С другой стороны, непосредственная проверка показывает, что уравнениям (13) удовлетворяют функции $\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j$, тождественно равные δ_{ij}. (Действительно, при $i\neq j-1$, $j+1$ все слагаемые суммы $-k_{i-1}\delta_{i-1,j}+k_i\delta_{i+1,j}-$ $-k_{j-1}\delta_{i,j-1}+k_j\delta_{i,j+1}$ равны нулю, а при $i=j-1$, $j+1$ в этой сумме имеются только два отличных от нуля, но взаимно уничтожающихся слагаемых.) Следовательно, в силу теоремы СЕР для всех s имеют место равенства $\boldsymbol{t}_i\boldsymbol{t}_j=\delta_{ij}$, $i, j=1, \ldots, n$, означающие, что векторы $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$ для любого s, $a<s<b$, составляют ортонормированный базис.

Поскольку при $s=0$ этот базис совпадает с положительно ориентированным базисом $\boldsymbol{i}_1, \ldots, \boldsymbol{i}_n$, то и для каждого s, $a<s<b$, базис $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_s$ положительно ориентирован.

Этап 3. Составив последовательные производные вектора $\boldsymbol{t}_1$:

$$\boldsymbol{t}_1, \ \dot{\boldsymbol{t}}_1, \ \ddot{\boldsymbol{t}}_1, \ \ldots, \ \overset{(n-1)}{\boldsymbol{t}_1}, \tag{14}$$

применим к ним процесс ортогонализации Грама—Шмидта. Так как вектор $\boldsymbol{t}_1$ является ортом, то на первом шаге этого процесса мы ничего делать не должны. Поскольку по лемме 2 лекции 1 вектор $\dot{\boldsymbol{t}}_1$ ортогонален вектору $\boldsymbol{t}_1$, на втором шаге мы должны его только нормировать. С другой стороны, так как по доказанному вектор $\boldsymbol{t}_2$ является ортом и по условию $k_1 > 0$, то, согласно первому из соотношений (7), $|\dot{\boldsymbol{t}}_1| = k_1$. Поэтому на втором шаге процесса ортогонализации мы получим вектор

$$\boldsymbol{t}_2 = \frac{\dot{\boldsymbol{t}}_1}{k_1}.$$

На третьем шаге нам следует рассмотреть вектор

$$\ddot{\boldsymbol{t}}_1 = (k_1\boldsymbol{t}_2)^{\boldsymbol{\cdot}} = \dot{k}_1\boldsymbol{t}_2 + k_1\dot{\boldsymbol{t}}_2 = -k_1^2\boldsymbol{t}_1 + \dot{k}_1\boldsymbol{t}_2 + k_1k_2\boldsymbol{t}_3,$$

вычесть из него линейную комбинацию векторов $\boldsymbol{t}_1$ и $\boldsymbol{t}_2$ так, чтобы получился вектор, ортогональный этим векторам, и пронормировать этот вектор. Но так как векторы $\boldsymbol{t}_1$, $\boldsymbol{t}_2$, $\boldsymbol{t}_3$ составляют по доказанному ортонормированное семейство, а по условию $k_1k_2 > 0$, то в результате этой процедуры получится, очевидно, вектор $\boldsymbol{t}_3$.

Ясно, что это рассуждение имеет общий характер, так что на каждом шаге процесса ортогонализации мы получим соответствующий вектор $\boldsymbol{t}_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Этим доказано, что семейство векторов $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}$ однозначно характеризуется как ортонормированное семейство векторов, получающееся из семейства (14) применением процесса ортогонализации Грама—Шмидта.

Этап 4. Пусть

$$\boldsymbol{r}(s) = \int_0^s \boldsymbol{t}_1(s)\,ds, \quad a < s < b. \tag{15}$$

Тогда $\boldsymbol{r}(0) = 0$ и $\dot{\boldsymbol{r}}(s) = \boldsymbol{t}_1(s)$, т. е. кривая $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(s)$, $a < s < b$, проходит при $s = 0$ через точку O и при любом s ее касательным вектором является вектор $\boldsymbol{t}_1(s)$. Но для каждой кривой первые $n-1$ векторов сопровождающего базиса представляют собой векторы, получающиеся из первых $n-1$ производных касательного вектора процессом ортогонализации Грама—Шмидта. Поэтому, согласно доказанному выше, эти векторы совпадают с векторами $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_{n-1}$.

Что же касается последнего вектора сопровождающего базиса, то он однозначно характеризуется как единичный вектор, составляющий с первыми $n-1$ векторами положительно ориентированный базис. Поскольку базис $\boldsymbol{t}_1, \ldots, \boldsymbol{t}_n$, как мы видели, положительно ориентирован, этим вектором должен быть вектор $\boldsymbol{t}_n$.

Итак, доказано, что для любого s векторы $\boldsymbol{t}_1(s), \ldots, \boldsymbol{t}_n(s)$ составляют сопровождающий базис кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$. Поскольку для этих векторов имеют место формулы Френе (7), участвующие в этих формулах функции $k_i(s)$, $i=1, \ldots, n-1$, должны быть кривизнами кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$.

Тем самым существование кривой $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$, обладающей свойствами 1) и 2), полностью доказано.

Ее единственность вытекает из того, что, согласно теореме СЕР, сопровождающий базис $\boldsymbol{t}_1(s), \ldots, \boldsymbol{t}_n(s)$ однозначно определен уравнениями (7) и начальными условиями (12), а радиус-вектор $\boldsymbol{r}(s)$ однозначно определен (по формуле (15)) соотношением $\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{t}_1(s)$ и начальным условием $\boldsymbol{r}(0)=0$. □