Лекция 6

Вводные замечания.—Открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$ и их диффеоморфизмы.—Карты и атласы.—Максимальные атласы.—Гладкие многообразия.—Примеры гладких многообразий.

Понятие гладкого многообразия является одним из основных понятий современной математики. Оно возникает в результате экспликации и одновременного обобщения на высшие размерности интуитивного понятия поверхности, рассматриваемой безотносительно к ее расположению в пространстве. Основные принципы этой экспликации заимствуются при этом из картографии.

Отдельные области земной поверхности мы можем адекватно описывать посредством карт, позволяющих изображать их на плоскости. Каждая точка Земли может быть изображена на карте, но одной картой покрыть всю Землю невозможно; для этого требуется атлас, т. е. набор нескольких карт. Любая карта позволяет прямоугольные координаты на плоскости перенести в соответствующую область на поверхности и тем самым получить в ней локальные координаты. (На самом деле в математической картографии обычно, наоборот, переносят географические координаты на земной поверхности в криволинейную координатную сетку на плоскости, но принципиального значения это различие не имеет.) При этом локальные координаты, соответствующие двум различным картам, связаны функциями перехода, позволяющими выразить (в общей части двух карт) одни координаты через другие.

В соответствующих общих определениях мы заменим плоскость стандартным евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, где n—некоторое целое число, которое мы будем считать раз и навсегда выбранным и зафиксированным. Вырожденный случай $n=0$ мы при этом пока не исключаем.

Напомним прежде всего из курса анализа некоторые факты и определения, касающиеся пространства $\mathbb{R}^n$ (которыми мы уже частично пользовались в предыдущих лекциях).

Точка x подмножества $U\subset\mathbb{R}^n$ называется его *внутренней точкой*, если существует такое $\varepsilon>0$, что шар радиуса ε с центром в точке x

целиком содержится в U. Множество U называется *открытым* (в $\mathbb{R}^n$), если все его точки являются внутренними точками.

Произвольное отображение $\varphi\colon U \longrightarrow V$ подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ задается n функциями

$$y^1 = \varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ \ldots, \ y^n = \varphi^n(x^1, \ldots, x^n) \tag{1}$$

n переменных, выражающими через координаты $x^1, \ldots, x^n$ произвольной точки $\boldsymbol{x} \in U$ координаты $y^1, \ldots, y^n$ точки $\boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x})$. В случае, когда множество U открыто, имеет смысл говорить о производных произвольного порядка функций (1) по $x^1, \ldots, x^n$ в любой его точке.

Отображение φ открытого множества U называется *отображением класса* C^r, где r — некоторое натуральное число или символ ∞, если во всех точках множества U функции (1) обладают при $r \neq \infty$ непрерывными частными производными всех порядков $\leqslant r$, а при $r = \infty$ непрерывными производными всех порядков. В случае же, когда в любой точке множества U функции (1) вещественно аналитичны (разлагаются в степенные ряды с отличным от нуля радиусом сходимости), отображение φ называется *отображением класса* C^ω.

В дальнейшем мы будем считать фиксированным некоторый класс гладкости C^r, где $r \leqslant \infty$ или $r = \omega$, и отображения этого класса будем просто называть *гладкими отображениями*. Как правило, нам будет годиться любое $r \geqslant 2$, а часто даже и $r = 1$, но чтобы не следить, не появились ли производные слишком больших порядков, мы, если только явно не оговорено противное, будем молчаливо предполагать, что $r = \infty$ или $r = \omega$. Впрочем, иногда мы будем включать в рассмотрение и особый случай $r = 0$. В этом случае гладкие отображения — это просто непрерывные отображения.

Основным мы будем считать случай $r = \infty$ и все ситуации, когда он отличается от случая $r = \omega$, будем специально оговаривать.

Каждое гладкое отображение $\varphi\colon U \longrightarrow V$ определяет на U гладкую функцию

$$D\varphi = \det \left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right\|, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

называемую его *якобианом* (и которая обозначается также символом J_φ). Как показывается в курсе анализа, для любых гладких отображений $\varphi\colon U \longrightarrow V$ и $\psi\colon V \longrightarrow W$, где U, V и W — открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, составное отображение $\psi \circ \varphi\colon U \longrightarrow W$ (действующее по формуле $(\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{x}) = \psi(\varphi(\boldsymbol{x}))$, $\boldsymbol{x} \in U$) также гладко и

$$D(\psi \circ \varphi)(\boldsymbol{x}) = (D\psi)(\boldsymbol{y}) \cdot (D\varphi)(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y} = \varphi(\boldsymbol{x}), \tag{2}$$

для любой точки $\boldsymbol{x} \in U$ (формула (2) обычно называется ц е п н ы м п р а в и л о м, а отображение $\psi \circ \varphi$ — *композицией* отображений φ и ψ).

Отображение $\varphi\colon U \longrightarrow V$ открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ называется *диффеоморфным отображением* (или *диффеоморфизмом*), если оно гладко, биективно и обратное отображение $\varphi^{-1}\colon V \longrightarrow U$ также гладко. (При $r=0$ биективное непрерывное отображение, обратное к которому также непрерывно, называется *гомеоморфизмом*.)

Из формулы (2) непосредственно вытекает, что *якобиан $D\varphi$ произвольного диффеоморфизма $\varphi\colon U \longrightarrow V$ во всех точках множества U отличен от нуля* (причем $(D\varphi^{-1})(\boldsymbol{y})=(D\varphi)(\boldsymbol{x})^{-1}$ для любой точки $\boldsymbol{y}=\varphi(\boldsymbol{x})$ множества V).

Теорема об обратном отображении утверждает, что *если в точке $\boldsymbol{x}_0 \in U$ якобиан $D\varphi$ гладкого отображения $\varphi\colon U \longrightarrow V$ отличен от нуля, то существует такое открытое множество $U' \subset U$, содержащее точку $\boldsymbol{x}_0$, что ограничение $\varphi|_{U'}$ отображения φ на U' является диффеоморфизмом множества U' на некоторое открытое множество $V' \subset V$, содержащее точку $\boldsymbol{y}_0=\varphi(\boldsymbol{x}_0)$.*

В частности, отсюда следует, что *гладкое биективное отображение $\varphi\colon U \longrightarrow V$, якобиан которого всюду отличен от нуля, является диффеоморфизмом.*

Замечание 1. Существуют гладкие небиективные отображения $\varphi\colon U \longrightarrow V$ с всюду отличным от нуля якобианом. Примером может служить отображение φ плоского кольца $1 < x^2+y^2 < 2$ на себя, задаваемое формулой $\varphi(x, y)=(x^2-y^2, 2xy)$.

Теперь мы уже можем дать основные определения «абстрактной картографии».

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное множество.

Определение 1. *Картой в $\mathscr{X}$* называется пара (U, h), где U — подмножество в $\mathscr{X}$, а h — отображение множества U в $\mathbb{R}^n$, биективно отображающее U на некоторое открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Множество U называется *областью определения* (или *носителем*) карты (U, h), а отображение h — *картирующим отображением.* Для любой точки $p \in U$ точка $h(p) \in \mathbb{R}^n$ имеет вид $(x^1(p), \ldots, x^n(p))$, где $x^1(p), \ldots, x^n(p) \in \mathbb{R}$. Это дает n числовых функций:

$$x^1\colon p \longmapsto x^1(p), \ \ldots, \ x^n\colon p \longmapsto x^n(p), \quad p \in U, \tag{3}$$

на U, которые называются *локальными координатами* карты (U, h).

Поскольку координаты (3) однозначно определяют отображение h, вместо (U, h) часто пишут $(U, x^1, \ldots, x^n)$, а отображение h называют *координатным отображением.*

Замечание об обозначениях.

Символом $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$, где φ — некоторая функция на $h(U)$, мы будем обозначать функцию

$$\varphi \circ h\colon p \mapsto \varphi(x^1(p), \ldots, x^n(p)) \quad \text{на } U,$$

что находится в полном согласии с традиционным обозначением сложной функции. Таким образом, формула

$$y = \varphi(x^1, \ldots, x^n)$$

означает, что y является лишь другим обозначением для функции $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$. Для сокращения числа используемых букв мы функцию φ также иногда будем обозначать символом y и, следовательно, будем писать

$$y = y(x^1, \ldots, x^n).$$

Заметим, что в этой формуле буква y справа и слева обозначает различные функции. Слева — это функция на U, а справа — функция на $h(U)$, служащая для выражения функции на U через функции $x^1, \ldots, x^n$. В ситуациях, когда надо четко эти функции различать, мы будем первую из них обозначать символом $y \circ h$.

Подчеркнем, что мы никогда не будем использовать, как это обычно делается, символы $\varphi(x^1, \ldots, x^n)$ (или $y(x^1, \ldots, x^n)$) для обозначения функции φ (функции y) на $h(U)$ (и лишь изредка будем разрешать себе употреблять его для обозначения значения этой функции в точке $(x^1, \ldots, x^n) \in h(U)$).

Две карты (U, h) и (V, h) называются *пересекающимися*, если $U \cap V \neq \varnothing$. (Эта терминология отражает общую тенденцию, которой мы будем иногда следовать, не различать педантично (U, h) и U).

Пусть (U, h) и (V, h) — две пересекающиеся карты, и пусть $W = U \cap V$. Тогда в $\mathbb{R}^n$ определены два множества $h(W)$ и $k(W)$ и отображение

$$(4) \qquad (k|_W) \circ (h|_W)^{-1}\colon h(W) \to k(W)$$

первого множества на второе. Допуская определенную неточность, мы будем обозначать отображение (4) символом $k \circ h^{-1}$.

Определение 2. Две карты (U, h) и (V, k) в $\mathscr{X}$ называются *согласованными*, если они либо не пересекаются ($U \cap V = \varnothing$), либо:

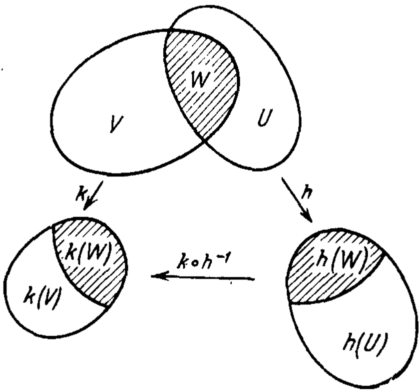
а) оба множества $h(W)$ и $k(W)$, где $W = U \cap V$, открыты в $\mathbb{R}^n$;

б) отображение (4) является диффеоморфизмом (при $r=0$ — гомеоморфизмом).

Если $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ — функции, задающие диффеоморфизм (4), то для ограничений $x^1|_W, \ldots, x^n|_W$ и $y^1|_W, \ldots, y^n|_W$ локальных координат карт (U, h) и (V, k) на W будут иметь место формулы

$$
\begin{aligned}
y^1|_W &= \varphi^1(x^1|_W, \ldots, x^n|_W), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y^n|_W &= \varphi^n(x^1|_W, \ldots, x^n|_W).
\end{aligned}
\tag{5}
$$

В связи с этим функции $\varphi^1, \ldots, \varphi^n$ называются *функциями перехода* (на W) от координат $x^1, \ldots, x^n$ к координатам $y^1, \ldots, y^n$, а формулы (5) называются *формулами перехода*. Диффеоморфизм $k \circ h^{-1}$ называется



Для наглядности множества $h(U)$ и $k(V)$ изображены непересекающимися, хотя в общем случае этого может и не быть. Точно так же множества $h(U)$, $h(W)$ и $k(V)$ могут быть и несвязными

отображением перехода. Как правило, индекс W в формулах (5) опускается и они записываются в виде

$$
y^1 = \varphi^1(x^1, \ldots, x^n), \ \ldots, \ y^n = \varphi^n(x^1, \ldots, x^n)
\tag{6}
$$

(иногда с добавлением указания «на W»).

Мы будем записывать их в еще более кратком («векторном») виде

$$
\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}) \quad (\text{или } \boldsymbol{y} = (k \circ h^{-1})\,\boldsymbol{x}).
\tag{7}
$$

Следует отчетливо понимать условность формул (7) и всегда помнить, что они являются лишь краткой записью формул (6) или (5).

В частности, хотя формулы (7) имеют вид соотношений между точками некоторых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, но на самом деле они связывают не точки этого пространства, а функции, заданные на подмножестве множества $\mathscr{X}$ (и в этом смысле являются соотношениями в $\mathscr{X}$).

Определение 3. Множество карт $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ называется *атласом на* $\mathscr{X}$, если

а) любые две карты этого множества согласованы;

б) имеет место равенство

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = \mathscr{X}$$

(карты (U_α, h_α) покрывают все $\mathscr{X}$).

Для любого атласа $\mathbf{A}$ обозначим через $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ множество всех карт, согласованных с каждой картой атласа $\mathbf{A}$.

Предложение 1. *Множество* $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ *является атласом.*

Доказательство. Пусть (U, h) и (V, k) — две пересекающиеся карты из $\mathbf{A}_{\text{макс}}$, и пусть x — произвольная точка множества $h(W)$, где, как и выше, $W = U \cap V$.

Рассмотрим точку $p = h^{-1}(x) \in W$. Поскольку множество $\mathbf{A} = (\{U_\alpha, h_\alpha\})$ представляет собой атлас, существует такая карта (U_α, h_α) из $\mathbf{A}$, что $p \in U_\alpha$. Так как по условию карты (U, h) и (V, k) согласованы с картой (U_α, h_α), то множества $h_\alpha(U_\alpha \cap U)$ и $h_\alpha(U_\alpha \cap V)$ открыты в $\mathbb{R}^n$. Поэтому в $\mathbb{R}^n$ (а, значит, и в $h_\alpha(U_\alpha \cap U)$) открыто их пересечение

$$h_\alpha(U_\alpha \cap U) \cap h_\alpha(U_\alpha \cap V) = h_\alpha(U_\alpha \cap W).$$

Кроме того, множество $h(U_\alpha \cap U)$ также открыто в $\mathbb{R}^n$ и отображение

$$h \circ h_\alpha^{-1}\colon h_\alpha(U_\alpha \cap U) \to h(U_\alpha \cap U)$$

является диффеоморфизмом (и потому — будучи, в частности, гомеоморфизмом — переводит открытые множества в открытые).

Следовательно, множество

$$(h \circ h_\alpha^{-1})(h_\alpha(U_\alpha \cap W)) = h(U_\alpha \cap W)$$

открыто (в $h(U_\alpha \cap U)$, а значит, и в $\mathbb{R}^n$). Поскольку $x \in h(U_\alpha \cap W) \subset h(W)$, этим доказано, что x является внутренней точкой множества $h(W)$, а поскольку x была произвольной точкой из $h(W)$ — что множество $h(W)$ открыто.

Поменяв ролями h и k, мы аналогично докажем, что открыто и множество $k(W)$.

Далее, поскольку

(8) $$k \circ h^{-1} = (k \circ h_\alpha^{-1}) \circ (h_\alpha \circ h^{-1}),$$

а оба отображения $k \circ h_\alpha^{-1}$ и $h_\alpha \circ h$ являются диффеоморфизмами, отображение $k \circ h^{-1}$ также будет диффеоморфизмом (как композиция диффеоморфизмов). Поэтому карты (U, h) и (V, k) согласованы.

[На самом деле заключение о диффеоморфности отображения $k \circ h^{-1}$ мы сделали несколько поспешно, поскольку, строго говоря, формула (8) смысла не имеет. Действительно, отображение $h_\alpha \circ h^{-1}$ (а точнее, отображение $(h_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) \circ (h|_{U_\alpha \cap U})^{-1}$) является отображением из $h(U_\alpha \cap U)$ на $h_\alpha(U_\alpha \cap U)$, а отображение $k \circ h_\alpha^{-1}$ (точнее, отображение $(k|_{U_\alpha \cap V}) \circ (h_\alpha|_{U_\alpha \cap V})^{-1}$) является отображением из $h_\alpha(U_\alpha \cap V)$ на $k(U_\alpha \cap V)$, и поэтому рассматривать композицию этих отображений мы права не имеем. Чтобы получить это право, мы должны все отображения h, k и h_α ограничить на $U_\alpha \cap W$, т. е. написать формулу (8) в следующем — уже безукоризненном — виде

$$\begin{aligned}(k|_{U_\alpha \cap W}) \circ (h|_{U_\alpha \cap W})^{-1} &=\\ = [(k|_{U_\alpha \cap W}) \circ (h_\alpha|_{U_\alpha \cap W})^{-1}] &\circ [(h_\alpha|_{U_\alpha \cap W}) \circ (h|_{U_\alpha \cap W})^{-1}].\end{aligned}$$

Но тогда мы сможем лишь утверждать, что диффеоморфизмом будет отображение

(9) $$(k|_{U_\alpha \cap W}) \circ (h|_{U_\alpha \cap W})^{-1} = [(k|_W) \circ (h|_W)^{-1}]|_{h(U_\alpha \cap W)},$$

и чтобы перейти ко всему отображению

(10) $$k \circ h^{-1} = (k|_W) \circ (h|_W)^{-1},$$

требуются дополнительные соображения. Однако эти соображения в достаточной мере тривиальны. Именно, поскольку отображение (9) является диффеоморфизмом, его якобиан в точке x отличен от нуля (мы предполагаем здесь, что $r > 0$). Но ясно, что в точке x якобианы отображений (9) и (10) принимают одинаковые значения (ибо в окрестности $h(U_\alpha \cap W)$ точки x эти отображения совпадают). Таким образом, в произвольной точке x открытого множества $h(W)$ якобиан отображения (10) отличен от нуля. Следовательно, поскольку оно гладко и биективно, это отображение является диффеоморфизмом.

(При $r=0$ вместо ссылки на якобиан надо воспользоваться тем, что отображение тогда и только тогда непрерывно, когда оно непрерывно в каждой точке.)

В дальнейшем подобного рода уточнения мы будем оставлять читателю.]

Итак, мы доказали, что любые две карты из множества $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ согласованы, т. е. что это множество удовлетворяет условию **а** определения 3. Поскольку условие б этого определения для $\mathbf{A}_{\text{макс}}$, очевидно, выполнено (оно выполнено даже для $\mathbf{A}\subset\mathbf{A}_{\text{макс}}$), предложение 1 тем самым полностью доказано. □

Ясно, что если $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^*$ — атласы и $\mathbf{A}\subset\mathbf{A}^*$, то $\mathbf{A}^*_{\text{макс}}\subset\subset\mathbf{A}_{\text{макс}}$. Поэтому, в частности, $(\mathbf{A}_{\text{макс}})_{\text{макс}}\subset\mathbf{A}_{\text{макс}}$, и, значит, $(\mathbf{A}_{\text{макс}})_{\text{макс}}=\mathbf{A}_{\text{макс}}$. Следовательно, если $\mathbf{A}_{\text{макс}}\subset\mathbf{A}^*$, то $\mathbf{A}^*_{\text{макс}}\subset(\mathbf{A}_{\text{макс}})_{\text{макс}}=\mathbf{A}_{\text{макс}}$, и потому $\mathbf{A}^*\subset\mathbf{A}_{\text{макс}}$. Это означает, что *атлас* $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ *максимален* (в частично упорядоченном по включению множестве всех атласов). Кроме того, если $\overline{\mathbf{A}}$ — произвольный максимальный атлас, содержащий атлас $\mathbf{A}$, то $\overline{\mathbf{A}}\subset\overline{\mathbf{A}}_{\text{макс}}\subset\mathbf{A}_{\text{макс}}$, и, значит, $\overline{\mathbf{A}}=\mathbf{A}_{\text{макс}}$. Этим доказано

Следствие 1. *Каждый атлас $\mathbf{A}$ содержится в единственном максимальном атласе $\mathbf{A}_{\text{макс}}$.* □

Теперь мы уже можем дать наше основное определение.

Определение 4. Максимальные атласы на $\mathscr{X}$ называются также *гладкими структурами* (или просто *гладкостями*). Множество $\mathscr{X}$ с заданной на нем гладкой структурой $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ называется *гладким многообразием.* (Таким образом, гладкими многообразиями являются, собственно говоря, пары вида $(\mathscr{X}, \mathbf{A}_{\text{макс}})$, но для упрощения обозначений и формулировок мы будем пользоваться этим полным обозначением только тогда, когда этого нельзя избежать.) Карты атласа $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ называются *картами многообразия* $\mathscr{X}$ или даже — для пущей выразительности — его *гладкими картами.*

По определению два многообразия $(\mathscr{X}, \mathbf{A}_{\text{макс}})$ и $(\mathscr{Y}, \mathbf{A}^*_{\text{макс}})$ тогда и только тогда одинаковы, когда $\mathscr{X}=\mathscr{Y}$ и $\mathbf{A}_{\text{макс}}=\mathbf{A}^*_{\text{макс}}$.

Два атласа называются *эквивалентными*, если они содержатся в одном и том же максимальном атласе. Ясно, что атласы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ тогда и только тогда эквивалентны, когда их объединение $\mathbf{A}\cup\mathbf{A}^*$ является атласом (т. е. каждая карта любого из этих атласов согласована с каждой картой другого атласа).

Для задания на $\mathscr{X}$ гладкости $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ достаточно, конечно, задать произвольный атлас $\mathbf{A}\subset\mathbf{A}_{\text{макс}}$. Таким образом, гладкими многообразиями можно считать пары вида $(\mathscr{X}, \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ — произвольный атлас на $\mathscr{X}$. При этом многообразия $(\mathscr{X}, \mathbf{A})$ и $(\mathscr{Y}, \mathbf{A}^*)$ будут одинаковы тогда и только тогда, когда $\mathscr{X}=\mathscr{Y}$ и атласы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^*$ эквивалентны (т. е. когда их объединение $\mathbf{A}\cup\mathbf{A}^*$ является атласом).

Подчеркнем, что в определении гладкого многообразия у нас входит число n — размерность пространства $\mathbb{R}^n$, содержащего образы $h(U)$ носителей карт.

Определение 5. Это число называется *размерностью* гладкого многообразия $\mathscr{X}$ и обозначается символом $\dim\mathscr{X}$.

В определение гладкого многообразия $\mathscr{X}$ входит также число $r\geqslant 0$ (либо символ ∞ или ω) — класс гладкости отображений перехода $k\circ h^{-1}$. Оно называется *классом гладкости многообразия* $\mathscr{X}$ (говорят также, что $\mathscr{X}$ является *многообразием класса* C^r). Многообразия класса C^ω называются также *вещественно аналитическими многообразиями.*

При $r=0$ термин «гладкое многообразие» не употребляется и заменяется термином *топологическое многообразие.*

Конечно, каждое многообразие класса C^r автоматически является многообразием класса $C^{r'}$ для любого $r'<r$ (и, в частности, является топологическим многообразием).

В соответствии с принятым выше соглашением мы, как правило, будем считать все рассматриваемые многообразия принадлежащими классу C^∞.

Примеры гладких многообразий.

Пример 1. На пространстве $\mathbb{R}^n$ пара $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$, где $\mathrm{id}\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — тождественное отображение $x\mapsto x$, является картой и одноэлементное множество карт, состоящее из этой карты, представляет собой атлас. Соответствующая гладкая структура на $\mathbb{R}^n$ (класса C^ω) называется *стандартной.* В дальнейшем мы всегда будем рассматривать $\mathbb{R}^n$ как гладкое многообразие со стандартной гладкой структурой. Заметим, что в этой структуре $\dim\mathbb{R}^n=n$.

Задача 1. Докажите, что картами стандартной гладкой структуры на $\mathbb{R}^n$ являются пары (U, h), где U — произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, а h — произвольный диффеоморфизм множества U на некоторое открытое множество $h(U)\subset\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Более общим образом, для любого открытого множества O пространства $\mathbb{R}^n$ пара (O, id) является картой и одноэлементное множество карт, состоящее из этой карты, представляет собой атлас. Об определяемой этим атласом гладкой структуре на O говорят, что она *индуцирована* стандартной гладкой структурой на $\mathbb{R}^n$. Ясно, что ее картами являются те карты (U, h) последней структуры, для которых $U \subset O$. В дальнейшем, все открытые множества $O \subset \mathbb{R}^n$ мы будем считать гладкими многообразиями с этой гладкой структурой.

Пример 3. На пространстве $\mathbb{R}$ существуют и нестандартные гладкие структуры. Рассмотрим, например, на $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ карту $(\mathbb{R}, h_0)$, где h_0 — отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, задаваемое формулой $h_0(t) = t^3$, $t \in \mathbb{R}$. Эта карта также составляет одноэлементный атлас, но (при $r > 0$) соответствующая гладкая структура отлична от стандартной, поскольку карты $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ и $(\mathbb{R}, h_0)$ не согласованы (отображение перехода $h_0 \circ (\mathrm{id})^{-1} = h_0$ гладко и биективно, но обратное отображение h_0^{-1}: $t \mapsto t^{1/3}$ не дифференцируемо при $t = 0$).

Пример 4. Для каждой параметризации $\gamma\colon I \to \mathscr{A}$, $I = (a, b)$, открытой простой регулярной дуги $\mathscr{L}$ пара $(\mathscr{L}, \gamma^{-1})$, где $\gamma^{-1}\colon \mathscr{L} \to I$ — отображение, обратное к отображению γ (рассматриваемому как отображение $I \to \mathscr{L}$), является картой на $\mathscr{L}$, причем, согласно предложению 1 лекции 1, любые две такие карты согласованы. Это означает, что *любая открытая регулярная простая дуга естественным образом является одномерным многообразием.*

Пример 5. Аналогично, любая элементарная поверхность $\mathscr{X}$ является двумерным гладким многообразием с картами вида $(\mathscr{X}, \gamma^{-1})$, где γ — произвольная параметризация поверхности $\mathscr{X}$.

Пример 6. Простейшим многообразием, не покрываемым одной картой, является окружность

$$\mathbb{S}^1\colon\ x^2 + y^2 = 1.$$

Пусть p_0 и q_0 — ее точки $(-1, 0)$ и $(1, 0)$, и пусть $U = \mathbb{S}^1 \setminus \{p_0\}$ и $V = \mathbb{S}^1 \setminus \{q_0\}$. Для любой точки $p \in U$ (любой точки $q \in V$) мы обозначим через $h(p)$ (через $k(p)$) принадлежащий интервалу $(-\pi, \pi)$ угол, образованный радиус-вектором этой точки с положительным (отрицательным) направлением оси абсцисс. Ясно, что получающиеся отображения

$$h\colon U \to (-\pi, \pi), \quad k\colon V \to (-\pi, \pi)$$

биективны, т. е. пары (U, h) и (V, k) являются картами на $\mathbb{S}^1$ (с $n=1$). При этом $U \cap V = \mathbb{S}^1 \setminus \{p_0, q_0\}$, множества $h(U \cap V) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ и $k(U \cap V) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$ (оказывающиеся одинаковыми) открыты в $\mathbb{R}$ и отображение

$$k \circ h^{-1}: h(U \cap V) \to k(U \cap V)$$

задается формулами

$$(k \circ h^{-1})(t) = \begin{cases} t + \pi, & \text{если } t \in (-\pi, 0), \\ t - \pi, & \text{если } t \in (0, \pi), \end{cases}$$

и потому является диффеоморфизмом.

Следовательно, карты (U, h) и (V, k) согласованы, а так как $U \cup V = \mathbb{S}^1$, то они составляют атлас, и, значит, определяют на $\mathbb{S}^1$ некоторую гладкость (класса C^ω).

Пример 7. Аналогичным образом доказывается, что одномерным многообразием, покрываемым двумя картами, является произвольная замкнутая (не имеющая концов) простая регулярная дуга в аффинном пространстве $\mathcal{A}$.

Пример 8. Пусть $U^{(+)}, U^{(-)}, V^{(+)}, V^{(-)}$—подмножества окружности $\mathbb{S}^1$ (*открытые полуокружности*), состоящие из точек $p=(x, y)$, для которых соответственно $y>0$, $y<0$, $x>0$, $x<0$. Пусть, далее, $h^{(+)}$, $h^{(-)}$, $k^{(+)}$, $k^{(-)}$ — отображения этих множеств в $\mathbb{R}$, действующие по формулам $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, $(x, y) \mapsto y$ (являющиеся ограничениями проектирований на координатные оси). Каждое из этих отображений биективно отображает соответствующее множество на открытый интервал $(-1, 1)$ оси $\mathbb{R}$, и потому пары

$$(U^{(+)}, h^{(+)}),\ (U^{(-)}, h^{(-)}),\ (V^{(+)}, k^{(+)}),\ (V^{(-)}, k^{(-)})$$

являются картами в $\mathbb{S}^1$ (при этом на картах $U^{(\pm)}$ локальной координатой служит x, а на картах $V^{(\pm)}$ служит y). Эти карты, как легко видеть, согласованы (любые две из них либо не пересекаются, либо их пересечение является четвертью окружности, проектирующейся на открытые интервалы $(0, 1)$ или $(-1, 0)$ оси $\mathbb{R}$, причем соответствующие отображения перехода задаются формулами вида $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ и потому являются диффеоморфизмами) и покрывают всю окружность $\mathbb{S}^1$, т. е. составляют атлас на $\mathbb{S}^1$. *Этот атлас эквивалентен атласу из примера* 6 (и потому определяет на $\mathbb{S}^1$ ту же гладкость). Действительно, скажем, для карт (U, h) и $(U^{(+)}, h^{(+)})$ пересечение $U \cap U^{(+)}$ совпадает с $U^{(+)}$, причем $h(U^{(+)}) = (0, \pi)$,

$h^{(+)}(U^{(+)})=(-1,\ 1)$, а отображение

$$h^{(+)}\circ h^{-1}\colon (0,\ \pi)\to(-1,\ 1)$$

задается формулой $x=\cos t$, $0<t<\pi$, и потому является диффеоморфизмом (для остальных пар карт ситуация аналогична).

Пример 9 (обобщение примера 8 на произвольную размерность). Аналогичным образом на единичной n-мерной ($n\geqslant 1$) сфере

$$\mathbb{S}^n\colon\ x_0^2+x_1^2+\ldots+x_n^2=1$$

пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ пары $(U_i^{(+)},\ h_i^{(+)})$ и $(U_i^{(-)},\ h_i^{(-)})$, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, где $U_i^{(+)}$ и $U_i^{(-)}$ — *полусферы*, определяемые соответственно неравенствами $x_i>0$ и $x_i<0$, а $h_i^{(+)}$ и $h_i^{(-)}$ — ограничения на этих полусферах проектирований на i-ю координатную плоскость $x_i=0$, являются картами и любые две из этих карт согласованы. Например, отображение $h_i^{(+)}$, являющееся отображением полусферы $U_i^{(+)}$ на шар $\mathring{\mathbb{B}}^n$: $t_1^2+\ldots+t_n^2<1$ пространства $\mathbb{R}^n$ (с координатами $t_1,\ \ldots,\ t_n$), задается формулами

$$t_a=\begin{cases} x_{a-1}, & \text{если } a\leqslant i,\\ x_a, & \text{если } a>i,\end{cases}\qquad a=1,\ \ldots,\ n$$

(так что числа $t_1,\ \ldots,\ t_n$, т. е. числа $x_0,\ \ldots,\ x_{i-1}$, $x_{i+1},\ \ldots,\ x_n$, являются локальными координатами карты $(U_i^{(+)},\ h_i^{(+)})$), а обратное отображение $(h_i^{(+)})^{-1}\colon \mathring{\mathbb{B}}^n\to U_i^{(+)}$ — формулами

$$x_b=\begin{cases} t_{b+1}, & \text{если } b<i,\\ \sqrt{1-\boldsymbol{t}^2}, & \text{если } b=i,\\ t_b, & \text{если } b>i,\end{cases}\qquad b=0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где $\boldsymbol{t}^2=t_1^2+\ldots+t_n^2$. Поэтому при $i\leqslant j$ отображение $h_j^{(+)}\circ(h_{i-1}^{(+)})^{-1}$ будет определено на полушаре $\mathring{\mathbb{B}}^n_{j>0}=\{\boldsymbol{t}\in\mathring{\mathbb{B}}^n;\ t_j>0\}$ и, отображая этот полушар на полушар $\mathring{\mathbb{B}}^n_{i>0}=\{\boldsymbol{t}\in\mathring{\mathbb{B}}^n;\ t_i>0\}$, будет задаваться формулами

$$(11)\qquad t'_a=\begin{cases} t_a, & \text{если } a<i,\\ \sqrt{1-\boldsymbol{t}^2}, & \text{если } a=i,\\ t_{a-1}, & \text{если } i\leqslant a\leqslant j,\\ t_a, & \text{если } a>j,\end{cases}\qquad a=1,\ \ldots,\ n.$$

Поскольку эти формулы задают, очевидно, диффеоморфизм, карты $(U_{i-1}^{(+)}, h_{i-1}^{(+)})$ и $(U_j^{(+)}, h_j^{(+)})$, следовательно, согласованы. Для других пар карт в формулах (11) могут сдвинуться индексы, а перед корнем может появиться знак минус, что, конечно, на окончательный вывод о диффеоморфности не влияет.

Поскольку построенные карты, очевидно, покрывают всю сферу $\mathbb{S}^n$, они составляют атлас и, значит, определяют на сфере $\mathbb{S}^n$ некоторую гладкость.

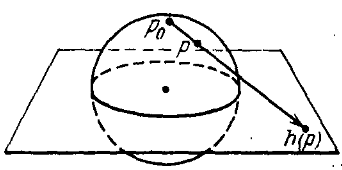
Пример 10. Построенный в примере 9 атлас состоит из $2n+2$ карт. Оказывается, что ту же гладкость на сфере $\mathbb{S}^n$ можно задать атласом, состоящим всего из двух карт (ср. пример 6). С этой целью для любой точки $p=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ сферы $\mathbb{S}^n$, отличной от точки $p_0=(1, 0, \ldots, 0)$ (*северного полюса* сферы $\mathbb{S}^n$), мы рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ прямую p_0p. Канонические уравнения этой прямой имеют вид

$$\frac{X_0-1}{x_0-1}=\frac{X_1}{x_1}=\ldots=\frac{X_n}{x_n},$$

и, значит, эта прямая пересекает гиперплоскость $X_0=0$ (*экваториальную гиперплоскость* сферы $\mathbb{S}^n$) в точке с координатами

$$t_1=\frac{x_1}{1-x_0}, \quad \ldots, \quad t_n=\frac{x_n}{1-x_0} \tag{12}$$

(координаты на экваториальной гиперплоскости мы обозначаем символами $t_1, \ldots, t_n$). Точка (12) называется *стереографической проекцией* точки $p\in\mathbb{S}^n\setminus\{p_0\}$ (ср. лекцию I.27). Обозначив эту точку через $h(p)$, мы получим (очевидно, биективное) отображение h множества $U=\mathbb{S}^n\setminus\{p_0\}$ на пространство $\mathbb{R}^n$, т. е. некоторую карту (U, h) (с $h(U)=\mathbb{R}^n$).



Стереографическая проекция

Аналогичным образом, исходя из *южного полюса* $q_0=(-1, 0, \ldots, 0)$ сферы $\mathbb{S}^n$, мы можем построить стереографическую проекцию $k\colon V\to\mathbb{R}^n$, где $V=\mathbb{S}^n\setminus\{q_0\}$, переводящую произвольную точку $p=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ сферы $\mathbb{S}^n$, отличную от точки q_0, в точку экваториальной плоскости с координатами

$$t_1'=\frac{x_1}{1+x_0}, \quad \ldots, \quad t_n'=\frac{x_n}{1+x_0} \tag{13}$$

и, значит, получить карту (V, k).

Для построенных карт пересечение $W = U \cap V$ имеет вид $\mathbb{S}^n \setminus \{p_0, q_0\}$, и каждое из отображений h и k отображает это пересечение на открытое множество $\mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$. При этом соответствующее отображение перехода

$$k \circ h^{-1}\colon \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}^n_* \tag{14}$$

будет задаваться формулами, получающимися исключением $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из формул (12) и (13). Но, согласно формулам (12), $x_i = (1 - x_0) t_i$, и потому

$$1 = x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2 = x_0^2 + (1 - x_0)^2 (t_1^2 + \ldots + t_n^2) = \\ = x_0^2 + (1 - x_0)^2 \boldsymbol{t}^2,$$

т. е.

$$(1 + \boldsymbol{t}^2) x_0^2 - 2\boldsymbol{t}^2 x_0 + \boldsymbol{t}^2 - 1 = 0.$$

Это уравнение имеет корень $x_0 = 1$, нам не нужный (он отвечает исключенной точке p_0), а для второго его корня

$$x_0 = \frac{\boldsymbol{t}^2 - 1}{1 + \boldsymbol{t}^2}$$

имеют место формулы

$$1 - x_0 = \frac{2}{1 + \boldsymbol{t}^2}, \quad 1 + x_0 = \frac{2\boldsymbol{t}^2}{1 + \boldsymbol{t}^2}.$$

Поэтому для любого $i = 1, \ldots, n$

$$x_i = (1 - x_0) t_i = \frac{2t_i}{1 + \boldsymbol{t}^2}$$

и, значит,

$$t_i' = \frac{x_i}{1 + x_0} = \frac{t_i}{\boldsymbol{t}^2}.$$

Этим доказано, что отображение (14) записывается формулами

$$t_1' = \frac{t_1}{\boldsymbol{t}^2}, \quad \ldots, \quad t_n' = \frac{t_n}{\boldsymbol{t}^2}$$

и потому является диффеоморфизмом.

Следовательно, карты (U, h) и (V, k) согласованы и поэтому составляют атлас.

Задача 2. Докажите, что этот атлас эквивалентен атласу из примера 9 и потому определяет на сфере $\mathbb{S}^n$ ту же гладкость.

Пример 11. Напомним, что *n-мерным вещественным проективным пространством* $\mathbb{R}P^n$ называется множество всех классов $(x_0:x_1:\ldots:x_n)$ пропорциональных векторов $(x_0, x_1, \ldots, x_n)\neq 0$ или, что равносильно, множество всех прямых пространства $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через точку $\mathbf{0}$. Пусть U_i, $i=0, 1, \ldots, n$,—множество всех точек $p=(x_0:x_1:\ldots:x_n)$ пространства $\mathbb{R}P^n$, для которых $x_i\neq 0$, и пусть h_i—отображение $U_i\to\mathbb{R}^n$, переводящее точку $p=(x_0:x_1:\ldots:x_n)$ из U_i в точку $(t_1, \ldots, t_n)$ из $\mathbb{R}^n$, для которой

$$(15)\qquad t_a=\begin{cases}\dfrac{x_{a-1}}{x_i}, & \text{если } a\leqslant i,\\[2mm] \dfrac{x_a}{x_i}, & \text{если } a>i,\end{cases}\qquad a=1, \ldots, n.$$

Ясно, что отображение h_i биективно, так что пара (U_i, h_i), $i=0, 1, \ldots, n$, является картой в $\mathbb{R}P^n$.

Для любых индексов i и $j\neq i$ пересечение $U_i\cap U_j$ состоит из точек $p=(x_0:x_1:\ldots:x_n)$, для которых $x_i\neq 0$ и $x_j\neq 0$, а множества $h_i(U_i\cap U_j)$ и $h_j(U_i\cap U_j)$ состоят (при $j>i$) из точек $t=(t_1, \ldots, t_n)$ из $\mathbb{R}^n$, для которых соответственно $t_j\neq 0$ и $t_{i+1}\neq 0$. Ясно, что эти множества открыты.

Поскольку отображение h_i действует по формулам (15), а отображение h_j—по аналогичным формулам, получающимся заменой i на j, отображение перехода $h_j\circ h_i^{-1}$ произвольную точку $(t_1, \ldots, t_n)\in h_i(U_i\cap U_j)$ переводит в точку $(t'_1, \ldots, t'_n)\in h_j(U_i\cap U_j)$, для которой

$$t'_a=\begin{cases}\dfrac{t_a}{t_j}, & \text{если } a\leqslant i \text{ или } a>j,\\[2mm] \dfrac{1}{t_j}, & \text{если } a=i+1,\\[2mm] \dfrac{t_{a-1}}{t_j}, & \text{если } i+1<a\leqslant j,\end{cases}\qquad a=1, \ldots, n,$$

и, значит, является диффеоморфизмом.

Этим доказано, что любые две из карт (U_i, h_i) и (U_j, h_j) согласованы и, следовательно, эти карты определяют на $\mathbb{R}P^n$ гладкую структуру.

Заметим, что во всех примерах (кроме, естественно, примеров 4, 5, 7) получились вещественно аналитические многообразия (класса C^ω).