

Лекция 3

Элементарные поверхности и их параметризации.— Примеры поверхностей.— Касательная плоскость и касательное подпространство.— Гладкие отображения поверхностей и их дифференциалы.— Дiffeоморфизмы поверхностей.— Первая квадратичная форма поверхности.— Изометрии.— Первый дифференциальный параметр Бельтрами.— Примеры вычисления первых квадратичных форм.— Развертывающиеся поверхности.

Эксплицирование интуитивного понятия поверхности делается по аналогии с эксплицированием понятия линии, и оно встречается с теми же трудностями, что и для линий, только более осложненными. Поэтому мы пока ограничимся лишь аналогом понятия открытой простой регулярной дуги (хотя при рассмотрении конкретных примеров позволим себе рассматривать и более общие поверхности).

Чтобы ввести этот аналог, мы начнем с произвольного непрерывного отображения вида

$$(1) \quad \gamma: U \rightarrow \mathcal{A},$$

где \mathcal{A} —как всегда, некоторое евклидово (или только аффинное) пространство размерности $n \geq 3$, а U —*выпуклое* (т. е. содержащее каждый прямолинейный отрезок, концы которого принадлежат множеству) открытое подмножество арифметической плоскости \mathbb{R}^2 (двумерный аналог интервала $I = (a, b)$). Когда в \mathcal{A} выбрано начало отсчета O , отображение (1) задается непрерывной вектор-функцией

$$(2) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in U,$$

принимавшей значения в ассоциированном линейном пространстве \mathcal{V} , а когда в \mathcal{V} выбран, кроме того, и базис e_1, \dots, e_n , отображение (1) задается n непрерывными числовыми функциями

$$(3) \quad x^1 = x^1(u, v), \dots, x^n = x^n(u, v)$$

— координатами в базисе e_1, \dots, e_n вектора $\mathbf{r}(u, v)$.

Отображение (1) называется *гладким класса C^r* , где r —некоторое натуральное число или символ ∞ , если каждая функция (3)—или, что равносильно, вектор-функция (2)—имеет непрерывные частные производные всех

порядков $\leq r$ (напомним, что при $r = \infty$ это означает существование частных производных всех порядков). В дальнейшем мы будем считать число r раз и навсегда фиксированным и достаточно большим. [В этой лекции нам будет годиться любое $r \geq 1$, но, скажем, в лекции 5 мы должны будем требовать, чтобы $r \geq 3$.]

В частности, для гладкого отображения (1) определены частные производные

$$(4) \quad r_u = \frac{\partial r(u, v)}{\partial u}, \quad r_v = \frac{\partial r(u, v)}{\partial v}$$

вектор-функции (2). Гладкое отображение (1) называется **регулярным**, если в каждой точке $(u, v) \in U$ частные производные (4) линейно независимы.

Определение 1. Отображение (1) называется **параметризацией**, если оно:

1° гладко,

2° регулярно,

3° монотонно (инъективно и обладает тем свойством, что если последовательность точек $\gamma(u_n, v_n)$, $(u_n, v_n) \in U$, пространства \mathcal{A} сходится к точке вида $\gamma(a, b)$, где $(a, b) \in U$, то последовательность точек $(u_n, v_n) \in U$ также сходится (в силу непрерывности обязательно к точке (a, b)).

Задача 1. Докажите, что если отображение (1) гладко и регулярно, то для любой точки $(u_0, v_0) \in U$ существует ее окрестность $V \subset U$, на которой это отображение монотонно (является параметризацией).

Определение 2. Подмножество \mathcal{X} пространства \mathcal{A} называется **элементарной поверхностью**, если существует такая параметризация $\gamma: U \rightarrow \mathcal{A}$ (называемая в этом случае **параметризацией поверхности \mathcal{X}**), что $\gamma(U) = \mathcal{X}$. Говорят также, что \mathcal{X} является **носителем** параметризации γ .

Элементарные поверхности являются двумерными аналогами простых регулярных дуг (а параметризации — аналогами простых регулярных кривых).

Замечание 1. В другой терминологической схеме, — которой мы также будем иногда пользоваться, не всегда это явно оговаривая, — элементарными поверхностями называются сами параметризации (1). Для линий мы избежали в лекции 1 подобной омонимии, различив кривые и линии. К сожалению, для двумерного случая аналогичной пары общепринятых терминов в русском языке нет.

Так как никаких других поверхностей, помимо элементарных, мы, как правило, рассматривать не будем, то в дальнейшем элементарные поверхности мы обычно будем называть просто поверхностями.

Поскольку параметризация $\gamma: U \rightarrow \mathcal{A}$ произвольной элементарной поверхности \mathcal{X} является инъективным отображением, для любой точки $p \in \mathcal{X}$ существуют единственные числа u и v , обладающие тем свойством, что $(u, v) \in U$ и $\gamma(u, v) = p$. Эти числа называются *координатами* точки p в данной параметризации. По традиции для этих координат часто используют дополнительные эпитеты, называя их *криволинейными* или *локальными*, хотя никаких других координат на поверхности обычно не рассматривается, и потому эти дополнительные эпитеты в принципе излишни.

Допуская вольность, часто говорят также, что числа u и v являются координатами *на поверхности* (1); это является проявлением общей тенденции смешивать в словопотреблении поверхности и их параметризации.

Каждую кривую в U с параметрическими уравнениями

$$(5) \quad u = u(t), \quad v = v(t), \quad t \in I,$$

параметризация (1) поверхности \mathcal{X} переводит в кривую

$$(6) \quad r = r(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

пространства \mathcal{A} . О кривой (6) говорят, что она *лежит* на поверхности \mathcal{X} и что уравнения (5) являются ее *параметрическими уравнениями в координатах u и v* .

В частности, кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ (являющиеся образами координатных линий в U) называются *координатными линиями на поверхности \mathcal{X}* , а их совокупность — *координатной сетью*.

Для любых открытых подмножеств $U, U^* \subset \mathbb{R}^2$ каждое отображение

$$(7) \quad \varphi: U^* \rightarrow U$$

задается парой функций

$$(8) \quad u = u(u^*, v^*), \quad v = v(u^*, v^*), \quad (u^*, v^*) \in U^*,$$

обладающих тем свойством, что для любой точки $(u^*, v^*) \in U^*$ точка $(u, v) = (u(u^*, v^*), v(u^*, v^*))$ принадлежит U . Отображение (7) называется *гладким класса C^r* , где r — натуральное число или символ ∞ , если функции (8) при $r \neq \infty$ имеют непрерывные частные производные всех

порядков $\leq r$. Гладкое отображение (7) называется *диффеоморфизмом*, если оно биективно и обратное отображение

$$\varphi^{-1}: U \rightarrow U^*$$

также гладко.

Две параметризации

$$(9) \quad \gamma: U \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{и} \quad \gamma^*: U^* \rightarrow \mathcal{A}$$

называются *эквивалентными*, если существует такой диффеоморфизм (7), что

$$(10) \quad \gamma^* = \gamma \circ \varphi.$$

Поскольку задание параметризации поверхности \mathcal{X} равносильно заданию на \mathcal{X} криволинейных координат, о диффеоморфизме (7) говорят также, что он осуществляет на \mathcal{X} *замену координат* (или задает *переход* от координат u, v к координатам u^*, v^*).

Задача 2. Докажите, что отношение (10) является эквивалентностью в общеалгебраическом смысле (рефлексивно, симметрично и транзитивно) и, следовательно, имеет смысл говорить о классах эквивалентных параметризаций.

Ясно, что *эквивалентные параметризации имеют один и тот же носитель*. Обратно, можно без особого труда показать, что *параметризации (9), имеющие один и тот же носитель, эквивалентны*. Это означает, что элементарные поверхности находятся в естественном биективном соответствии с классами эквивалентности их параметризаций и потому могут быть с ними отождествлены.

Задача 3. Докажите последнее утверждение. (Заметим, что для его справедливости существенны все три условия 1°—3° определения 1. Ср. доказательство предложения 1 лекции 1.)

В лекции 15 мы докажем общее предложение, частным случаем которого является это утверждение (а также предложение 1 лекции 1).

Примеры поверхностей.

Для наглядности мы ограничимся поверхностями в трехмерном евклидовом пространстве. Координаты x, y, z будем считать прямоугольными.

Пример 1. Уравнения

$$(11) \quad x = R \cos u, \quad y = R \sin u, \quad z = v$$

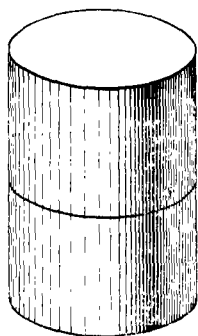
задают в трехмерном евклидовом пространстве прямой круговой цилиндр. Этот цилиндр не является элементарной поверхностью в смысле определения 2, поскольку при $-\infty < u < +\infty$ каждая точка цилиндра бесконечное (счетное) число раз покрывается точками плоскости \mathbb{R}^2 . Чтобы получить элементарную поверхность, цилиндр следует прорезать по образующей, т. е. в уравнениях (11) параметр u подчинить неравенствам $0 < u < 2\pi$. Весь же цилиндр покрывается двумя такими разрезанными цилиндрами.

Координатная сеть на цилиндре (11) состоит из вертикальных прямых $u = \text{const}$ и горизонтальных окружностей $v = \text{const}$.

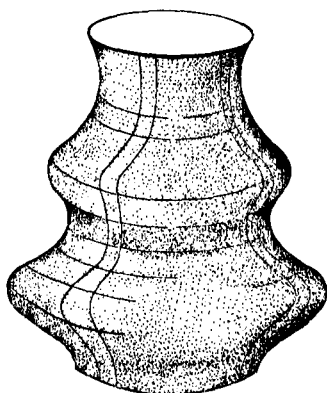
Пример 2. Пусть $x = x(v)$, $z = z(v)$ — простая регулярная кривая на плоскости Oxz , не пересекающая оси Oz . Поверхность с параметризацией

$$(12) \quad x = x(v) \cos u, \quad y = x(v) \sin u, \quad z = z(v)$$

называется *поверхностью вращения*, а кривая $x = x(v)$, $z = z(v)$ называется ее *профилем*. Наглядно, поверхность (12) получается вращением ее профиля вокруг оси Oz .



Круговой цилиндр



Поверхность вращения

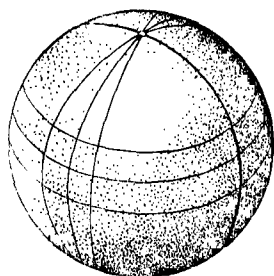
Регулярность параметризации (12), т. е. линейная независимость векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u &= (-x(v) \sin u, x(v) \cos u, 0), \\ \mathbf{r}_v &= (x'(v) \cos u, x'(v) \sin u, z'(v)), \end{aligned}$$

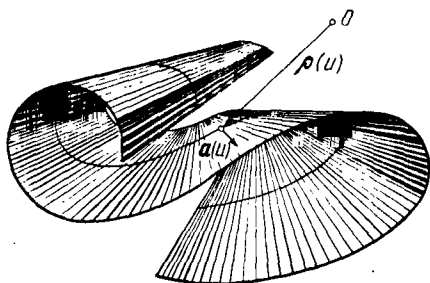
обеспечивается регулярностью профиля (т. е. условием

$x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$) и тем, что профиль не пересекает оси вращения Oz (т. е. тем, что $x(v) \neq 0$).

Координатная сеть на поверхности (12) состоит из кривых, являющихся поворотами профиля вокруг оси Oz (они называются *меридианами*), и перпендикулярных им окружностей (*параллелей*). Чтобы поверхность (12) сделать элементарной, ее нужно прорезать по меридиану.



Сфера



Линейчатая поверхность

Цилиндр представляет собой поверхность вращения, профилем которой является прямая $x=R, z=v$.

Поверхность вращения с профилем $x=R \cos v, z=R \sin v$ (окружностью) является сфера

$$x=R \cos v \cos u, \quad y=R \cos v \sin u, \quad z=R \sin v$$

радиуса R с центром в точке O . Координаты u и v на этой сфере представляют собой общеизвестные «географические координаты» — долготу и широту, а координатными кривыми являются географические меридианы и параллели.

Конечно, строго говоря, профилем сферы является лишь полуокружность $-\pi < v < +\pi$ (что исключает полюсы). Кроме того, чтобы получить элементарную поверхность, надо исключить и один меридиан («линию переменных дат»).

Пример 3. Поверхность $r=r(u, v)$ называется *линейчатой поверхностью*, если

$$(13) \quad r(u, v) = \rho(u) + v a(u),$$

где $\rho(u)$ и $a(u)$ — векторзначные функции, обладающие тем свойством (обеспечивающим регулярность), что векторы $\rho'(u) + v a'(u)$ и $a(u)$ при всех рассматриваемых u и v линейно независимы (так что, в частности, $a(u) \neq 0$ для всех u). Координатной кривой $u=u_0 = \text{const}$ является

прямая с направляющим вектором $\mathbf{a}(u_0)$, проходящая через точку с радиус-вектором $\mathbf{p}(u_0)$. Таким образом, наглядно линейчатая поверхность зачерчивается движущейся в пространстве прямой. Ср. с определением 1 лекции I.23.

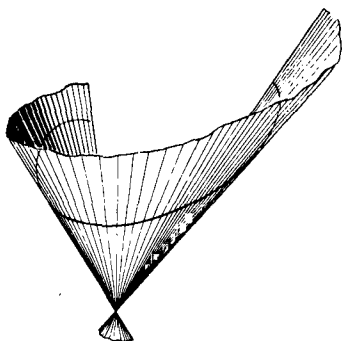
Ясно, что без ограничения общности мы можем считать вектор $\mathbf{a}(u)$ единичным:

$$|\mathbf{a}(u)| = 1 \text{ для всех } u.$$

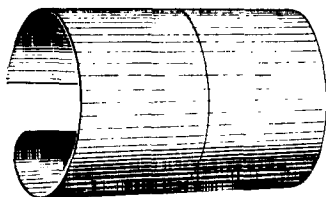
Если $\mathbf{p}'(u) = 0$ для всех u , т. е. $\mathbf{p}(u) = \text{const}$, то после переноса начала координат мы получим вместо (13) уравнение вида

$$(14) \quad \mathbf{r} = v\mathbf{a}(u).$$

Это — конус, направляющей которого является регулярная пространственная кривая $\mathbf{r} = \mathbf{a}(u)$. [Конечно, в уравнении (14) надо считать, что $v > 0$ или $v < 0$ (ибо точка



Конус



Цилиндр

$v = 0$ является особой точкой конуса и разбивает его на две половины). В случае же, когда образующие конуса пересекают направляющую в нескольких точках, на v приходится вводить и дополнительные ограничения.]

Если $\mathbf{a}'(u) = 0$ для всех u , т. е. $\mathbf{a}(u) = \text{const}$, то поверхность (14) представляет собой цилиндр с (вообще говоря, пространственной) направляющей $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$.

Если вектор \mathbf{p}' не равен тождественно нулю, то, перейдя, если нужно, к меньшей области в \mathbb{R}^2 , мы можем считать, что $\mathbf{p}'(u) \neq 0$ для всех u . Тогда $\mathbf{p} = \mathbf{p}(u)$ будет регулярной кривой в пространстве, и мы можем считать, что u является на этой кривой натуральным параметром

(длиной дуги). Конус (14) также можно задать уравнением вида (13) с $\rho'(u) \neq 0$. Для этого достаточно в (13) положить $\rho(u) = a(u)$ (если, конечно, $a'(u) \neq 0$).

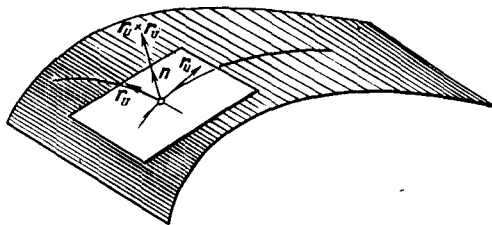
Если $a(u)$ является касательным вектором $\tau(u)$ кривой $\rho = \rho(u)$, то поверхность (13) называется *поверхностью касательных*. Аналогично определяются *поверхность главных нормалей* и *поверхность бинормалей*.

Заметим, что для поверхности касательных все точки кривой $\rho = \rho(u)$ являются особыми точками этой поверхности, в которых нарушается условие регулярности. (Они составляют так называемое *ребро возврата* поверхности касательных.)

Пусть снова \mathcal{X} — произвольная (элементарная) поверхность в n -мерном аффинном пространстве \mathcal{A} с параметризацией $r = r(u, v)$, и пусть p_0 — произвольная точка поверхности \mathcal{X} , а $r_0 = r(u_0, v_0)$ — ее радиус-вектор. В силу условия регулярности значения

$$r_{u_0} = \frac{\partial r}{\partial u}(u_0, v_0), \quad r_{v_0} = \frac{\partial r}{\partial v}(u_0, v_0)$$

частных производных вектор-функции $r = r(u, v)$ в точке (u_0, v_0) линейно независимы, т. е. бивектор $r_{u_0} \wedge r_{v_0}$ отли-



Касательная плоскость

чен от нуля. Поэтому в пространстве \mathcal{A} определена двумерная плоскость с направляющим бивектором $r_{u_0} \wedge r_{v_0}$, проходящая через точку p_0 . Векторное параметрическое уравнение этой плоскости имеет вид

$$(15) \quad r = r_0 + ar_{u_0} + br_{v_0},$$

где a и b — параметры.

Определение 3. Плоскость (15) называется *касательной плоскостью* поверхности \mathcal{X} (или *к поверхности \mathcal{X}*) в точке p_0 . Соответствующее подпространство ассоциирован-

ного линейного пространства \mathcal{V} (состоящее из векторов вида $ar_{u_0} + br_{v_0}$) обозначается символом $T_{p_0}\mathcal{X}$ и называется *касательным подпространством*, а его векторы — *касательными векторами* поверхности \mathcal{X} в точке p_0 . Чтобы подчеркнуть двумерность, касательное подпространство часто называется также *касательной плоскостью*.

Эта терминология оправдывается тем, что для любой кривой (5) на поверхности \mathcal{X} , проходящей (скажем, при $t=t_0$) через точку p_0 , ее касательный вектор

$$(16) \quad r'(t_0) = u'(t_0)r_{u_0} + v'(t_0)r_{v_0}$$

принадлежит касательному подпространству $T_{p_0}\mathcal{X}$, причем и обратно, любой вектор $ar_{u_0} + br_{v_0}$ из $T_{p_0}\mathcal{X}$ может быть представлен в виде (16) (достаточно рассмотреть кривую с параметрическими уравнениями $u = u_0 + at$, $v = v_0 + bt$, $t \in I$, где I — такой интервал оси t , что $(u_0 + at, v_0 + bt) \in U$ для любого $t \in I$). Таким образом, *касательные векторы поверхности — это в точности векторы, касательные к кривым на этой поверхности*.

Соотношение (10), определяющее замену координат на поверхности \mathcal{X} , записывается в радиус-векторах формулой

$$r^*(u^*, v^*) = r(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)),$$

дифференцирование которой дает соотношения

$$(17) \quad \begin{aligned} r_{u^*}^* &= \frac{\partial u}{\partial u^*} r_u + \frac{\partial v}{\partial u^*} r_v, \\ r_{v^*}^* &= \frac{\partial u}{\partial v^*} r_u + \frac{\partial v}{\partial v^*} r_v. \end{aligned}$$

Из соотношений (17) следует, что векторы $r_{u^*}^*$ и $r_{v^*}^*$ линейно эквивалентны векторам r_u и r_v и, значит, порождают одно и то же подпространство. Это доказывает, что для любой точки $p \in \mathcal{X}$ линейное пространство $T_p\mathcal{X}$ определено корректно (не зависит от выбора параметризации $r = r(u, v)$). При изменении параметризации в пространстве $T_p\mathcal{X}$ меняется — по формулам (17) — лишь базис r_u, r_v .

Векторы пространства $T_p\mathcal{X}$ часто по традиции обозначают символом dr , а их координаты (в базисе r_u, r_v) — символами du и dv (причем эти координаты пишутся справа от векторов r_u и r_v). Таким образом, в этих обозначениях

$$(18) \quad dr = r_u du + r_v dv$$

для любого вектора $d\mathbf{r}$ пространства $T_p\mathcal{X}$. При этом, как непосредственно следует из формул (17), координаты du , dv связаны с координатами du^* , dv^* в базисе \mathbf{r}_u^* , \mathbf{r}_v^* соотношениями

$$(19) \quad \begin{aligned} du &= \frac{\partial u}{\partial u^*} du^* + \frac{\partial u}{\partial v^*} dv^*, \\ dv &= \frac{\partial v}{\partial u^*} du^* + \frac{\partial v}{\partial v^*} dv^*, \end{aligned}$$

формально совпадающими с известными из анализа формулами для дифференциалов (что и является основным аргументом в пользу обозначений (18)).

Рассмотрим теперь наряду с поверхностью \mathcal{X} и ее параметризацией $\gamma: U \rightarrow \mathcal{A}$, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in U$, другую элементарную поверхность $\hat{\mathcal{X}}$ с параметризацией $\hat{\gamma}: \hat{U} \rightarrow \mathcal{A}$, задаваемой вектор-функцией $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\hat{u}, \hat{v})$, $(\hat{u}, \hat{v}) \in \hat{U}$.

Так как отображения γ и $\hat{\gamma}$ инъективны, то каждое отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ единственным образом определяет отображение $\bar{f}: U \rightarrow \hat{U}$, удовлетворяющее соотношению

$$(20) \quad f \circ \gamma = \hat{\gamma} \circ \bar{f}$$

и однозначно определяющее отображение f . Наглядно соотношение (20) означает, что в диаграмме

$$(21) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \hat{\mathcal{X}} \\ \gamma \uparrow & \bar{f} & \uparrow \hat{\gamma} \\ U & \longrightarrow & \hat{U} \end{array}$$

движение из левого нижнего угла в правый верхний по обоим возможным путям приводит к одному результату. [Обладающие этим свойством диаграммы называются коммутативными.]

Об отображении \bar{f} говорят, что оно *представляет* отображение f в параметризациях γ и $\hat{\gamma}$, а о функциях

$$(22) \quad \hat{u} = \hat{u}(u, v), \quad \hat{v} = \hat{v}(u, v), \quad (u, v) \in U,$$

задающих отображение \bar{f} , говорят, что они *задают* отображение f в координатах u , v и u^* , v^* .

Отображение f называется *гладким*, если гладко отображение \bar{f} , т. е. если гладки функции (22). Ясно, что

это определение корректно (если отображение \bar{f} гладко при одном выборе параметризаций γ и $\hat{\gamma}$, то оно будет гладко и при любом другом их выборе).

Каждому гладкому отображению $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ и любой точке $p \in \mathcal{X}$ мы сопоставим линейное отображение

$$(23) \quad T_p \mathcal{X} \rightarrow T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}, \quad \hat{p} = f(p),$$

касательных пространств, переводящее вектор (18) пространства $T_p \mathcal{X}$ в вектор

$$d\hat{r} = \hat{r}_{\hat{u}} d\hat{u} + \hat{r}_{\hat{v}} d\hat{v}$$

пространства $T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}$, где в полном соответствии с формулами дифференциального исчисления

$$(24) \quad \begin{aligned} d\hat{u} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} du + \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} dv, \\ d\hat{v} &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} du + \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Отображение (23) определяется для данных параметризаций γ , $\hat{\gamma}$ поверхностей \mathcal{X} , $\hat{\mathcal{X}}$, и потому возникает вопрос о его корректности, т. е. независимости от выбора этих параметризаций.

Пусть, например, параметризацию γ мы заменили другой параметризацией $\gamma^*: U^* \rightarrow \mathcal{A}$ поверхности \mathcal{X} . По определению $\gamma^* = \gamma \circ \varphi$, где $\varphi: U^* \rightarrow U$ — некоторый диффеоморфизм, задаваемый функциями

$$u = u(u^*, v^*), \quad v = v(u^*, v^*).$$

При этом для соответствующих базисов r_u, r_v и r_{u^*}, r_{v^*} пространства $T_p \mathcal{X}$ будут иметь формулы (17), а для соответствующих координат du, dv и du^*, dv^* касательных векторов — формулы (19). [Отображение f в координатах u^*, v^* и \hat{u}, \hat{v} задается, очевидно, функциями

$$\begin{aligned} \hat{u}^*(u^*, v^*) &= \hat{u}(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)), \\ \hat{v}^*(u^*, v^*) &= \hat{v}(u(u^*, v^*), v(u^*, v^*)), \end{aligned}$$

и, значит, вектор dr пространства $T_p \mathcal{X}$, имеющий в базисе r_{u^*}, r_{v^*} координаты du^*, dv^* , отображение (27), построенное с помощью параметризаций $\gamma^*, \hat{\gamma}$, будет переводить в вектор $d\hat{r}^*$ пространства $T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}$, имеющий в базисе

\hat{r}_u, \hat{r}_v координаты

$$\begin{aligned} d\hat{u} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial u^*} du^* + \frac{\partial \hat{u}}{\partial v^*} dv^*, \\ d\hat{v} &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial u^*} du^* + \frac{\partial \hat{v}}{\partial v^*} dv^*. \end{aligned}$$

С другой стороны, подставив в формулы (24) для координат $d\hat{u}, d\hat{v}$ вектора $d\hat{r}$ выражения (19) координат du, dv через координаты du^*, dv^* и учтя, что, согласно известным из анализа правилам дифференцирования сложных функций, имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u^*} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u^*} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial u^*}, & \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v^*} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v^*} &= \frac{\partial \hat{u}}{\partial v^*}, \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u^*} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u^*} &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial u^*}, & \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial v^*} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial v^*} &= \frac{\partial \hat{v}}{\partial v^*}, \end{aligned}$$

мы немедленно получим, что $d\hat{u} = d\hat{u}^*$ и $d\hat{v} = d\hat{v}^*$, т. е. что $d\hat{r} = d\hat{r}^*$. Это показывает, что вектор $d\hat{r}$ не зависит от выбора параметризации γ . Аналогично показывается (сделайте это!), что этот вектор не зависит и от выбора параметризации $\hat{\gamma}$. Следовательно, отображение (23) определено корректно.

Определение 4. Отображение (23) называется *дифференциалом* отображения f в точке p (или его *главной линейной частью*) и обозначается символом $(df)_p$ (или $T_p f$).

Задача 4. Произвольную кривую (5) на поверхности \mathcal{X} отображение f переводит в кривую

$$(25) \quad \hat{u} = \hat{u}(u(t), v(t)), \quad \hat{v} = \hat{v}(u(t), v(t)), \quad t \in I,$$

на поверхности $\hat{\mathcal{X}}$. Пусть при $t = t_0$ кривая (5) проходит через точку p_0 поверхности \mathcal{X} . Покажите, что дифференциал $(df)_{p_0}$ отображения f переводит касательный вектор к кривой (5) в точке p_0 в касательный вектор к кривой (25) в точке $f(p_0)$.

Отображение $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ называется *диффеоморфизмом*, если диффеоморфизмом является отображение \bar{f} . (Ясно, что это определение корректно.) Функции (22), задающие диффеоморфизм, обладают, как известно из анализа, тем

свойством, что их якобиан

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} & \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Это означает (см. формулы (24)), что дифференциал $(df)_p$ диффеоморфизма f в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ является изоморфизмом линейного пространства $T_p \mathcal{X}$ на линейное пространство $T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}$.

При $\hat{U} = U$ формулы $\hat{u} = u$, $\hat{v} = v$ задают, очевидно, диффеоморфизм. Об этом диффеоморфизме говорят, что он действует по равенству координат.

Интересно, что для любого диффеоморфизма $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ и любой параметризации $\gamma: U \rightarrow \mathcal{A}$ поверхности \mathcal{X} существует такая параметризация $\hat{\gamma}: U \rightarrow \mathcal{A}$ поверхности $\hat{\mathcal{X}}$, что в параметризациях γ и $\hat{\gamma}$ диффеоморфизм f действует по равенству координат. Действительно, пусть $\hat{\gamma}: \hat{U} \rightarrow \mathcal{A}$ — произвольная параметризация поверхности $\hat{\mathcal{X}}$, и пусть в параметризациях γ и $\hat{\gamma}$ отображение f представляется диффеоморфизмом $\bar{f}: U \rightarrow \hat{U}$. Рассмотрим составное отображение $\gamma^* = \hat{\gamma} \circ \bar{f}$. Поскольку \bar{f} является диффеоморфизмом, это отображение представляет собой параметризацию поверхности $\hat{\mathcal{X}}$, эквивалентную параметризации $\hat{\gamma}$. Так как $f \circ \gamma = \hat{\gamma} \circ \bar{f} = \gamma^* \circ \text{id}$, где id — тождественное отображение, то в параметризациях γ и γ^* диффеоморфизм f представляется отображением id и, значит, действует по равенству координат. \square

Как мы увидим, это свойство диффеоморфизмов часто существенно облегчает их изучение.

Будем теперь считать пространство \mathcal{A} , содержащее данную поверхность \mathcal{X} , евклидовым. Тогда евклидова структура возникает и в каждом касательном подпространстве $T_p \mathcal{X}$, причем квадрат длины произвольного вектора (18) этого подпространства будет выражаться формулой

$$(26) \quad d\mathbf{r}^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

где

$$E = \mathbf{r}_u^2, \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v^2$$

— метрические коэффициенты базиса $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$.

Определение 5. Квадратичная форма (26) от переменных du и dv называется *первой квадратичной формой* поверхности \mathcal{X} . Обычно она обозначается символом I или $I(dr)$. Таким образом, по определению

$$I = dr^2.$$

Подчеркнем, что коэффициенты E , F и G первой квадратичной формы зависят от точки $p \in \mathcal{X}$ и в координатах u , v являются гладкими функциями

$$E = E(u, v), \quad F = F(u, v), \quad G = G(u, v)$$

от u и v .

З а м е ч а н и е 2. Трактровка выражения $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ как квадратичной формы традиционна. С современных позиций его следует трактовать как запись квадратичного функционала на пространстве $T_p \mathcal{X}$, значение которого на векторе (18) равно $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$.

Длина $|r'(t)|$ касательного вектора $r'(t)$ кривой (6) на поверхности \mathcal{X} выражается ввиду равенства (16) формулой

$$|r'(t)| = \sqrt{r'(t)^2} = \sqrt{(u'(t)r_u + v'(t)r_v)^2} = \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2},$$

где, конечно, E , F и G рассматриваются как функции от t :

$$E = E(u(t), v(t)), \quad F = F(u(t), v(t)), \quad G = G(u(t), v(t)).$$

Для длины s кривой (6) отсюда получается формула

$$(27) \quad s = \int_a^b \sqrt{E u'(t)^2 + 2F u'(t)v'(t) + G v'(t)^2} dt,$$

которую можно переписать в следующем удобном для запоминания условном виде:

$$s = \int_L \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2},$$

где L обозначает кривую (6).

Еще более условный вид имеет формула

$$(28) \quad ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

(короче записываемая в виде $ds^2 = I(dr)$ или в виде $ds^2 = dr^2$). Словами это соотношение выражают, говоря,

что первая квадратичная форма I задает квадрат ds^2 элемента длины.

[Следует отчетливо понимать условный характер как этой формулировки, так и формулы (28). Они служат лишь для сокращенного выражения формулы (27).]

По общим правилам линейной алгебры для угла θ между двумя касательными векторами

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv \quad \text{и} \quad \delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v$$

имеет место формула

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{r} \delta\mathbf{r}}{|\mathbf{r}'| |\delta\mathbf{r}|},$$

т. е. формула

$$(29) \quad \cos \theta = \frac{E du \delta u + F (du \delta v + \delta u dv) + G dv \delta v}{\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2}},$$

которую условно можно записать в следующем мнемоническом виде:

$$\cos \theta = \frac{I(d, \delta)}{\sqrt{I(d)} \sqrt{I(\delta)}}.$$

Углом между кривыми

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(u_1(t), v_1(t))$$

на поверхности \mathcal{X} , проходящими при $t = t_0$ через одну и ту же точку p_0 поверхности, называется угол между их касательными векторами

$$\mathbf{r}'(t_0) = u'(t_0) \mathbf{r}_{u_0} + v'(t_0) \mathbf{r}_{v_0} \quad \text{и} \quad \mathbf{r}'_1(t_0) = u'_1(t_0) \mathbf{r}_{u_0} + v'_1(t_0) \mathbf{r}_{v_0}$$

в этой точке. Имеем

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{r}'(t_0) \mathbf{r}'_1(t_0)}{|\mathbf{r}'(t_0)| \cdot |\mathbf{r}'_1(t_0)|},$$

где

$$\mathbf{r}'(t_0) \mathbf{r}'_1(t_0) =$$

$$= E_0 u'(t_0) u'_1(t_0) + F_0 (u'(t_0) v'_1(t_0) + u'_1(t_0) v'(t_0)) + G_0 v'(t_0) v'_1(t_0),$$

$$|\mathbf{r}'(t_0)| = \sqrt{E_0 u'(t_0)^2 + 2F_0 u'(t_0) v'(t_0) + G_0 v'(t_0)^2},$$

$$|\mathbf{r}'_1(t_0)| = \sqrt{E_0 u'_1(t_0)^2 + 2F_0 u'_1(t_0) v'_1(t_0) + G_0 v'_1(t_0)^2},$$

а

$$E_0 = E(u_0, v_0) = E(u(t_0), v(t_0)),$$

$$F_0 = F(u_0, v_0) = F(u(t_0), v(t_0)),$$

$$G_0 = G(u_0, v_0) = G(u(t_0), v(t_0))$$

— значения коэффициентов первой квадратичной формы в точке p_0 .

В частности, для косинуса угла между координатными линиями $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ получается формула

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{E} \sqrt{G}},$$

из которой следует, что координатные линии $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ тогда и только тогда ортогональны, когда $F = 0$.

Таким образом, мы можем вычислять длины кривых на поверхности и углы между ними, зная лишь первую квадратичную форму этой поверхности, т. е. евклидовы структуры на всех касательных плоскостях.

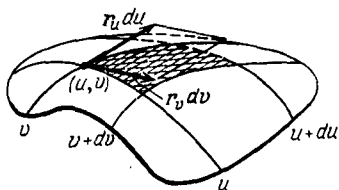
Из курса анализа известна концепция площади произвольной части D поверхности \mathcal{X} как предела площадей аппроксимирующих эту часть многогранных поверхностей. Этот предел (когда он существует) выражается интегралом

$$\iint_D \sqrt{\Gamma(r_u, r_v)} du dv,$$

где

$$\Gamma(r_u, r_v) = \begin{vmatrix} r_u^2 & r_u r_v \\ r_u r_v & r_v^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2$$

— определитель Грама векторов r_u и r_v . [Интуитивное обоснование этой формулы состоит в наблюдении, что площадь бесконечно малого криволинейного параллелограмма координатной сети с вершиной в точке (u, v) и со сторонами du и dv приближенно равна площади параллелограмма в касательной плоскости со сторонами $r_u du$ и $r_v dv$ (см. рисунок), т. е. (см. формулу (9) лекции I.15) равна $\sqrt{\Gamma(r_u, r_v)} du dv$.] На общепринятом в анализе языке этот факт выражают, говоря, что элемент площади поверхности равен $\sqrt{EG - F^2} du dv$.



Итак, первая квадратичная форма поверхности позволяет нам вычислять и площади на \mathcal{X} .

Напомним (см. лекцию II.5), что линейный изоморфизм $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$ евклидовых векторных пространств называ-

ется изометрией, если

$$(30) \quad xy = \varphi x \cdot \varphi y$$

для любых векторов $x, y \in \mathcal{V}$. При этом выполнения условия (30) достаточно требовать лишь при $x=y$, т. е. линейное отображение $\varphi: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_1$, обладающее тем свойством, что

$$(31) \quad x^2 = (\varphi x)^2 \quad \text{для любого вектора } x \in \mathcal{V}$$

является изометрией. (Для доказательства достаточно применить соотношение (31) к вектору $x+y$.)

В координатах отображение φ записывается линейными формулами вида

$$y^i = a_j^i x^j,$$

а скалярные квадраты $x^2, x \in \mathcal{V}$, и $y^2, y \in \mathcal{V}_1$, — квадратичными формами

$$x^2 = g_{ij} x^i x^j, \quad y^2 = h_{ij} y^i y^j.$$

В этих обозначениях равенство (31) означает, что при подстановке в форму $h_{ij} y^i y^j$ выражений $y^i = a_j^i x^j$ должна получиться форма $g_{ij} x^i x^j$, т. е. что имеют место равенства

$$g_{ij} = h_{kl} a_i^k a_j^l.$$

В частности, для евклидовых двумерных пространств $T_p \mathcal{X}$, $T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}$ и дифференциала $(df)_p: T_p \mathcal{X} \rightarrow T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}$, $\hat{p} = f(p)$, диффеоморфизма $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ выполнение условий (31) во всех точках $p \in \mathcal{X}$ означает, что при подстановке в первую квадратичную форму $\hat{E} d\hat{u}^2 + 2\hat{F} d\hat{u} d\hat{v} + \hat{G} d\hat{v}^2$ поверхности $\hat{\mathcal{X}}$ вместо $d\hat{u}$ и $d\hat{v}$ их выражений (24) (а в ее коэффициенты $\hat{E}, \hat{F}, \hat{G}$ вместо \hat{u} и \hat{v} их выражений (22)) получается первая квадратичная форма $E du^2 + 2F du dv + G dv^2$ поверхности \mathcal{X} , т. е. что тождественно по u и v

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \hat{E}(\hat{u}, \hat{v}) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \right)^2 + 2\hat{F}(\hat{u}, \hat{v}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} + \hat{G}(\hat{u}, \hat{v}) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial u} \right)^2, \\ F(u, v) &= \hat{E}(\hat{u}, \hat{v}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} + \hat{F}(\hat{u}, \hat{v}) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} \right) + \\ (32) \quad &+ \hat{G}(\hat{u}, \hat{v}) \frac{\partial \hat{v}}{\partial u} \frac{\partial \hat{v}}{\partial v}, \\ G(u, v) &= \end{aligned}$$

$$= \hat{E}(\hat{u}, \hat{v}) \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial v} \right)^2 + 2\hat{F}(\hat{u}, \hat{v}) \frac{\partial \hat{u}}{\partial v} \frac{\partial \hat{v}}{\partial v} + \hat{G}(\hat{u}, \hat{v}) \left(\frac{\partial \hat{v}}{\partial v} \right)^2.$$

Таким образом, для диффеоморфизма $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ линейные отображения

$$(df)_p: T_p \mathcal{X} \rightarrow T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}, \quad \hat{p} = f(p),$$

тогда и только тогда являются для всех точек $p \in \mathcal{X}$ изометриями, когда тождественно по u и v имеют место равенства (32).

Для диффеоморфизма $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$, действующего по равенству координат, это условие означает, что в рассматриваемых координатах первые квадратичные формы поверхностей \mathcal{X} и $\hat{\mathcal{X}}$ совпадают (или точнее — отличаются лишь обозначениями переменных).

Определение 6. Диффеоморфизм $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ называется *изометричным отображением* поверхности \mathcal{X} на поверхность $\hat{\mathcal{X}}$ (или просто *изометрией*), если для любой кривой

$$(33) \quad u = u(t), \quad v = v(t), \quad a \leq t \leq b,$$

на поверхности \mathcal{X} ее образ

$$\hat{u} = \hat{u}(t), \quad \hat{v} = \hat{v}(t), \quad a \leq t \leq b,$$

для поверхности $\hat{\mathcal{X}}$, где $\hat{u}(t) = \hat{u}(u(t), v(t))$ и $\hat{v}(t) = \hat{v}(u(t), v(t))$, имеет ту же длину, т. е. если

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{E(t) u'(t)^2 + 2F(t) u'(t) v'(t) + G(t) v'(t)^2} dt = \\ = \int_a^b \sqrt{\hat{E}(t) \hat{u}'(t)^2 + 2\hat{F}(t) \hat{u}'(t) \hat{v}'(t) + \hat{G}(t) \hat{v}'(t)^2} dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} E(t) = E(u(t), v(t)), \quad F(t) = F(u(t), v(t)), \\ G(t) = G(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

и аналогично

$$\begin{aligned} \hat{E}(t) = \hat{E}(\hat{u}(t), \hat{v}(t)), \quad \hat{F}(t) = \hat{F}(\hat{u}(t), \hat{v}(t)), \\ \hat{G}(t) = \hat{G}(\hat{u}(t), \hat{v}(t)). \end{aligned}$$

Поверхности, для которых существует хотя бы одно изометричное отображение $\mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$, называются *изометричными*.

Предложение 1. Диффеоморфизм $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ тогда и только тогда является изометрией, когда для любой точки $p \in \mathcal{X}$ изометрией является его дифференциал

$$(df)_p: T_p \mathcal{X} \rightarrow T_{\hat{p}} \hat{\mathcal{X}}, \quad \hat{p} = f(p).$$

Доказательство. Согласно сделанным выше замечаниям мы без ограничения общности можем предполагать, что диффеоморфизм f действует по равенству координат. Тогда для любой кривой (33) на поверхности \mathcal{X} ее образ на поверхности $\hat{\mathcal{X}}$ при диффеоморфизме f будет иметь те же параметрические уравнения (33), а утверждение, что дифференциал $(df)_p$ диффеоморфизма f является в каждой точке $p \in \mathcal{X}$ изометрией, будет означать, что первые квадратичные формы поверхностей \mathcal{X} и $\hat{\mathcal{X}}$ отличаются лишь обозначениями переменных. Поэтому формулы (27) для обеих кривых будут идентичны, и, значит, длины этих кривых будут одинаковы. Следовательно, диффеоморфизм f будет изометрией.

Обратно, пусть диффеоморфизм $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$, действующий по равенству координат, является изометрией. Это означает, что для любых гладких функций $u = u(t)$, $v = v(t)$, $a \leq t \leq b$, обладающих тем свойством, что $(u(t), v(t)) \in U$, $a \leq t \leq b$, имеет место равенство

$$\begin{aligned} \int_a^b \sqrt{E(t) u'(t)^2 + 2F(t) u'(t) v'(t) + G(t) v'(t)^2} dt = \\ = \int_a^b \sqrt{\hat{E}(t) u'(t)^2 + 2\hat{F}(t) u'(t) v'(t) + \hat{G}(t) v'(t)^2} dt. \end{aligned}$$

Дифференцируя это тождество по b (и заменяя b на t), мы после возведения в квадрат получим тождество

$$\begin{aligned} E(t) u'(t)^2 + 2F(t) u'(t) v'(t) + G(t) v'(t)^2 = \\ = \hat{E}(t) u'(t)^2 + 2\hat{F}(t) u'(t) v'(t) + \hat{G}(t) v'(t)^2. \end{aligned}$$

В частности, это тождество должно иметь место для линейных функций вида

$$u(t) = u_0 + \alpha t, \quad v(t) = v_0 + \beta t, \quad |t| < \varepsilon,$$

где (u_0, v_0) — произвольная точка области U , α и β — произвольные числа, а $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число. Но в этом случае оно после подстановки $t = 0$

приобретает вид

$$E_0\alpha^2 + 2F_0\alpha\beta + G_0\beta^2 = \hat{E}_0\alpha^2 + 2\hat{F}_0\alpha\beta + \hat{G}_0\beta^2,$$

где E_0, \dots, \hat{G}_0 — значения функций E, \dots, \hat{G} в точке (u_0, v_0) , и потому — ввиду произвольности чисел α и β — возможно только тогда, когда $E_0 = \hat{E}_0$, $F_0 = \hat{F}_0$, $G_0 = \hat{G}_0$, т. е. когда $E = \hat{E}$, $F = \hat{F}$ и $G = \hat{G}$ всюду в U . Поэтому линейные отображения $(df)_p$ являются изометриями. \square

Следствие 1. *На изометричных поверхностях соответственные кривые пересекаются под одинаковыми углами, а соответственные области имеют одну и ту же площадь.* \square

Следствие 2. *Две поверхности тогда и только тогда изометричны, когда на них можно выбрать локальные координаты, в которых первые квадратичные формы этих поверхностей совпадают.* \square

Конечно, этот критерий изометричности в высшей степени неэффективен (как догадаться, существуют ли предусмотренные им локальные координаты?). Нашей конечной целью (которую мы достигнем в лекции 5) будет эффективизация этого критерия, но для этого нам придется пройти довольно длинный путь.

Представив поверхность выполненной из гибкого, но нерастяжимого материала и, произвольно изгибая ее, мы не изменим длин лежащих на ней кривых и, следовательно, получим изометричную поверхность. Основываясь на этом наглядном представлении, основатели теории поверхностей в XIX веке называли изометрии *изгибаниями*. Эта терминология отчасти сохранилась и до настоящего времени, но ныне обычно изгибания понимают в более узком смысле — как изометрии, которые можно связать с тождественным преобразованием непрерывным семейством изометрий. Долгое время все математики были уверены, что в локальной ситуации, т. е. в достаточно малой окрестности произвольной точки, любая изометрия является изгибанием в этом смысле. Однако сравнительно недавно Н. В. Ефимов показал, что это неверно, построив соответствующий контрпример.

Пусть поверхность населена разумными существами, умеющими измерять длины и площади, углы, но не умеющими выходить в объемлющее пространство. Тогда при любом изгибании поверхности вся их геометрия останется прежней и они это изгибание просто не заметят. На этом

основании об изометричных поверхностях говорят, что они имеют одну и ту же *внутреннюю геометрию*.

Приведем один важный пример внутренне-геометрической конструкции.

Согласно общим результатам линейной алгебры (см. лекцию II.5) для любого евклидова пространства \mathcal{V} с метрическим тензором g_{ij} сопряженное пространство \mathcal{V}^* является евклидовым пространством с метрическим тензором g^{ij} , компоненты которого составляют матрицу $\|g^{ij}\|$, обратную к матрице $\|g_{ij}\|$ компонент тензора g_{ij} . Поэтому для любого ковектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ из \mathcal{V}^* определена его длина $|\xi|$, квадрат которой выражается формулой

$$|\xi| = g^{ij} \xi_i \xi_j.$$

В нашем случае для двумерного евклидова пространства $T_p \mathcal{X}$ матрица $\|g_{ij}\|$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix},$$

а, значит, матрица $\|g^{ij}\|$ — вид

$$\frac{1}{EG - F^2} \begin{vmatrix} G & -F \\ -F & E \end{vmatrix}.$$

Поэтому для длины $|\xi|$ произвольного ковектора ξ на $T_p \mathcal{X}$ имеет место формула

$$|\xi|^2 = \frac{G\xi^2 - 2F\xi\eta + E\eta^2}{EG - F^2},$$

где ξ, η — координаты этого ковектора.

Примером ковектора ξ является градиент $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)$ произвольной гладкой функции $\varphi = \varphi(u, v)$ на поверхности \mathcal{X} . Квадрат длины этого ковектора называется *первым дифференциальным параметром Вельтрами* функции φ и обозначается символом $\Delta_1 \varphi$. Таким образом, по определению

$$\Delta_1 \varphi = \frac{G\varphi_u^2 - 2F\varphi_u\varphi_v + E\varphi_v^2}{EG - F^2}.$$

По построению *эта конструкция инвариантна*, т. е. не зависит от выбора параметризации, и для любой изометрии $f: \mathcal{X} \rightarrow \hat{\mathcal{X}}$ имеет место формула

$$(34) \quad \Delta_1(\varphi \circ f) = \Delta_1 \varphi \circ f$$

(проверьте!). В этом смысле она принадлежит к внутренней геометрии поверхности \mathcal{X} .

Рассмотрим в заключение несколько примеров вычисления первой квадратичной формы поверхностей в трехмерном евклидовом пространстве. В этих примерах поверхности, как правило, элементарными не будут. Однако они легко будут сводиться к элементарным разрезами и ограничениями областей определения параметризаций.

Пример 4. Плоскость Oxy в координатах $u=x$ и $v=y$ имеет параметрическое уравнение $\mathbf{r} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$. Поэтому $\mathbf{r}_u = \mathbf{i}$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{j}$ и, значит, $E=1$, $F=0$, $G=1$, т. е. для плоскости

$$(35) \quad I = du^2 + dv^2.$$

(Результат, который легко предугадать без всяких вычислений.)

Конечно, ту же самую первую квадратичную форму имеет и любое открытое подмножество плоскости (рассматриваемое как поверхность в пространстве).

Пример 5. Для кругового цилиндра

$$\mathbf{r} = R \cos u \cdot \mathbf{i} + R \sin u \cdot \mathbf{j} + v \cdot \mathbf{k}$$

мы имеем $\mathbf{r}_u = -R \sin u \cdot \mathbf{i} + R \cos u \cdot \mathbf{j}$ и $\mathbf{r}_v = \mathbf{k}$. Поэтому

$$E = \mathbf{r}_u^2 = R^2, \quad F = \mathbf{r}_u \mathbf{r}_v = 0, \quad G = \mathbf{r}_v^2 = 1,$$

т. е. для цилиндра

$$I = R^2 du^2 + dv^2.$$

Вводя новую координату $u_1 = Ru$ (и обозначив u_1 снова через u), мы преобразуем эту форму к виду (35).

Таким образом, существуют координаты, в которых первые квадратичные формы плоскости и цилиндра совпадают! Однако это еще не означает, что плоскость и цилиндр (конечно, взрезанный; см. выше пример 1) изометричны, поскольку для цилиндра координаты пробегают лишь некоторую полосу в \mathbb{R}^2 и, следовательно, взрезанный цилиндр изометричен лишь части плоскости. Мы будем выражать это обстоятельство, говоря, что цилиндр и плоскость *локально изометричны*.

Изометричное отображение взрезанного цилиндра на плоскую полосу наглядно осуществляется его постепенным разгибанием.

Пример 6. Для поверхности вращения

$$\mathbf{r} = x(v) \cos u \cdot \mathbf{i} + x(v) \sin u \cdot \mathbf{j} + z(v) \cdot \mathbf{k}$$

мы имеем

$$\mathbf{r}_u = -x(v) \sin u \cdot \mathbf{i} + x(v) \cos u \cdot \mathbf{j},$$

$$\mathbf{r}_v = x'(v) \cos u \cdot \mathbf{i} + x'(v) \sin u \cdot \mathbf{j} + z'(v) \cdot \mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$E = x(v)^2 \sin^2 u + x(v)^2 \cos^2 u = x(v)^2,$$

$$F = -x(v) \sin u \cdot x'(v) \cos u + x(v) \cos u \cdot x'(v) \sin u = 0,$$

$$G = x'(v)^2 \cos^2 u + x'(v)^2 \sin^2 u + z'(v)^2 = x'(v)^2 + z'(v)^2,$$

так что для поверхности вращения

$$I = x(v)^2 du^2 + (x'(v)^2 + z'(v)^2) dv^2.$$

Наглядно очевидно, что меридианы и параллели любой поверхности вращения ортогональны. Поэтому равенство $F=0$ мы могли бы предугадать и без вычислений.

В случае, когда профиль $x=x(v)$, $z=z(v)$ поверхности вращения отнесен к натуральному параметру $v=s$ (и потому $x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$) форма I приобретает особенно простой вид:

$$I = x(v)^2 du^2 + dv^2.$$

В частности, мы получаем, что *первая квадратичная форма сферы радиуса 1 имеет вид*

$$(36) \quad I = \cos^2 v du^2 + dv^2.$$

Опыт картографов показывает, что никакую, даже малую, часть сферы нельзя изогнуть на плоскость. Это означает, что никаким преобразованием координат форму (36) нельзя превратить в форму (35). Но как это доказать? Ответ мы дадим в лекции 5.

Пример 7. Линия провеса тяжелой однородной нити называется *цепной линией*, а поверхность вращения, профилем которой служит цепная линия, — *катеноидом*.

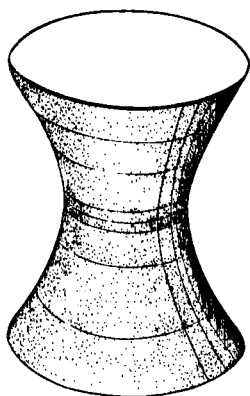
В механике (статике) показывается, что цепная линия является графиком гиперболического косинуса. Таким образом, для катеноида $x(v) = \operatorname{ch} v$, $z(v) = v$ и, значит,

$$x(v)^2 = \operatorname{ch}^2 v \quad \text{и} \quad x'(v)^2 + z'(v)^2 = \operatorname{sh}^2 v + 1 = \operatorname{ch}^2 v.$$

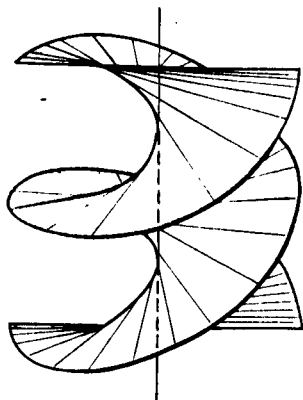
Таким образом, для катеноида

$$(37) \quad I = \operatorname{ch}^2 v (du^2 + dv^2).$$

Пример 8. Пусть прямая, перпендикулярная оси Oz , равномерно вращается около нее, оставаясь ей перпендикулярной и одновременно поднимаясь винтовым движением (на высоту, пропорциональную углу поворота). Линейчатая поверхность, заметаемая этой прямой, называется *геликоидом*. Она имеет вид винтового пандуса для въезда автомашин.



Катеноид



Геликоид

Если v — параметр на прямой, а u — угол поворота, то геликоид будет иметь уравнение

$$\mathbf{r} = v \cos u \cdot \mathbf{i} + v \sin u \cdot \mathbf{j} + u \cdot \mathbf{k}.$$

Поэтому

$$\mathbf{r}_u = -v \sin u \cdot \mathbf{i} + v \cos u \cdot \mathbf{j} + \mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_v = \cos u \cdot \mathbf{i} + \sin u \cdot \mathbf{j}$$

и, значит,

$$E = 1 + v^2, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

Таким образом, для геликоида

$$I = (1 + v^2) du^2 + dv^2.$$

Преобразуем эту форму, введя новые координаты u_1 , v_1 , связанные с координатами u , v формулами

$$u = u_1, \quad v = \operatorname{sh} v_1.$$

Тогда

$$1 + v^2 = 1 + \operatorname{sh}^2 v_1 = \operatorname{ch}^2 v_1,$$

$$du = du_1, \quad dv = \operatorname{ch} v_1 dv_1,$$

и поэтому (мы опускаем индексы у новых координат)

$$I = ch^2 v (du^2 + dv^2),$$

что совпадает с формой (37).

Этим доказано, что *катеноид и геликоид локально изометричны* (точнее, взрезанный по меридиану катеноид изометричен части $0 < u < 2\pi$ геликоида), причем существует изометрия, переводящая меридианы катеноида в прямолинейные образующие геликоида.

Пример 9. Для произвольной линейчатой поверхности

$$(38) \quad r = \rho(u) + va(u),$$

где (см. выше пример 3) $\rho = \rho(u)$ — регулярная кривая, отнесенная к натуральному параметру, а $a(u)$ — такая вектор-функция, что $|a(u)| = 1$ для всех u , мы, обозначая дифференцирование по u точкой, будем иметь

$$r_u = \dot{\rho} + v\dot{a}, \quad r_v = a.$$

Так как $\dot{\rho}^2 = 1$, а $a^2 = 1$ и $a\dot{a} = 0$, то

$$E = 1 + 2v\dot{\rho}\dot{a} + v^2\dot{a}^2, \quad F = \dot{\rho}a, \quad G = 1.$$

Если, в частности, $a = \dot{\rho}$ (поверхность касательных), то $\dot{\rho}a = a^2 = 1$ (т. е. $F = 1$), а $\dot{\rho}\dot{a} = 0$ и $\dot{a}^2 = k^2$, где k — кривизна кривой $\rho = \rho(u)$ (т. е. $E = 1 + k^2v^2$). Таким образом, для поверхности касательных

$$(39) \quad I = (1 + k^2v^2) du^2 + 2du dv + dv^2.$$

Если же $a(u)$ есть вектор бинормали кривой $\rho = \rho(u)$, то $\dot{\rho}a = 0$, $\dot{\rho}\dot{a} = 0$ и $\dot{a}^2 = \kappa^2$, где κ — кручение кривой $\rho = \rho(u)$. Следовательно, для поверхности бинормалей

$$I = (1 + \kappa^2v^2) du^2 + dv^2.$$

Мы видим, таким образом, что первая квадратичная форма поверхности касательных зависит только от кривизны данной кривой, а первая квадратичная форма поверхности бинормалей — только от ее кручения.

В отношении поверхности касательных отсюда вытекает, что *каждая поверхность касательных локально изометрична плоскости*. Действительно, рассмотрим плоскую кривую с той же самой кривизной $k = k(u)$ (такая кривая существует в силу общей теоремы 1 лекции 2). Первая

квадратичная форма поверхности касательных этой кривой будет той же формой (39). Но, с другой стороны, ясно, что поверхность касательных плоской кривой является—вне ее особых точек—областью на плоскости. Поэтому существует замена координат, переводящая первую квадратичную форму $dx^2 + dy^2$ плоскости в форму (39). (Эта замена координат имеет вид

$$x = x(u) + x'(u)v, \quad y = y(u) + y'(u)v,$$

где $x(u)$ и $y(u)$ —такие функции, что $x'(u)^2 + y'(u)^2 = 1$ и $x''(u)^2 + y''(u)^2 = k(u)^2$.) \square

Эту изометрию можно осуществить непрерывным изгибанием, постепенно деформируя кривую $\rho = \rho(u)$ в плоскую кривую.

На этом основании поверхности касательных называются *развертывающимися поверхностями* (подразумевается—на плоскость).

В случае, когда $a(u) = \rho(u)$ поверхность (38) является конусом с вершиной в начале координат (а кривая $\rho = \rho(u)$ представляет собой его пересечение с единичной сферой $|\rho| = 1$). В этом случае имеют место равенства

$$\dot{\rho}\dot{a} = \dot{\rho}^2 = 1, \quad \dot{a}^2 = 1, \quad \dot{\rho}a = 0,$$

откуда для первой квадратичной формы получается выражение

$$I = (1 + v)^2 du^2 + dv^2.$$

Здесь напрашивается замена координат $(u, v) \mapsto (u, 1 + v)$, переводящая эту форму в чуть более простую форму

$$(40) \quad I = v^2 du^2 + dv^2.$$

Введем теперь новые координаты

$$x = v \cos u, \quad y = v \sin u.$$

Тогда

$$dx = -v \sin u du + \cos u dv,$$

$$dy = v \cos u du + \sin u dv,$$

и потому

$$dx^2 + dy^2 = v^2 du^2 + dv^2.$$

Этим доказано, что конус также локально изометричен плоскости (точнее, каждая пола конуса, разрезанная по образующей, изометрична некоторому плоскому сектору;

факт наглядно очевидный). По этой причине конусы также причисляются к развертывающимся поверхностям.

Заметим, что форма (10) есть не что иное, как первая квадратичная форма плоскости, отнесенной к полярным координатам $r = v$ и $\varphi = u$.

Наконец, если вектор $\mathbf{a}(u)$ постоянен (и потому $\dot{\mathbf{a}} = 0$), то поверхность (38) является цилиндром. Без ограничения общности можно считать, что его направляющая $\rho = \rho(u)$ является плоской кривой, плоскость которой ортогональна вектору \mathbf{a} (и, значит, $\rho\mathbf{a} = 0$ и $\dot{\rho}\mathbf{a} = 0$). Поэтому, как и для кругового цилиндра (пример 3),

$$I = du^2 + dv^2.$$

На этом основании к развертывающимся поверхностям причисляются также и все цилиндры.

В лекции 4 мы покажем, что среди линейчатых поверхностей только развертывающиеся поверхности (т. е. цилиндры, конусы и поверхности касательных) локально изометричны плоскости, а в лекции 5 — что развертывающиеся поверхности исчерпывают вообще все поверхности трехмерного пространства, локально изометричные плоскости.