Лекция 4

Вектор нормали.— Поверхность как график функции.— Нормальные сечения.— Вторая квадратичная форма поверхности.— Индикатриса Дюпена.— Главные, полная и средняя кривизны.— Вторая квадратичная форма графика.— Линейчатые поверхности нулевой кривизны.— Поверхности вращения.

В этой лекции мы более внимательно рассмотрим поверхности в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве. Как правило, мы будем изучать поверхности лишь локально, т. е. в достаточно малых окрестностях их точек. Поэтому без ограничения общности все рассматриваемые поверхности мы можем считать элементарными.

Итак, пусть $\mathscr{X}$ — произвольная элементарная поверхность в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве $\mathscr{A}$, и пусть $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — ее произвольная параметризация. Тогда в каждой точке $p\in\mathscr{X}$ существует единственный вектор $\boldsymbol{n}$ единичной длины, перпендикулярный касательной плоскости и составляющий вместе с векторами $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ положительно ориентированный базис пространства. Этот вектор задается формулой

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}$$

и называется *вектором нормали* к поверхности $\mathscr{X}$ в точке p (а базис $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ называется *сопровождающим базисом* поверхности). См. рисунок на стр. 51.

По определению квадрат длины $|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|^2$ векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, т. е. равен (см. лекцию I.15) определителю Грама $\Gamma(\boldsymbol{r}_u, \boldsymbol{r}_v)=EG-F^2$ векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Следовательно,

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}\,.$$

По этой формуле вектор $\boldsymbol{n}$ обычно на практике и вычисляется.

Выбрав в $\mathscr{A}$ прямоугольные координаты x, y, z с началом O в точке p и осью Oz, направленной по вектору $\boldsymbol{n}$, рассмотрим якобиеву матрицу

$$\begin{Vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{Vmatrix},$$

строками которой являются координаты векторов $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$. Условие, наложенное на ось Oz, означает, в частности, что

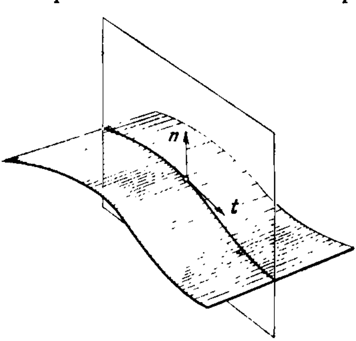
$$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = 1.$$

Поэтому, согласно известной из анализа теореме об обратном отображении, в некоторой окрестности точки (0, 0) координаты x и y могут быть выражены через координаты u и v. Подставив эти выражения в вектор-функцию $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$, мы получим параметризацию поверхности $\mathscr{X}$ (или точнее — некоторой ее части, содержащей точку p) вида

$$x = x,$$
$$y = y,$$
$$z = z(x, y).$$

По определению это означает, что *локально* (в окрестности точки p) *поверхность $\mathscr{X}$ является графиком функции $z = z(x, y)$*.

Каждая плоскость П, проходящая через ось Oz рассматриваемой системы координат, называется *нормальной плоскостью* поверхности $\mathscr{X}$ в точке p, а ее пересечение $\Pi \cap \mathscr{X}$ с поверхностью $\mathscr{X}$ — *нормальным сечением* этой поверхности в точке p. Направляющий бивектор каждой нормальной плоскости П имеет вид $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{t}$ — некоторый, определенный с точностью до пропорциональности ненулевой касательный вектор поверхности $\mathscr{X}$ в точке p (вектор пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$). Вектор $\boldsymbol{t}$ однозначно определяет нормальную плоскость П, и мы будем обозначать ее символом Π_t.



Нормальное сечение

Если координаты x, y, z выбраны так, что вектор $\boldsymbol{t}$ направлен по оси Ox, то нормальная плоскость Π_t будет координатной плоскостью Oxz, а нормальное сечение $\mathscr{L}_t = \Pi \cap \mathscr{X}$ будет иметь уравнение $z = z(x, 0)$ (в координатах x, z на плоскости Oxz). Это доказывает, что каждое нормальное сечение локально (в некоторой окрестности точки p) является графиком и, значит, простой регулярной дугой.

Касательная к графику $z = z(x, 0)$ лежит, конечно, в касательной плоскости к поверхности $z = z(x, y)$ и одновременно принадлежит нормальной плоскости. Поэтому она направлена по вектору $\boldsymbol{t}$, т. е. касательный вектор к нормальному сечению в точке p пропорционален вектору $\boldsymbol{t}$.

Поскольку вектор $\boldsymbol{t}$ определен нормальным сечением только с точностью до пропорциональности, мы без ограничения общности можем считать его ортом (вектором единичной длины). Отнеся нормальное сечение к натуральному параметру, мы поэтому можем считать, что орт $\boldsymbol{t}$ является касательным вектором к нормальному сечению в точке p.

Рассматривая нормальное сечение как кривую на плоскости Π_t, мы можем говорить об ее относительной кривизне $k_{\text{отн}}$ в точке p по отношению к ориентации плоскости Π_t, задаваемой бивектором $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}$. Обозначив эту кривизну символом $k(\boldsymbol{t})$, мы определим тем самым на ортах касательного пространства $\mathsf{T}_p(\mathscr{X})$ некоторую функцию $\boldsymbol{t} \mapsto k(\boldsymbol{t})$. Найдем выражение этой функции через координаты вектора $\boldsymbol{t}$.

Пусть

$$u = u(s), \quad v = v(s), \quad |s| < s_0, \tag{1}$$

— параметрические уравнения нормального сечения $\mathscr{L}_t$ на поверхности $\mathscr{X}$, где s — натуральный параметр, отсчитываемый от точки p. Как кривая в пространстве сечение $\mathscr{L}_t$ имеет векторное параметрическое уравнение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u(s), v(s))$, и, значит, ее касательный вектор $\dot{\boldsymbol{r}}$ выражается формулой

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r}_u \dot{u} + \boldsymbol{r}_v \dot{v}, \tag{2}$$

где, как всегда, $\dot{u}$ и $\dot{v}$ — производные по s функций (1).

Производная $\ddot{\boldsymbol{r}}$ вектора (2) ортогональна ему и при $s=0$ параллельна плоскости Π_t. Поэтому при $s=0$ она пропорциональна вектору $\boldsymbol{n}$. Соответствующий коэффициент пропорциональности (равный скалярному произведению $\ddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{n}$) является (см. в лекции 2 определение относительной кривизны) не чем иным, как относительной кривизной $k(\boldsymbol{t})$. Таким образом,

$$k(\boldsymbol{t})=\ddot{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

Поскольку

$$\begin{aligned}\ddot{\boldsymbol{r}}&=\dot{\boldsymbol{r}}_u\dot{u}+\boldsymbol{r}_u\ddot{u}+\dot{\boldsymbol{r}}_v\dot{v}+\boldsymbol{r}_v\ddot{v}=\\&=(\boldsymbol{r}_{uu}\dot{u}+\boldsymbol{r}_{uv}\dot{v})\dot{u}+(\boldsymbol{r}_{uv}\dot{u}+\boldsymbol{r}_{vv}\dot{v})\dot{v}+\boldsymbol{r}_u\ddot{u}+\boldsymbol{r}_v\ddot{v}=\\&=\boldsymbol{r}_{uu}\dot{u}^2+2\boldsymbol{r}_{uv}\dot{u}\dot{v}+\boldsymbol{r}_{vv}\dot{v}^2+\boldsymbol{r}_u\ddot{u}+\boldsymbol{r}_v\ddot{v}\end{aligned}$$

и $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}=0$, $\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}=0$, этим доказано, что

$$k(\boldsymbol{t})=L\dot{u}^2+2M\dot{u}\dot{v}+N\dot{v}^2,$$

где

$$L=\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n},\quad M=\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n},\quad N=\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}. \tag{4}$$

Функцию $\boldsymbol{t}\mapsto k(\boldsymbol{t})$ удобно распространить на всевозможные касательные векторы $d\boldsymbol{r}\neq 0$, полагая по определению

$$k(d\boldsymbol{r})=k\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|}\right).$$

Так как $|d\boldsymbol{r}|^2=d\boldsymbol{r}^2=ds^2$, где

$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

(см. формулу (28) лекции 3), а координаты $\dot{u}$ и $\dot{v}$ вектора $\frac{d\boldsymbol{r}}{|d\boldsymbol{r}|}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}$ равны $\frac{du}{ds}$ и $\frac{dv}{ds}$, то

$$k(d\boldsymbol{r})=\frac{L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2}{E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2}. \tag{5}$$

[Заметим, что равенства $\dot{u}=\frac{du}{ds}$ и $\dot{v}=\frac{dv}{ds}$ формально совпадают с известными из анализа равенствами для производных как отношений дифференциалов. Однако у нас их содержательный смысл иной, поскольку du и dv являются не дифференциалами, а координатами касательного вектора $d\boldsymbol{r}$, а ds — его длиной.]

Определение 1. Квадратичная форма

$$L\,du^2+2M\,du\,dv+N\,dv^2$$

называется *второй квадратичной формой* поверхности $\mathscr{X}$. Обозначается она символом $\mathbf{II}$.

В этих обозначениях формула (5) записывается в следующем удобном для запоминания виде:

$$k=\frac{\mathbf{II}}{\mathbf{I}}. \tag{6}$$

Для коэффициентов формы $\mathbf{II}$, кроме формул (4), имеют место также формулы

$$L=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u, \quad M=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v=-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u, \quad N=-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v. \tag{7}$$

Действительно, так как $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}=0$, то $\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u=0$ и $\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v=0$, т. е. $L=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u$ и $M=-\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_v$. Аналогично, так как $\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}=0$, то $\boldsymbol{r}_{vu}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u=0$ и $\boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}+\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v=0$, т. е. $M=-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u$ и $N=-\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_v$. $\square$

В силу этих формул форму $\mathbf{II}$ можно, введя вектор

$$d\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_u\,du+\boldsymbol{n}_v\,dv, \tag{8}$$

записать в виде

$$\mathbf{II}=-d\boldsymbol{r}\,d\boldsymbol{n},$$

аналогичном записи $\mathbf{I}=d\boldsymbol{r}^2$ для формы $\mathbf{I}$.

Замечание 1. По аналогии можно ввести также *третью квадратичную форму* $\mathbf{III}=d\boldsymbol{n}^2$. Однако, как мы ниже покажем, она линейно выражается через формы $\mathbf{I}$ и $\mathbf{II}$ и потому не дает ничего нового.

Для обозначения коэффициентов L, M, N формы $\mathbf{II}$ используют также символы D, D', D''.

Для наглядного представления функции $\boldsymbol{t}\mapsto k(\boldsymbol{t})$ французский математик Дюпен предложил рассматривать на касательной плоскости кривую (ныне она называется *индикатрисой Дюпена*), которая получается, если для любого единичного касательного вектора $\boldsymbol{t}$ отложить от точки касания p (принимаемой за начало координат O на касательной плоскости) в направлении этого вектора отрезок длины $|k(\boldsymbol{t})|^{-1/2}$. Обозначим через x и y координаты (в координатной системе $O\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v$) концевой точки этого отрезка; тогда его длина будет выражаться (в понятных обозначениях) формулой

$$|x\boldsymbol{r}_u+y\boldsymbol{r}_v|=\sqrt{\mathbf{I}(x,\ y)}.$$

Поскольку кривизна $k(\boldsymbol{t})$ выражается формулой (6), которая в теперешних обозначениях имеет вид

$$k(\boldsymbol{t})=\frac{\mathbf{II}(x,\ y)}{\mathbf{I}(x\ y)},$$

отсюда для индикатрисы Дюпена получается уравнение

$$\sqrt{\mathrm{I}(x, y)} = \sqrt{\frac{\mathrm{I}(x, y)}{\mathrm{II}(x, y)}},$$

т. е. уравнение

$$|\mathrm{II}(x, y)| = 1.$$

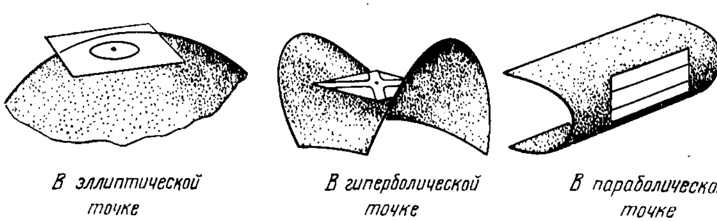
Этим доказано, что *индикатриса Дюпена является кривой с уравнением*

$$|Lx^2 + 2Mxy + Ny^2| = 1.$$

При $LN - M^2 > 0$ эта кривая (точнее, множество ее вещественных точек, которым мы только и интересуемся) представляет собой эллипс с уравнением

$$(9) \qquad Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \varepsilon,$$

где $\varepsilon = +1$, если $L > 0$, и $\varepsilon = -1$, если $L < 0$. В соответствии с этим точка поверхности, в которой $LN - M^2 > 0$, называется *эллиптической*.



Индикатриса Дюпена

В эллиптической точке все кривизны $k(\boldsymbol{t})$ имеют один и тот же знак (совпадающий со знаком L). Среди них есть одна наибольшая k_1 и одна наименьшая k_2 (если только все они не совпадают, т. е. если индикатриса Дюпена не является окружностью), отвечающие направлениям малой и большой осей эллипса (9).

При $LN - M^2 < 0$ индикатриса Дюпена состоит из двух гипербол

$$(10) \qquad Lx^2 + 2Mxy + Ny^2 = \pm 1$$

с общими асимптотами, и потому точка поверхности, в которой $LN - M^2 < 0$ называется *гиперболической*. В направлении действительной оси одной из гипербол (10) кривизна $k(\boldsymbol{t})$ достигает своего наибольшего значения $k_1 > 0$. При вращении вектора $\boldsymbol{t}$ она сначала уменьшается до нуля, когда вектор t приобретает асимптотическое направление, а затем, по-прежнему уменьшаясь, достигает своего наименьшего значения $k_2 < 0$, когда направление вектора t совпадает с направлением действительной оси другой гиперболы (т. е. с направлением мнимой оси первой гиперболы).

При $LN - M^2 = 0$ точка поверхности называется *параболической.* В такой точке индикатриса Дюпена имеет уравнение

$$(\sqrt{|L|}\,x + \sqrt{|N|}\,y)^2 = 1 \tag{11}$$

и потому представляет собой пару параллельных прямых (если только $L \neq 0$ или $N \neq 0$). В направлении этих прямых кривизна $k(t)$ равна нулю, в перпендикулярном направлении достигает наибольшего (по абсолютной величине) значения, сохраняя все время один и тот же знак. Если же $L = 0$, $N = 0$ (и потому $M = 0$), то кривизна $k(t)$ тождественно по t равиа нулю (а индикатриса Дюпена не определена).

Заметим, что в эллиптических и параболических точках индикатриса Дюпена является кривой второго порядка, а в гиперболических точках — четвертого порядка.

В каждом из трех случаев функция $k(t)$ *дважды* достигает своего наибольшего значения k_1 и наименьшего значения k_2 (если только она не равна тождественно нулю).

Задача 1. Докажите, что

$$k(t) = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi,$$

где φ — угол, образованный вектором t с направлением, в котором кривизна равна k_1. Эта формула известна как формула Эйлера.

Определение 2. Числа k_1 и k_2 называются *главными кривизнами* поверхности в рассматриваемой точке. Их произведение

$$K = k_1 k_2$$

называется *полной* (*или гауссовой*) *кривизной*, а их полусумма

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

— *средней кривизной.*

Согласно сказанному выше в эллиптической точке $K > 0$, в гиперболической точке $K < 0$ и в параболической точке $K = 0$.

Подчеркнем, что H и K зависят от точки $p \in \mathscr{X}$, т. е. являются функциями на $\mathscr{X}$. Как функции локальных координат эти функции гладки.

Чтобы найти главные кривизны, можно было бы искать главные направления кривых второго порядка (9) и (10) (для кривой (11) проблемы нет) и затем найти их канонические уравнения. К сожалению, этот путь приводит к длинным выкладкам из-за того, что координаты x и y не прямоугольны. Поэтому мы поступим по-иному, обратившись непосредственно к основной формуле (6).

Согласно этой формуле кривизна k_2 является наименьшим значением функции

$$\frac{\mathrm{II}(x, y)}{\mathrm{I}(x, y)} = \frac{Lx^2 + 2Mxy + Ny^2}{Ex^2 + 2Fxy + Gy^2}$$

двух переменных x и y при $(x, y) \neq (0, 0)$. Поэтому

$$\frac{\mathrm{II}(x, y)}{\mathrm{I}(x, y)} \geqslant k_2$$

для всех $(x, y) \neq (0, 0)$, причем хотя бы в одной точке (x, y) равенство достигается. Поскольку $\mathrm{I}(x, y) > 0$ при $(x, y) \neq (0, 0)$, это неравенство равносильно неравенству

$$\mathrm{II}(x, y) - k_2 \mathrm{I}(x, y) \geqslant 0,$$

означающему, что квадратичная форма $\mathrm{II} - k_2 \mathrm{I}$ с матрицей

$$\begin{Vmatrix} L - k_2 E & M - k_2 F \\ M - k_2 F & N - k_2 G \end{Vmatrix}$$

во всех точках $(x, y) \neq (0, 0)$ неотрицательна и хотя бы в одной из этих точек равна нулю.

Аналогичным образом число k_1 характеризуется тем, что квадратичная форма $\mathrm{II} - k_1 \mathrm{I}$ всюду положительна и хотя бы в одной точке $(x, y) \neq (0, 0)$ равна нулю.

Но легко видеть (непосредственно или на основе общей теории квадратичных форм над полем $\mathbb{R}$; см. лекцию II.12), что *квадратичная форма от двух переменных тогда и только тогда всюду неположительна или неотрицательна и хотя бы в одной точке* $(x, y) \neq (0, 0)$ *равна нулю, когда ее ранг меньше двух, т. е. когда определитель ее матрицы равен нулю.*

Этим доказано, что *главные кривизны* k_1, k_2 *являются корнями уравнения*

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. уравнения

$$(EG-F^2)k^2-(EN+GL-2FM)k+(LN-M^2)=0.$$

В силу формул Виета отсюда, в частности, следует, что

$$K=\frac{LN-M^2}{EG-F^2}, \quad H=\frac{1}{2}\frac{EN+GL-2FM}{EG-F^2}.$$

Первая из этих формул получит важное применение в следующей лекции.

Предположим, что координаты x, y, z в пространстве $\mathcal{A}$ выбраны так, что рассматриваемая поверхность является графиком функции $z=z(x, y)$, причем $z(0, 0)=0$ и вектором нормали в точке $(0, 0)$ является единичный вектор $\boldsymbol{k}$ оси Oz (см. выше).

Тогда x и y являются в окрестности точки $(0, 0)$ координатами u и v на поверхности, причем

$$\boldsymbol{r}_u=(1, 0, z_x), \quad \boldsymbol{r}_v=(0, 1, z_y).$$

Поскольку в точке $(0, 0)$ векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ параллельны по условию координатной плоскости Oxy, отсюда следует, что

$$(z_x)_0=0 \quad и \quad (z_y)_0=0$$

(индексом 0 мы помечаем значения частных производных в точке $(0, 0)$) и, значит, разложение функции $z(x, y)$ в ряд Тейлора начинается с членов второй степени:

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\ldots,$$

где

$$r=(z_{xx})_0, \quad s=(z_{xy})_0, \quad t=(z_{yy})_0$$

(обозначения Монжа).

С другой стороны, так как

$$\boldsymbol{r}_{uu}=(0, 0, z_x), \quad \boldsymbol{r}_{uv}=(0, 0, z_{xy}), \quad \boldsymbol{r}_{vv}=(0, 0, z_{yy}),$$

то в точке $(0, 0)$

$$L=r, \quad M=s, \quad N=t.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае *вторая квадратичная форма поверхности лишь постоянным множителем* 1/2 *отличается от суммы* $z_2(x, y)$ *членов второй степени в ряде Тейлора функции* $z(x, y)$.

Поскольку вблизи точки $(0, 0)$ поверхность $z=z(x, y)$ мало отличается от поверхности $z=z_2(x, y)$ и поскольку при $rt-s^2>0$ последняя поверхность является эллиптическим параболоидом, а при $rt-s^2<0$ — гиперболическим параболоидом, тем самым доказано, что *вблизи эллиптической точки произвольная поверхность мало отличается от эллиптического параболоида, а вблизи гиперболической точки — от гиперболического параболоида.*

Это дает вполне удовлетворительное представление о поведении поверхности вблизи непараболических точек.

В случае, когда $rt-s^2=0$, но либо $r\neq 0$, либо $s\neq 0$, поверхность $z=z_2(x, y)$ является параболическим цилиндром. Поэтому *вблизи параболической точки, для которой либо $L\neq 0$, либо $N\neq 0$, поверхность мало отличается от параболического цилиндра.*

Об устройстве же поверхности вблизи параболической точки, в которой $L=0$ и $N=0$ (а значит, и $M=0$), ничего определенного сказать нельзя; вообще говоря, оно может быть очень сложным.

Произведенные вычисления показывают также, что в точке $(0, 0)$ для рассматриваемой поверхности имеют место равенства $E=1$, $F=0$ и $G=0$, откуда следует, что в этой точке

$$K=rt-s^2 \quad \text{и} \quad H=\frac{r+t}{2}.$$

Кроме того, автоматическая выкладка (которую можно произвести в уме, если заметить, что для функций f и g, обладающих тем свойством, что $f(0)=0$ и $g(0)=1$, производная $(fg)'$ их произведения fg принимает в нуле значение $f'(0)$) показывает, что в точке $(0, 0)$

$$\boldsymbol{n}_u=(-r,\ -s,\ 0), \quad \boldsymbol{n}_v=(-s,\ -t,\ 0),$$

и, значит,

$$\boldsymbol{n}_u^2=r^2+s^2, \quad \boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v=s(r+t), \quad \boldsymbol{n}_v^2=s^2+t^2.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{n}_u^2=2HL-KE, \quad \boldsymbol{n}_u\boldsymbol{n}_v=2HM-KF, \quad \boldsymbol{n}_v^2=2HN-KG,$$

т. е. что

$$\mathrm{III}=2H\mathrm{II}-K\mathrm{I},$$

где **III** — введенная в замечании 1 третья квадратичная форма поверхности. Таким образом, форма **III** действительно линейно выражается через формы **I** и **II**.

Для линейчатой поверхности

$$\text{(12)} \qquad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho}(u) + v\boldsymbol{a}(u),$$

как мы уже знаем,

$$E = 1 + 2v\dot{\boldsymbol{\rho}}\dot{\boldsymbol{a}} + v^2\dot{\boldsymbol{a}}^2, \quad F = \dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}, \quad G = 1$$

(как всегда, мы предполагаем, что параметр u на кривой $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(u)$ натурален, а вектор $\boldsymbol{a}(u)$ единичен). Далее,

$$\boldsymbol{r}_u = \dot{\boldsymbol{\rho}} + v\dot{\boldsymbol{a}}, \quad \boldsymbol{r}_v = \boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v = \dot{\boldsymbol{\rho}} \times \boldsymbol{a} + v(\dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{a}),$$

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \boldsymbol{a} + v(\dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{a})}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$\boldsymbol{r}_{uu} = \ddot{\boldsymbol{\rho}} + v\ddot{\boldsymbol{a}}, \quad \boldsymbol{r}_{uv} = \dot{\boldsymbol{a}}, \quad \boldsymbol{r}_{vv} = 0,$$

$$L = \frac{(\ddot{\boldsymbol{\rho}} + v\ddot{\boldsymbol{a}})(\dot{\boldsymbol{\rho}} \times \boldsymbol{a} + v(\dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{a}))}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad M = \frac{\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad N = 0,$$

$$LN - M^2 = -\frac{(\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}})^2}{EG - F^2},$$

и потому

$$K = -\frac{(\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}})^2}{(EG - F)^2} \leqslant 0.$$

Таким образом, полная кривизна произвольной линейчатой поверхности в любой ее точке неположительна, т. е. *линейчатая поверхность не имеет эллиптических точек.*

В случае, когда поверхность является цилиндром ($\dot{\boldsymbol{a}} = 0$), конусом ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\rho}$ и потому $\dot{\boldsymbol{a}} = \dot{\boldsymbol{\rho}}$) или поверхностью касательных ($\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{\rho}}$), из полученной формулы следует, что $K = 0$. Таким образом, *полная кривизна каждой развертывающейся поверхности равна нулю* (в любой ее точке).

Обратно, если $K = 0$, то $\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}} = 0$, т. е. векторы $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, $\boldsymbol{a}$, $\dot{\boldsymbol{a}}$ компланарны. Если вектор $\dot{\boldsymbol{a}}(u)$ не равен тождественно нулю, т. е. если поверхность (12) не является цилиндром, то, перейдя, если нужно, к меньшей окрестности, мы можем считать, что $\dot{\boldsymbol{a}}(u) \neq \boldsymbol{0}$ для всех u. Поэтому векторы $\boldsymbol{a}$ и $\dot{\boldsymbol{a}}$ линейно независимы (они отличны от нуля и ортогональны), и, следовательно, вектор $\dot{\boldsymbol{\rho}}$ через них линейно выражается:

$$\dot{\boldsymbol{\rho}} = \lambda\boldsymbol{a} + \mu\dot{\boldsymbol{a}},$$

где $\lambda = \lambda(u)$ и $\mu = \mu(u)$ — некоторые функции от u.

Пусть

$$u_1=u, \quad v_1=v+\mu(u).$$

Поскольку якобиан этого преобразования равен 1, числа u_1 и v_1 также являются—после, возможно, перехода к меньшей окрестности—координатами на поверхности (12). В этих координатах уравнение поверхности имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\rho}_1(u)+v\boldsymbol{a}(u)$$

(мы убираем у u_1 и v_1 индексы), где

$$\boldsymbol{\rho}_1(u)=\boldsymbol{\rho}(u)-\mu(u)\boldsymbol{a}(u),$$

и потому

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}_1=\dot{\boldsymbol{\rho}}-\dot{\mu}\boldsymbol{a}-\mu\dot{\boldsymbol{a}}=(\lambda-\dot{\mu})\boldsymbol{a}.$$

Если $\dot{\boldsymbol{\rho}}_1=0$ тождественно (т. е. $\lambda=\dot{\mu}$), то уравнение поверхности имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\text{const}+v\boldsymbol{a}(u),$$

и потому эта поверхность является конусом. В противном случае мы можем считать, опять уменьшая, если нужно, окрестность, что $\dot{\boldsymbol{\rho}}_1(u)\neq 0$ для всех u. Переходя тогда к натуральному параметру (и меняя, если нужно, знак у v), мы получим, что $\dot{\boldsymbol{\rho}}_1=\boldsymbol{a}$, т. е. что рассматриваемая поверхность является поверхностью касательных.

Тем самым доказано следующее предложение:

Предложение 1. *Линейчатая поверхность тогда и только тогда имеет в каждой точке нулевую полную кривизну:*

$$K=0,$$

когда она является развертывающейся поверхностью. □

Одновременно мы установили, что развертывающиеся поверхности характеризуются условием

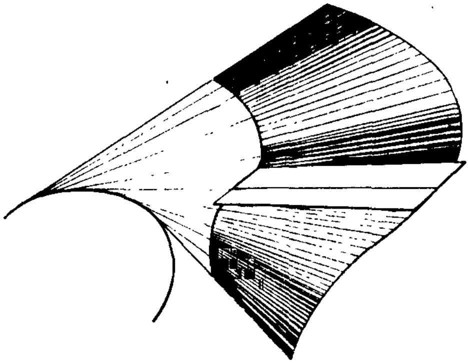
$$\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}}=0,$$

которое, как легко видеть, равносильно коллинеарности векторов $\dot{\boldsymbol{\rho}}\times\boldsymbol{a}$ и $\dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{a}$. Но коллинеарность этих векторов означает, что вектор

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v=\dot{\boldsymbol{\rho}}\times\boldsymbol{a}+v(\dot{\boldsymbol{a}}\times\boldsymbol{a})$$

с точностью до пропорциональности не зависит от v, т. е. не зависит от v соответствующий единичный вектор $\boldsymbol{n}$. Этим доказано, что *развертывающиеся поверхности выде-*

ляются среди всех линейчатых поверхностей тем свойством, что во всех точках каждой прямолинейной образующей такой поверхности касательная плоскость одна и та же.



Развертывающаяся поверхность касательных

Для произвольной поверхности вращения

$$\boldsymbol{r} = x(v)\cos u\cdot\boldsymbol{i} + x(v)\sin u\cdot\boldsymbol{j} + z(v)\cdot\boldsymbol{k}$$

мы имеем

$$\boldsymbol{r}_u = -x(v)\sin u\cdot\boldsymbol{i} + x(v)\cos u\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{r}_v = x'(v)\cos u\cdot\boldsymbol{i} + x'(v)\sin u\cdot\boldsymbol{j} + z'(v)\boldsymbol{k},$$

и, значит, $E = x(v)^2$, $F = 0$, $G = 1$ (мы предполагаем, что $x'(v)^2 + z'(v)^2 = 1$; см. лекцию 3). Поэтому

$$\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v = x(v)z'(v)\cos u\cdot\boldsymbol{i} + x(v)z'(v)\sin u\cdot\boldsymbol{j} - x(v)x'(v)\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{n} = z'(v)\cos u\cdot\boldsymbol{i} + z'(v)\sin u\cdot\boldsymbol{j} - x'(v)\boldsymbol{k};$$
$$\boldsymbol{r}_{uu} = -x(v)\cos u\cdot\boldsymbol{i} - x(v)\sin u\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{r}_{uv} = -x'(v)\sin u\cdot\boldsymbol{i} + x'(v)\cos u\cdot\boldsymbol{j},$$
$$\boldsymbol{r}_{vv} = x''(v)\cos u\cdot\boldsymbol{i} + x''(v)\sin u\cdot\boldsymbol{j} + z''(v)\boldsymbol{k};$$
$$L = \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n} = -x(v)z'(v), \quad M = \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n} = 0,$$
$$N = \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n} = x''(v)z'(v) - z''(v)x'(v) = -\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v)\end{vmatrix},$$
$$\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{z'(v)}{x(v)}\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v)\end{vmatrix}.$$

Этим доказано, что для поверхности вращения

$$K = \frac{z'(v)}{x(v)}\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v)\end{vmatrix}.$$

Пример 1. Для сферы радиуса R мы имеем

$$x(v)=R\cos\frac{v}{R},\quad z(v)=R\sin\frac{v}{R},$$

и потому

$$x'(v)=-\sin\frac{v}{R},\qquad z'(v)=\cos\frac{v}{R},$$

$$x''=-\frac{1}{R}\cos\frac{v}{R},\quad z''(v)=-\frac{1}{R}\sin\frac{v}{R},$$

$$K=\frac{z'(v)}{x(v)}\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v)\end{vmatrix}=\frac{1}{R^2}.$$

Таким образом, *полная кривизна сферы радиуса R постоянна и равна* $\frac{1}{R^2}$.

Результат наглядно очевиден.

Следующий пример более интересен.

Пример 2. Поверхность вращения с профилем

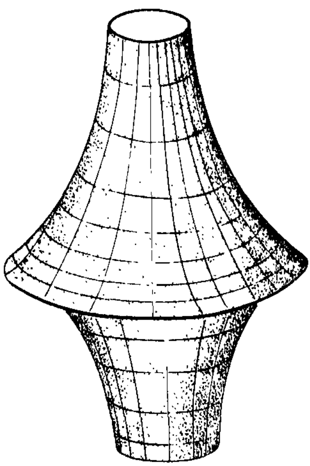
$$x(v)=R\sin v,$$
$$z(v)=R\left(\ln \operatorname{tg}\frac{v}{2}+\cos v\right),$$
$$0<v<\frac{\pi}{2},$$

(это — так называемая *трактриса*) называется *псевдосферой* (а число R называется ее *псевдорадиусом*). Для этой поверхности

$$x'(v)=R\cos v,$$
$$z'(v)=\frac{R}{\sin v}-R\sin v=R\frac{\cos^2 v}{\sin v},$$

и, значит,

$$x'(v)^2+z'(v)^2=R^2\operatorname{ctg}^2 v.$$



Псевдосфера

Так как $x'(v)^2+z'(v)^2\neq 1$, то полученная выше общая формула непосредственно непригодна и необходимо предварительно перейти к натуральному параметру профиля.

Имеем

$$s=-R\int_{\pi/2}^{v}\operatorname{ctg} v\,dv=-R\ln\sin v,$$

и, значит,

$$\sin v = e^{-\frac{s}{R}}, \quad \cos v = \sqrt{1 - e^{-2\frac{s}{R}}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = e^{\frac{s}{R}} - \sqrt{e^{\frac{s}{R}} - 1}.$$

Поэтому в натуральном параметре (который мы снова обозначим через v) трактриса будет задаваться функциями

$$x(v) = Re^{-\frac{v}{R}},$$
$$z(v) = R\ln\left(e^{\frac{v}{R}} - \sqrt{e^{2\frac{v}{R}} - 1}\right) + R\sqrt{1 - e^{-2\frac{v}{R}}}.$$

Вычисляем:

$$x'(v) = -e^{-\frac{v}{R}}, \quad z'(v) = -\sqrt{1 - e^{-2\frac{v}{R}}},$$
$$x''(v) = \frac{1}{R}e^{-\frac{v}{R}}, \quad z''(v) = -\frac{e^{-2\frac{v}{R}}}{R\sqrt{1 - e^{-2\frac{v}{R}}}},$$
$$\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix} = -\frac{e^{-\frac{v}{R}}}{R\sqrt{1 - e^{-2\frac{v}{R}}}},$$
$$\frac{z'(v)}{x(v)}\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix} = -\frac{1}{R^2}.$$

Таким образом,

$$K = -\frac{1}{R^2},$$

так что *полная кривизна псевдосферы постоянна и равна* $-\frac{1}{R^2}$.

Мы видим, что в отношении полной кривизны псевдосфера отличается от сферы только знаком кривизны. Этим и объясняется термин «псевдосфера».

Пример 3. Для катеноида

$$x(v) = \operatorname{ch} v, \quad z(v) = v,$$
$$x'(v) = \operatorname{sh} v, \quad z'(v) = 1,$$
$$x'(v)^2 + z'(v)^2 = \operatorname{ch}^2 v,$$

и потому мы опять должны перейти к натуральному параметру

$$s=\int_0^v \operatorname{ch} v\,dv=\operatorname{sh} v.$$

Обозначая этот параметр снова через v, мы получим функции

$$x(v)=\sqrt{1+v^2},\quad z(v)=\ln\left(v+\sqrt{1+v^2}\right).$$

Поэтому

$$x'(v)=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}},\qquad z'(v)=\frac{1}{\sqrt{1+v^2}},$$
$$x''(v)=\frac{1}{(1+v^2)^{3/2}},\qquad z''(v)=-\frac{v}{(1+v^2)^{3/2}},$$
$$\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v)\\ x''(v) & z''(v)\end{vmatrix}=-\frac{1}{1+v^2},$$

и, значит,

$$K=-\frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

Интересно сравнить кривизну катеноида с кривизной изометричного ему геликоида.

Для геликоида мы имеем уравнение (12) с

$$\boldsymbol{\rho}(u)=u\cdot\boldsymbol{k}\quad\text{и}\quad \boldsymbol{a}(u)=\cos u\cdot\boldsymbol{i}+\sin u\cdot\boldsymbol{j}.$$

Поэтому

$$\dot{\boldsymbol{\rho}}=\boldsymbol{k},\quad \dot{\boldsymbol{a}}=-\sin u\cdot\boldsymbol{i}+\cos u\cdot\boldsymbol{j},$$
$$E=1+2v\dot{\boldsymbol{\rho}}\dot{\boldsymbol{a}}+v^2\dot{\boldsymbol{a}}^2=1+v^2,$$
$$F=\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}=0,\quad G=1,$$
$$EG-F^2=1+v^2,$$
$$\dot{\boldsymbol{\rho}}\boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{a}}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1\\ \cos u & \sin u & 1\\ -\sin u & \cos u & 0\end{vmatrix}=1,$$

и, значит,

$$K=-\frac{1}{(1+v^2)^2}.$$

Мы получили тот же самый результат, что и для катеноида! Это означает, что *при изгибании катеноида на геликоид полные кривизны в соответственных точках совпадают.*

Что происходит со средней кривизной?

Для катеноида $E=1+v^2$, $F=0$, $G=1$. Кроме того,

$$L=-x(v)\,z'(v)=-1, \quad M=0,$$

$$N=-\begin{vmatrix} x'(v) & z'(v) \\ x''(v) & z''(v) \end{vmatrix}=\frac{1}{1+v^2},$$

и потому

$$EN+GL-2FM=0,$$

т. е.

$$H=0.$$

Таким образом, *средняя кривизна катеноида равна нулю.*

Для геликоида

$$\dot{\rho}\times a=\sin u\cdot \boldsymbol{i}-\cos u\cdot \boldsymbol{j}, \quad a\times a=-\boldsymbol{k},$$

$$\ddot{\rho}=0, \quad \ddot{a}=-\cos u\cdot \boldsymbol{i}-\sin u\cdot \boldsymbol{j},$$

$$(\ddot{\rho}+v\ddot{a})(\dot{\rho}\times a+v(\dot{a}\times a))=0$$

и, кроме того, как мы уже видели,

$$E=1+v^2, \quad F=0, \quad G=1,$$

$$EG-F^2=1+v^2, \quad \dot{\rho}a\dot{a}=0.$$

Поэтому

$$L=0, \quad M=\frac{1}{\sqrt{1+v^2}}, \quad N=0,$$

и, значит,

$$EN+LG-2FM=0,$$

т. е.

$$H=0.$$

Таким образом, *средняя кривизна геликоида также равна нулю*!

Пример катеноида и геликоида наводит на мысль, что при изгибании (изометрии) сохраняются полные и средние кривизны. Оказывается, что в отношении полной кривизны эта гипотеза справедлива (и мы покажем это в следующей лекции), тогда как в отношении средней кривизны это не так. Действительно, для плоскости средняя кривизна равна нулю, а для изгибающегося на плоскость кругового цилиндра радиуса R она равна, очевидно, $\frac{1}{2R}$.

Причины же того, почему у катеноида и геликоида оказались равные средние кривизны, мы лишены возможности здесь обсуждать.