Лекция 5

Деривационные формулы Вейнгартена.— Коэффициенты связности.— Теорема Гаусса.— Явная формула для гауссовой кривизны.— Необходимые и достаточные условия изометричности.— Поверхности постоянной кривизны.

Для сопровождающего базиса $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ произвольной поверхности

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v) \tag{1}$$

могут быть написаны формулы, аналогичные формулам Френе для кривых. Эти формулы дают разложение производных

$$\boldsymbol{r}_{uu}, \boldsymbol{r}_{uv}, \boldsymbol{r}_{vv}, \boldsymbol{n}_u, \boldsymbol{n}_v$$

векторов сопровождающего базиса по этому же базису.

Поскольку $\boldsymbol{n}^2=1$ и, следовательно, $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_u=0$, $\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}_v=0$, векторы $\boldsymbol{n}_u$ и $\boldsymbol{n}_v$ разлагаются только по векторам $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, так что

$$\boldsymbol{n}_u=\alpha\boldsymbol{r}_u+\beta\boldsymbol{r}_v,$$
$$\boldsymbol{n}_v=\alpha_1\boldsymbol{r}_u+\beta_1\boldsymbol{r}_v.$$

Умножая первую из этих формул на $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, мы получим два соотношения:

$$-L=\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}_u=\alpha\boldsymbol{r}_u^2+\beta\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=\alpha E+\beta F,$$
$$-M=\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}_u=\alpha\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v+\beta\boldsymbol{r}_v^2=\alpha F+\beta G,$$

из которых следует, что

$$\alpha=\frac{FM-GL}{EG-F^2}, \quad \beta=\frac{FL-EM}{EG-F^2}.$$

Аналогично вычисляются коэффициенты и второй формулы:

$$\alpha_1=\frac{FN-GM}{EG-F^2}, \quad \beta_1=\frac{FM-EN}{EG-F^2}.$$

Далее, так как, согласно определению,

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{n}=L, \quad \boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{n}=M, \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{n}=N$$

и так как по условию $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{n}=0$, $\boldsymbol{r}_v\boldsymbol{n}=0$, то коэффициенты при $\boldsymbol{n}$ в разложениях векторов $\boldsymbol{r}_{uu}$, $\boldsymbol{r}_{uv}$, $\boldsymbol{r}_{vv}$ по базису $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$, $\boldsymbol{n}$ равны соответственно L, M, N.

Таким образом, мы имеем

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}_{uu}=\Gamma_{11}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{11}^{2}\boldsymbol{r}_v+L\boldsymbol{n},\\
&\boldsymbol{r}_{uv}=\Gamma_{12}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{12}^{2}\boldsymbol{r}_v+M\boldsymbol{n},\\
&\boldsymbol{r}_{vv}=\Gamma_{22}^{1}\boldsymbol{r}_u+\Gamma_{22}^{2}\boldsymbol{r}_v+N\boldsymbol{n},\\
&\boldsymbol{n}_u=\frac{FM-GL}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FL-EM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v,\\
&\boldsymbol{n}_v=\frac{FN-GM}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_u+\frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где Γ_{ij}^{k}, i, j, $k=1$, 2,— некоторые функции от u и v. Эти функции раньше обозначались символами $\left\{ {i\,j \atop k} \right\}$ и назывались *скобками Кристоффеля*. Теперь же их обычно называют *коэффициентами связности*.

Формулы (2) называются *деривационными формулами Вейнгартена*.

Для вычисления коэффициентов связиости Γ_{ij}^{k} мы в первую очередь найдем шесть произведений векторов $\boldsymbol{r}_{uu}$, $\boldsymbol{r}_{uv}$, $\boldsymbol{r}_{vv}$ на векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$.

Так как $\boldsymbol{r}_u^2=E$, то $2\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u=E_u$ и $2\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_u=E_v$, т. е.

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u=\frac{1}{2}E_u \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_u=\frac{1}{2}E_v.$$

Аналогично, так как $\boldsymbol{r}_v^2=G$, то

$$\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v=\frac{1}{2}G_u \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_v=\frac{1}{2}G_v.$$

Кроме того, так как $\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v=F$, то $\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{uv}=F_u$ и $\boldsymbol{r}_{uv}\boldsymbol{r}_v+\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_{vv}=F_v$, откуда следует, что

$$\boldsymbol{r}_{uu}\boldsymbol{r}_v=F_u-\frac{1}{2}E_v \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r}_{vv}\boldsymbol{r}_u=F_v-\frac{1}{2}G_u.$$

Умножая теперь первые три формулы (2) на $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$, мы получим шесть соотношений:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases}
E\Gamma_{11}^{1}+F\Gamma_{11}^{2}=\frac{1}{2}E_u,\\
F\Gamma_{11}^{1}+G\Gamma_{11}^{2}=F_u-\frac{1}{2}E_v,
\end{cases}\\
&\begin{cases}
E\Gamma_{12}^{1}+F\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}E_v,\\
F\Gamma_{12}^{1}+G\Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{2}G_u,
\end{cases}\\
&\begin{cases}
E\Gamma_{22}^{1}+F\Gamma_{22}^{2}=F_v-\frac{1}{2}G_u,\\
F\Gamma_{22}^{1}+G\Gamma_{22}^{2}=\frac{1}{2}G_v,
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3}
$$

из которых легко находятся коэффициенты Γ_{ij}^k. (Уравнения однозначно разрешимы, поскольку определитель $EG-F^2$ каждой пары уравнений отличен от нуля.)

Мы видим, что *коэффициенты связности* Γ_{ij}^k *выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы и их производные.* Следовательно, *они не меняются при изгибаниях (изометриях) поверхности.*

Явные выражения коэффициентов Γ_{ij}^k через коэффициенты первой квадратичной формы нам не понадобятся, и мы их выписывать не будем.

Коэффициенты деривационных формул связаны тремя соотношениями, которые возникают при вычислении с помощью этих формул двумя разными способами частных производных $\boldsymbol{r}_{uuv}$, $\boldsymbol{r}_{uvv}$ и $\boldsymbol{n}_{uv}$. Одно из этих соотношений было найдено Гауссом, а остальные два—Петерсоном, Майнарди и Кодацци. Мы рассмотрим только соотношение Гаусса, которое получим, вычисляя коэффициент при $\boldsymbol{r}_v$ в разложении частной производной $\boldsymbol{r}_{uuv}$ по векторам $\boldsymbol{r}_u$, $\boldsymbol{r}_v$ и $\boldsymbol{n}$.

В этом вычислении мы будем следить только за коэффициентом при $\boldsymbol{r}_v$ и только за теми его слагаемыми, которые зависят от коэффициентов второй квадратичной формы. Все же остальные слагаемые мы будем заменять многоточием.

Имеем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{uuv} &= (\boldsymbol{r}_{uu})_v = (\Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_v + L\boldsymbol{n})_v = \\ &= \ldots + \Gamma_{11}^1\boldsymbol{r}_{uv} + \ldots + \Gamma_{11}^2\boldsymbol{r}_{vv} + \ldots + L\boldsymbol{n}_v = \\ &= \ldots + \Gamma_{11}^1(\ldots) + \ldots + \Gamma_{11}^2(\ldots) + \ldots \\ &\ldots + L\left(\ldots + \frac{FM-EN}{EG-F^2}\boldsymbol{r}_v\right) = \left(L\frac{FM-EN}{EG-F^2} + \ldots\right)\boldsymbol{r}_v + \ldots\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{uuv} &= (\boldsymbol{r}_{uv})_u = (\Gamma_{12}^1\boldsymbol{r}_u + \Gamma_{22}^2\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n})_u = \\ &= \left(M\frac{FL-EM}{EG-F^2} + \ldots\right)\boldsymbol{r}_v + \ldots\end{aligned}$$

Следовательно,

$$L\frac{FM-EN}{EG-F^2} = M\frac{FL-EM}{EG-F^2} + \ldots,$$

где многоточие обозначает члены, зависящие только от коэффициентов первой квадратичной формы. Но

$$M\frac{FL-EM}{EG-F^2} - L\frac{FM-EN}{EG-F^2} = E\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = EK.$$

Поскольку $E \neq 0$ (форма I положительно определена), этим доказано, что *полная кривизна K поверхности выражается через коэффициенты первой квадратичной формы (и их производные)*. Отсюда следует, что кривизна K при изгибаниях не меняется. Точнее, если f — изометрия поверхности $\mathscr{X}$ на поверхность $\mathscr{Y}$, то

$$K_{\mathscr{Y}} \circ f = K_{\mathscr{X}}, \tag{4}$$

где $K_{\mathscr{X}}$ и $K_{\mathscr{Y}}$ — полные кривизны на поверхностях $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. (Действительно, если f действует по равенству координат, то обе стороны в (4) отличаются лишь обозначениями координат.) Этот результат заслуживает выделения в качестве теоремы:

Теорема 1 (теорема Гаусса). *Полная (гауссова) кривизна поверхности не меняется при изгибаниях (изометриях), т. е. изометричные поверхности в соответствующих друг другу точках имеют одинаковую кривизну.* □

Эта теорема настолько восхитила Гаусса, что он назвал ее theorema egregium — по латыни «блистательная теорема».

Из теоремы 1 следует, в частности, что *никакую сколь угодно малую часть сферы нельзя изогнуть на плоскость*. Поэтому никакая карта земной поверхности не может дать ее точное изображение.

Явное выражение кривизны K через коэффициенты E, F и G первой квадратичной формы имеет вид

$$K = -\frac{1}{4(EG-F^2)^2}\begin{vmatrix} E & E_u & E_v \\ F & F_u & F_v \\ G & G_u & G_v \end{vmatrix} - \frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\frac{E_v-F_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v-G_u}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_u\right\}. \tag{5}$$

Другие два соотношения, получающиеся при дифференцировании деривационных формул (и называемые обычно *формулами Петерсона — Кодацци*), имеют вид

$$\begin{aligned} &2(EG-F^2)(L_v-M_u) - \\ &\qquad -(EN+GL-2FM)(E_v-F_u) + \begin{vmatrix} E & E_u & L \\ F & F_u & M \\ G & G_u & N \end{vmatrix} = 0, \\ &2(EG-F^2)(M_v-N_u) - \\ &\qquad -(EN+GL-2FM)(F_v-G_u) + \begin{vmatrix} E & E_v & L \\ F & F_v & M \\ G & G_v & N \end{vmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Доказательство этих формул не требует ничего, кроме терпения и аккуратности.

Мы докажем только формулу (5) и только в случае, когда $E=1$ и $F=0$, т. е. когда первая квадратичная форма поверхности выражается формулой

(7) $$\mathrm{I} = du^2 + G\,dv^2.$$

В этом случае уравнения (3) для коэффициентов Γ_{ij}^k имеют вид

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u,$$
$$G\Gamma_{11}^2 = 0, \quad G\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}G_u, \quad G\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}G_v,$$

откуда следует, что

$$\Gamma_{11}^1 = 0, \quad \Gamma_{12}^1 = 0, \quad \Gamma_{11}^2 = 0,$$
$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2}G_u, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}\frac{G_v}{G}.$$

Поэтому

$$\boldsymbol{r}_{uu} = L\boldsymbol{n} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{r}_{uv} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n}.$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$\boldsymbol{n}_u = -L\boldsymbol{r}_u - \frac{M}{G}\boldsymbol{r}_v \quad \text{и} \quad \boldsymbol{n}_v = -M\boldsymbol{r}_u - \frac{N}{G}\boldsymbol{r}_v,$$

отсюда вытекает, что

$$\boldsymbol{r}_{uuv} = (L\boldsymbol{n})_v = L_v\boldsymbol{n} + L\left(-M\boldsymbol{r}_u - \frac{N}{G}\boldsymbol{r}_v\right) =$$
$$= -LM\boldsymbol{r}_u - \frac{2N}{G}\boldsymbol{r}_v + L_v\boldsymbol{n}$$

и

$$\boldsymbol{r}_{uvu} = \left(\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n}\right)_u = \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{G}\right)_u\boldsymbol{r}_v +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\left[\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}\boldsymbol{r}_v + M\boldsymbol{n}\right] + M\boldsymbol{n} + M\left(-L\boldsymbol{r}_u - \frac{M}{G}\boldsymbol{r}_v\right) =$$
$$= -LM\boldsymbol{r}_u + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{G}\right)_u + \frac{1}{4}\left(\frac{G_u}{G}\right)^2 - \frac{M^2}{G}\right]\boldsymbol{r}_v +$$
$$+\left(\frac{1}{2}\frac{G_u}{G}M + M_u\right)\boldsymbol{n},$$

и, значит,

$$-\frac{LN}{G} = \frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{G}\right)_u + \frac{1}{4}\left(\frac{G_u}{G}\right)^2 - \frac{M^2}{G},$$
$$L_v = \frac{1}{2}\frac{G_u}{G}M + M_u.$$

Второе уравнение нас сейчас не интересует (оно является первым из уравнений (6) при $E=1$ и $F=0$), а из первого следует (поскольку в рассматриваемом случае $K=\frac{1}{G}(LN-M^2)$) формула

$$K=-\frac{1}{2}\left(\frac{G_u}{G}\right)_u-\frac{1}{4}\left(\frac{G_u}{G}\right)^2,$$

т. е., как показывает очевидное вычисление, —формула

$$K=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}, \tag{8}$$

что совпадает с результатом подстановки в формулу (5) значений $E=1$ и $F=0$.

Тем самым нами доказано, что *полная кривизна поверхности с первой квадратичной формой* (7) *выражается формулой* (8).

Пусть, например,

$$\mathbf{I}=du^2+\cos^2 u\,dv^2. \tag{9}$$

Тогда $\sqrt{G}=\cos u$ и $(\sqrt{G})_{uu}=-\cos u$. Поэтому $K=1$, что вполне согласуется с результатом примера 1 лекции 4 (поскольку форма (9) является первой квадратичной формой сферы радиуса $R=1$; см. формулу (36) лекции 3, в которой, правда, переставлены u и v).

Аналогично показывается, что поверхность с первой квадратичной формой

$$\mathbf{I}=du^2+\operatorname{ch}^2 u\,dv^2$$

имеет кривизну $K=-1$ (ср. пример 2 лекции 4).

Замечание 1. Подчеркнем, что все эти результаты имеют место для поверхностей в *трехмерном* евклидовом пространстве. Для поверхностей же в пространстве большего числа измерений формулу (5) (или ее частный вид (8)) можно принять за определение кривизны K.

Замечание 2. Для того чтобы шесть функций

$$E,\ F,\ G,\ L,\ M,\ N, \tag{10}$$

заданных в открытом выпуклом множестве $U\subset\mathbb{R}^2$ были коэффициентами первой и второй квадратичных форм некоторой поверхности $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, конечно, необходимо, чтобы для этих функций, кроме условий

$$E>0,\quad EG-F^2>0 \tag{11}$$

положительной определенности, имели место соотношения (5) и (6) (имеется в виду, что в соотношение (5) подставлено $K=\dfrac{LM-M^2}{EG-F^2}$). Оказывается, что *эти соотношения также и достаточны* (для существования регулярной, но вообще говоря, не элементарной поверхности с данными формами I и II). Более того, функции (10) (удовлетворяющие соотношениям (5), (6) и (11)) *определяют поверхность с точностью до движения пространства.* Эти утверждения являются двумерным аналогом соответствующих утверждений для кривых (см. теорему 1 лекции 2) и доказываются аналогичным способом (при этом вместо теоремы о существовании и единственности решения системы линейных дифференциальных уравнений используется соответствующая теорема для систем линейных уравнений в частных производных). Мы докажем их — сразу для многообразий произвольной размерности — в следующем семестре.

Теорема Гаусса утверждает, что равенство полных кривизн является необходимым условием изометричности двух поверхностей. Вместе с тем, хотя это условие отнюдь не достаточно, оно настолько сильно, что с его помощью можно без труда получить и достаточные условия. Мы не будем подробно обсуждать этот вопрос и рассмотрим лишь важнейший частный случай соответствующей теоремы.

Пусть

$$\Delta_1 K=\frac{EK_v^2-2FK_uK_v+GK_u^2}{EG-F^2}$$

— первый дифференциальный параметр Бельтрами функции K. Если две функции K и $\Delta_1 K$ от u и v *функционально независимы*, т. е. их якобиан

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial u} & \dfrac{\partial K}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \Delta_1 K}{\partial u} & \dfrac{\partial \Delta_1 K}{\partial v} \end{vmatrix}$$

всюду отличен от нуля, то их можно принять за новые локальные координаты на поверхности. Назовем эти координаты *гауссовыми*. Из свойства инвариантности оператора Δ_1 (формула (34) лекции 3) и формулы (4) непосредственно вытекает, что для любой изометрии $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$

имеет место равенство

(12) $$\Delta_1 K_{\mathcal{Y}} \circ f = \Delta_1 K_{\mathcal{X}}.$$

Вместе формулы (4) и (12) означают, что *каждая изометрия является отображением по равенству гауссовых координат.* Поэтому справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Две элементарные поверхности, на которых определены гауссовы координаты, тогда и только тогда изометричны, когда в этих координатах их первые квадратичные формы совпадают.* □

Таким образом, чтобы определить, изометричны или нет две поверхности, надо ввести на них (если это возможно) гауссовы координаты и вычислить в этих координатах их первые квадратичные формы. Если эти формы совпадают, то поверхности изометричны, а если эти формы различны, то поверхности не изометричны.

Теорема 2 не дает ответа в случае, когда K и $\Delta_1 K$ функционально зависимы, например когда $\Delta_1 K = 0$ (что имеет место, как легко сообразить, если и только если $K = \text{const}$). Впрочем, в этом крайнем случае условие теоремы 1 оказывается достаточным, т. е. *две элементарные поверхности постоянной полной кривизны тогда и только тогда изометричны, когда они имеют одну и ту же кривизну.* Другими словами, *любая поверхность постоянной полной кривизны K локально изометрична сфере радиуса $R = \dfrac{1}{\sqrt{K}}$, если $K > 0$, плоскости, если $K = 0$, и, псевдосфере псевдорадиуса $R = \dfrac{1}{\sqrt{-K}}$, если $K < 0$.*

Для доказательства нам понадобится лемма, которую мы докажем в следующем семестре:

Лемма Гаусса. *На любой поверхности существуют локальные координаты u, v, в которых первая квадратичная форма этой поверхности имеет вид* (7), *причем функция $G = G(u, v)$ обладает тем свойством, что*

(13) $$G(0, v) = 1 \text{ и } G_u(0, v) = 0 \text{ для всех } v.$$

В силу этой леммы мы без ограничения общности можем считать, что первая квадратичная форма рассматриваемой поверхности постоянной полной кривизны K имеет вид (7) и, значит, для K имеет место формула (8). Эту формулу мы можем рассматривать как дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами относительно функции $\sqrt{G}$. Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$\sqrt{G}=\begin{cases} A\cos a(u+B), & \text{если } K=a^2>0,\\ Au+B, & \text{если } K=0,\\ A\operatorname{ch} a(u+B), & \text{если } K=-a^2<0,\end{cases}$$

где A и B — произвольные функции от v. Но ввиду первого условия (13) должны иметь место соотношения

$$\begin{aligned} A\cos aB&=1 \text{ при } K>0,\\ B&=1 \text{ при } K=0,\\ A\operatorname{ch} aB&=1 \text{ при } K<0,\end{aligned}$$

а ввиду второго условия (13) — в силу тождеств

$$(\sqrt{G})_u=\frac{1}{2}\frac{G_u}{\sqrt{G}}=\begin{cases} -Aa\sin a(u+B), & \text{если } K>0,\\ A, & \text{если } K=0,\\ Aa\operatorname{sh} a(u+B), & \text{если } K<0\end{cases}$$

— соотношения

$$\begin{aligned} Aa\sin aB&=0 \text{ при } K>0,\\ A&=0 \text{ при } K=0,\\ Aa\operatorname{sh} aB&=0 \text{ при } K<0.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sqrt{G}=\begin{cases} \cos au, & \text{если } K=a^2>0,\\ 1, & \text{если } K=0,\\ \operatorname{ch} au, & \text{если } K=-a^2<0.\end{cases}$$

В первом случае мы получаем первую квадратичную форму

$$du^2+\cos^2 au\, dv^2$$

сферы радиуса $1/a$, во втором случае — первую квадратичную форму

$$du^2+dv^2$$

плоскости, а в третьем — первую квадратичную форму

$$du^2+\operatorname{ch}^2 au\, dv^2$$

псевдосферы псевдорадиуса $1/a$. □

На этом мы прервем — до следующего семестра — изложение теории поверхностей и обратимся к основному предмету этого курса — теории гладких многообразий.