Лекция 7

Топология гладкого многообразия. — Открытые подмногообразия. — Окрестности и внутренние точки. — Гомеоморфизмы. — Первая аксиома счетности и локальная евклидовость. — Вторая аксиома счетности — Нехаусдорфовы многообразия. — Гладкости на топологическом пространстве. — Топологические многообразия. — Нульмерные многообразия. — Категория TOP. — Категория DIFF. — Перенесение гладкости.

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное гладкое (или топологическое) многообразие.

Определение 1. Подмножество $O \subset \mathscr{X}$ называется *открытым* (в $\mathscr{X}$), если для любой карты (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ множество $h(O \cap U) \subset \mathbb{R}^n$ открыто (в $\mathbb{R}^n$).

При $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ это определение дает, как легко видеть, обычные открытые множества в $\mathbb{R}^n$.

Открытые множества в пространстве $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ (а также в любом метрическом пространстве $\mathscr{X}$) обладают, как мы знаем из курса анализа, следующими тремя свойствами:

1° пустое множество $\varnothing$ и все пространство $\mathscr{X}$ открыты,

2° объединение произвольного семейства открытых множеств открыто,

3° пересечение произвольного конечного семейства открытых множеств открыто.

Так как

$$\bigcup_\alpha h(O_\alpha \cap U) = h\left(\left(\bigcup_\alpha O_\alpha\right) \cap U\right)$$

и

$$\bigcap_\alpha h(O_\alpha \cap U) = h\left(\left(\bigcap_\alpha O_\alpha\right) \cap U\right)$$

для любой карты (U, h) и любого семейства $\{O_\alpha\}$ подмножеств многообразия $\mathscr{X}$, то этими же свойствами обладают и открытые множества в $\mathscr{X}$.

Определение 2. Множество $\mathbb{T}$ подмножеств множества $\mathscr{X}$ называется *топологией* (или *топологической структурой*) на $\mathscr{X}$, а множества из $\mathbb{T}$ — *открытыми множествами*, если эти множества обладают свойствами 1°—3°. Множество $\mathscr{X}$ вместе с заданной на нем топологией $\mathbb{T}$ (т. е. собственно говоря, пара $(\mathscr{X}, \mathbb{T})$) называется *топологическим пространством*.

Таким образом, мы можем сказать, что определение 1 вводит в каждое многообразие некоторую топологию или, иначе говоря, что в силу этого определения *каждое многообразие является топологическим пространством*. В этом смысле топология на $\mathscr{X}$ является структурой, производной от гладкости на $\mathscr{X}$.

Эта ситуация вполне аналогична ситуации для метрических пространств, топология которых является структурой, производной от метрики.

В дальнейшем, говоря о топологии на гладком (или топологическом) многообразии, мы всегда будем иметь в виду топологию, вводимую определением 1.

Согласно определению 1, для того чтобы проверить открыто или нет данное подмножество $O\subset\mathscr{X}$, необходимо рассмотреть множества $h(O\cap U)$ для всех карт (U, h) многообразия $\mathscr{X}$. Конечно, на практике это невозможно, и возникает вопрос, нельзя ли эти карты как-то ограничить. Оказывается, что вполне достаточно лишь карт одного произвольного атласа и, более того, лишь карт, покрывающих множество O. Именно, справедливо следующее предложение:

Предложение 1. *Пусть $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ — такое семейство карт многообразия $\mathscr{X}$, что*

$$O\subset \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

Тогда, для того чтобы множество O было открыто в $\mathscr{X}$, достаточно, чтобы для любого α множество $h_\alpha(O\cap U_\alpha)$ было открыто в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Нужно доказать, что если множество O удовлетворяет условиям этого предложения, то для любой карты (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ множество $h(O\cap U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, т. е. — в случае, когда это множество непусто, — любая его точка $\boldsymbol{x}$ является внутренней. Имея это в виду, рассмотрим в многообразии $\mathscr{X}$ точку $p=h^{-1}(\boldsymbol{x})$.

Так как $\boldsymbol{x}\in h(O\cap U)$, то $p\in O\cap U$ и, в частности, $p\in O$. Поэтому существует такое α, что $p\in U_\alpha$.

В силу согласованности карт (U_α, h_α) и (U, h) множества $h_\alpha(U_\alpha\cap U)$ и $h(U_\alpha\cap U)$ открыты в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, по условию множество $h_\alpha(O\cap U_\alpha)$ также открыто. Поэтому открыто и множество

$$h_\alpha(O\cap U_\alpha\cap U)=h_\alpha(O\cap U_\alpha)\cap h_\alpha(U_\alpha\cap U).$$

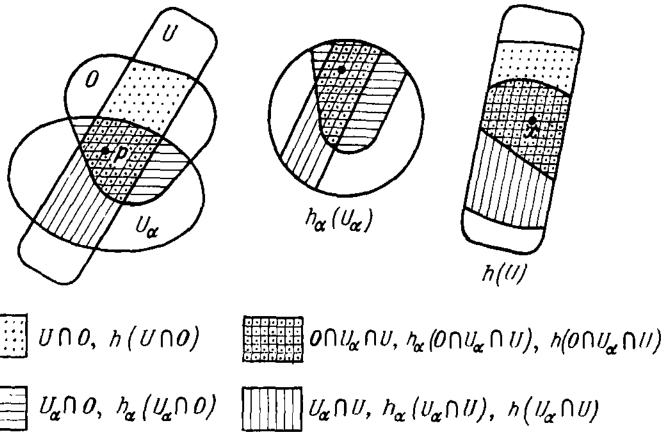
С другой стороны, гомеоморфизм

$$h\circ h_\alpha^{-1}\colon h_\alpha(U_\alpha\cap U)\to h(U_\alpha\cap U)$$

переводит это множество в множество $h(O\cap U_\alpha\cap U)$, которое, следовательно, также открыто. Поскольку

$$x\in h(O\cap U_\alpha\cap U)\subset h(O\cap U),$$

это доказывает, что точка x является внутренней точкой множества $h(O\cap U)$. □



Следствие 1. *Для любой карты (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ подмножество $V\subset U$ тогда и только тогда открыто в $\mathscr{X}$, когда множество $h(V)$ открыто в $\mathbb{R}^n$.*

В частности, само множество U открыто в $\mathscr{X}$. □

Для любого открытого подмножества O произвольного (класса C^r) многообразия $\mathscr{X}$ все карты (U, h), для которых $U\subset O$, составляют, очевидно, атлас на O (см. пример 2 предыдущей лекции). Этот атлас максимален, т. е. является гладкостью на O (того же класса C^r). Об этой гладкости говорят, что она *индуцирована* гладкостью многообразия $\mathscr{X}$, а множество O с этой гладкостью называют *открытым подмногообразием* многообразия $\mathscr{X}$. По определению $\dim O=\dim\mathscr{X}$.

В дальнейшем каждое открытое множество O произвольного многообразия $\mathscr{X}$ мы всегда будем рассматривать как многообразие с индуцированной гладкостью.

Заметим, что каждый атлас $\mathbf{A}=\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ многообразия $\mathscr{X}$ определяет атлас $O\cap\mathbf{A}$ многообразия O, состоящий из карт $(O \cap U_\alpha, h_\alpha|_{O \cap U_\alpha})$. Таким образом, чтобы получить индуцированную гладкость на O, нет нужды рассматривать все карты на $\mathscr{X}$, достаточно лишь карт одного атласа.

Из свойства 2° открытых множеств непосредственно следует, что для любого подмножества A топологического пространства $\mathscr{X}$ существует наибольшее открытое множество (возможно, пустое), содержащееся в A (им будет объединение всех содержащихся в A открытых множеств). Это открытое множество обозначается символом $\operatorname{Int} A$ (или $\dot{A}$) и называется *внутренностью* множества A. Его точки называются *внутренними точками* множества A.

Ясно, что *множество A тогда и только тогда открыто, когда* $\operatorname{Int} A = A$, *т. е. когда все его точки внутренние.*

Для любой точки (или, более общо, для любого подмножества) топологического пространства $\mathscr{X}$ каждое содержащее эту точку (это подмножество) открытое множество называется *окрестностью* этой точки (этого подмножества). По определению *точка тогда и только тогда является внутренней точкой подмножества A, когда в A содержится некоторая окрестность этой точки.*

Таким образом, при $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ введенное понятие внутренней точки совпадает с понятием, известным из курса анализа.

Для любой карты (U, h) произвольного многообразия $\mathscr{X}$ множество U (носитель карты) является окрестностью каждой точки $p \in U$. На этом основании носители карт многообразия $\mathscr{X}$ называются также *координатными окрестностями.*

Ясно, что любая окрестность V точки $p \in U$, содержащаяся в координатной окрестности U, также будет координатной окрестностью (с координатным отображением $h|_V$). Следовательно, *любая окрестность O точки p содержит некоторую координатную окрестность* (такой окрестностью будет, например, пересечение $O \cap U$).

Множество окрестностей точки p топологического пространства $\mathscr{X}$ называется *базой окрестностей* (или *фундаментальной системой окрестностей*), если любая окрестность точки p содержит окрестность из этого множества. (Наглядно говоря, база должна содержать сколь угодно малые окрестности.)

В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *координатные окрестности каждой точки произвольного многообразия образуют базу ее окрестностей.*

Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно биективно и множество $O \subset \mathscr{X}$ тогда и только тогда открыто в $\mathscr{X}$, когда множество $fO \subset \mathscr{Y}$ открыто в $\mathscr{Y}$. Таким образом, гомеоморфизм — это биективное отображение, устанавливающее взаимно однозначное соответствие топологий.

Пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ называются *гомеоморфными*, если существует хотя бы один гомеоморфизм $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Ясно, что топологические свойства (т. е. свойства, формулируемые исключительно в терминах открытых множеств) гомеоморфных пространств одинаковы. Таким образом, с точки зрения топологических свойств гомеоморфные пространства неразличимы.

Примером топологического свойства является свойство топологического пространства $\mathscr{X}$ иметь в любой своей точке p счетную базу окрестностей. О таких пространствах говорят, что они удовлетворяют *первой аксиоме счетности* (или что они являются пространствами *счетного локального веса*).

Легко видеть, что *любое метрическое пространство $\mathscr{X}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности* (для любой его точки открытые шары с центром в этой точке, радиусы которых являются рациональными числами, составляют счетную базу ее окрестностей). В частности, *первой аксиоме счетности удовлетворяет пространство $\mathbb{R}^n$.*

Каждое подмножество A топологического пространства $\mathscr{X}$ обладает топологией (называемой *индуцированной топологией*), открытыми множествами которой являются пересечения $O \cap A$ с A открытых множеств O пространства $\mathscr{X}$. Снабженное этой топологией подмножество A называется *подпространством* пространства $\mathscr{X}$.

Ясно, что любое подпространство пространства, удовлетворяющего первой аксиоме счетности, также удовлетворяет этой аксиоме. Поэтому, в частности, *любое подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Семейство $\{U_\alpha\}$ открытых множеств топологического пространства $\mathscr{X}$ называется его *открытым покрытием*, если любая точка этого пространства принадлежит хотя бы одному элементу этого семейства, т. е. если

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} = \mathscr{X}.$$

Например, носители U_α карт (U_α, h_α) произвольного атласа многообразия $\mathscr{X}$ составляют открытое покрытие этого многообразия.

Пространство $\mathscr{X}$ называется *локально евклидовым*, если оно обладает открытым покрытием $\{U_\alpha\}$, каждый элемент U_α которого гомеоморфен некоторому открытому множеству пространства $\mathbb{R}^n$ (и, значит, удовлетворяет первой аксиоме счетности).

Но ясно, что если топологическое пространство $\mathscr{X}$ обладает открытым покрытием $\{U_\alpha\}$, все элементы U_α которого удовлетворяют (в индуцированной топологии) первой аксиоме счетности, то само пространство $\mathscr{X}$ также удовлетворяет первой аксиоме счетности. (Этот факт выражают, говоря, что свойство удовлетворять первой аксиоме счетности является *локальным свойством*.) Поэтому *каждое локально евклидово пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

С другой стороны, из следствия 1 непосредственно вытекает, что *для любой карты (U, h) произвольного многообразия $\mathscr{X}$ отображение h: $U \longrightarrow h(U)$ является гомеоморфизмом* (причем множество $h(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$).

[На этом основании координатные отображения h, рассматриваемые как отображения на $h(U)$, называются обычно *координатными гомеоморфизмами*.]

Следовательно, поскольку координатные окрестности составляют открытое покрытие многообразия $\mathscr{X}$ (этим свойством обладают даже координатные окрестности, являющиеся областями определения карт некоторого атласа), *любое многообразие является локально евклидовым пространством и потому удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Множество $\mathfrak{B}$ открытых множеств топологического пространства называется его *базой* (или — более распространенно — *базой открытых множеств*), если каждое открытое множество этого пространства является объединением множеств из $\mathfrak{B}$. О пространствах, обладающих *счетной базой* (т. е. базой, содержащей счетное число открытых множеств), говорят, что они удовлетворяют *второй аксиоме счетности* (а также, что они являются пространствами *счетного веса*).

Ясно, что любое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности, но обратное, вообще говоря, неверно.

В этой терминологии лемма 2 лекции 1 утверждает (применительно к пространству $\mathbb{R}^n$), что все открытые рациональные шары пространства $\mathbb{R}^n$, т. е. шары, радиусы которых рациональны, а центры имеют рациональные координаты, составляют базу этого пространства. Таким образом, *пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности*.

Тем не менее существуют многообразия, не удовлетворяющие второй аксиоме счетности (так что в этом отношении вторая аксиома счетности резко контрастирует с первой). Простейшим примером является дизъюнктное объединение несчетного семейства пространств $\mathbb{R}^n$. (Более интересный пример мы приведем в лекции 11.)

Очень часто, вводя в множество $\mathscr{X}$ топологию, указывают явно лишь некоторую ее базу. Очевидно при этом, что *множество $\mathfrak{B}$ подмножеств множества $\mathscr{X}$ тогда и только тогда может служить базой открытых множеств некоторой топологии на $\mathscr{X}$, когда пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{B}$ является объединением множеств из $\mathfrak{B}$.*

В частности, базой некоторой топологии может служить любое множество подмножеств, замкнутое относительно пересечений.

Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *хаусдорфовым* (или *отделимым*), если любые две его точки p и q обладают непересекающимися окрестностями.

Ясно, что любое метрическое пространство хаусдорфово и, значит, в частности, хаусдорфово пространство $\mathbb{R}^n$. Тем не менее *существуют гладкие нехаусдорфовы многообразия.*

Пример 1. Пусть $\mathscr{X}=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{p_0, q_0\}$, где p_0, q_0 — некоторые элементы (не принадлежащие $\mathbb{R}\setminus\{0\}$), и пусть

$$U=\mathscr{X}\setminus\{q_0\}=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{p_0\},$$
$$V=\mathscr{X}\setminus\{p_0\}=(\mathbb{R}\setminus\{0\})\cup\{q_0\}.$$

Определим биективные отображения

$$h\colon U\longrightarrow\mathbb{R},\quad k\colon V\longrightarrow\mathbb{R}$$

формулами

$$h(p)=\begin{cases} p, & \text{если } p\in\mathbb{R}\setminus\{0\},\\ 0, & \text{если } p=p_0\end{cases}$$

для любого $p \in U$ и

$$k(q)=\begin{cases} q, & \text{если } q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{если } q=q_0 \end{cases}$$

для любого $q \in U$.

Ясно, что карты (U, h) и (V, k) составляют атлас, и, значит, определяют на $\mathscr{X}$ структуру гладкого многообразия (класса C^ω). В топологии этого многообразия любые две окрестности точек p_0 и q_0 пересекаются, и, значит, эта топология не хаусдорфова.

Построенное гладкое многообразие $\mathscr{X}$ называется *раздвоенной в нуле прямой* (а также *нехаусдорфовой прямой с особой точкой* 0 *кратности* 2).

Аналогичным образом определяется *нехаусдорфова прямая с особой точкой* 0 *кратности* n, где n — произвольное целое число $\geqslant 2$.

Очень часто структуру гладкого многообразия приходится вводить на множестве $\mathscr{X}$, на котором уже есть топология, т. е. которое является топологическим пространством.

В этом случае всегда молчаливо предполагается, что эта структура должна определять на $\mathscr{X}$ данную топологию, т. е., как обычно говорят, должна быть *согласована* с этой топологией.

Для этого, конечно, необходимо, чтобы атлас, задающий на $\mathscr{X}$ обладающую этим свойством гладкую структуру, состоял из карт (U, h), носители U которых открыты, а отображения $h: U \to h(U)$ являются гомеоморфизмами. Оказывается, что это условие и достаточно.

Предложение 2. *Пусть* $\mathbf{A}=\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ — *такой атлас на топологическом пространстве* $\mathscr{X}$, *что для любого* α *множество* U_α *открыто в* $\mathscr{X}$ *и отображение* $h_\alpha: U_\alpha \to h_\alpha(U_\alpha)$ *является гомеоморфизмом. Тогда гладкость, определяемая атласом* $\mathbf{A}$, *согласована с топологией пространства* $\mathscr{X}$.

Доказательство. Согласно предложению 1 множество $O \subset \mathscr{X}$ тогда и только тогда открыто в топологии $\mathbb{T}_{\mathbf{A}}$, задаваемой гладкостью, определяемой атласом $\mathbf{A}$, когда для любого α множество $h_\alpha(O \cap U_\alpha)$ открыто (в $\mathbb{R}^n$, а потому и в $h_\alpha(U_\alpha)$), т. е., поскольку отображения h_α являются гомеоморфизмами, когда множество $O \cap U_\alpha$ открыто (в U_α, а потому — в силу того, что U_α открыто в $\mathscr{X}$, — и в $\mathscr{X}$).

С другой стороны, если множество $O \subset \mathscr{X}$ открыто в $\mathscr{X}$, то,—поскольку U_α открыто в $\mathscr{X}$,—множество $O \cap U_\alpha$ также открыто в $\mathscr{X}$, а если все множества $O \cap U_\alpha$ открыты в $\mathscr{X}$, то ввиду равенства

$$O = \bigcup_\alpha (O \cap U_\alpha) \tag{1}$$

множество O открыто в $\mathscr{X}$. Следовательно, множества, открытые в топологии $\mathbb{T}_\mathbb{A}$,—это в точности множества, открытые в топологии пространства $\mathscr{X}$. $\square$

Замечание 1. Для прояснения изложенного доказательства стоит заметить, что фактически оно сводится к двум тривиальным замечаниям. Первое состоит в том, что топология каждого множества U_α определяется исключительно данным отображением h_α (множество $O \subset U_\alpha$ тогда и только тогда открыто в U_α, когда множество $h_\alpha(O)$ открыто в $\mathbb{R}^n$), а второе—в том, что для любого топологического пространства $\mathscr{X}$ и любого его открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ топология пространства $\mathscr{X}$ однозначно определяется (посредством равенства (1)) топологиями элементов U_α этого покрытия.

Замечание 2. В силу предложения 2 гладкое многообразие может быть *определено* как топологическое пространство $\mathscr{X}$, на котором задан атлас, носители U_α карт (U_α, h_α) которого открыты, а координатные отображения h_α являются гомеоморфизмами. При этом требование, чтобы для любых α и β множества $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и $h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ были открыты в $\mathbb{R}$, будет автоматически выполнено. Именно это определение обычно и встречается в литературе (иногда в несколько ином словесном оформлении), несмотря на его очевидную методологическую дефектность (аналогичное определение метрических пространств—в котором эта дефектность проявляется наиболее ярко—гласило бы, что метрическим пространством называется топологическое пространство $\mathscr{X}$, для которого задана непрерывная функция $\rho\colon \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая обычным аксиомам метрического пространства).

В примерах предыдущей лекции мы как раз и вводили гладкости в множества ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{R}P^n$), уже являющиеся топологическими (и даже метрическими) пространствами. [За расстояние между точками сферы $\mathbb{S}^n$ принимается угол между радиус-векторами, а за расстояние между точками пространства $\mathbb{R}P^n$—угол между ними, как прямыми в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$. В обоих случаях—проверьте это!—аксиомы метрических пространств выполнены.]

Задача 1. Докажите, что введенные в примерах 1—8 лекции 6 на пространствах $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ и $\mathbb{R}P^n$ гладкости согласованы с топологиями этих пространств.

Замечание 3. Пример 3 лекции 6 показывает, что на топологическом пространстве возможны различные гладкости (класса C^ω), согласованные с его топологией.

При $r=0$, т. е. для топологических многообразий, ситуация оказывается совсем другой.

Пусть $\mathscr{X}$—топологическое многообразие размерности n, и пусть (U, h)—некоторая карта в $\mathscr{X}$. По определению это означает, что $U \subset \mathscr{X}$, а h является биективным отображением вида $U \to h(U)$, где $h(U)$—открытое множество в $\mathbb{R}^n$. При этом, как уже неоднократно отмечалось, если (U, h) является картой многообразия $\mathscr{X}$, то U открыто в $\mathscr{X}$ и h: $U \to h(U)$ является гомеоморфизмом. Оказывается, что при $r=0$ верно и обратное.

Предложение 3. *Карта (U, h) в топологическом многообразии $\mathscr{X}$, для которой U открыто в $\mathscr{X}$, а отображение h: $U \to h(U)$ представляет собой гомеоморфизм, является картой многообразия $\mathscr{X}$ (принадлежит его максимальному атласу $\mathbf{A}_{\text{макс}}$).*

Для доказательства этого предложения мы воспользуемся следующей леммой:

Лемма 1. *Если для карт (U, h) и (V, k) в топологическом пространстве $\mathscr{X}$ множества U и V открыты в $\mathscr{X}$, а отображения h: $U \to h(U)$ и k: $V \to h(V)$ являются гомеоморфизмами, то эти карты согласованы (в классе C^0).*

Предложение 3 является непосредственным следствием леммы 1, поскольку, согласно этой лемме, карта (U, h) из предложения 3 согласована с каждой картой (V, k) максимального атласа $\mathbf{A}_{\text{макс}}$ многообразия $\mathscr{X}$ и, значит, в нем содержится. Поэтому нам нужно лишь доказать лемму 1.

Доказательство леммы 1. Пересечение $U \cap V$ открыто в $\mathscr{X}$ (а значит, и в U). Следовательно, поскольку отображения h и k являются гомеоморфизмами, множества $h(U \cap V)$ и $k(U \cap V)$ открыты (соответственно в $h(U)$ и $h(V)$, а значит, и в $\mathbb{R}^n$).

Кроме того, так как отображения

$$h|_{U\cap V}\colon U \cap V \to h(U \cap V) \quad \text{и} \quad k|_{U\cap V}\colon U \cap V \to k(U \cap V)$$

являются, очевидно, гомеоморфизмами, то их композиция

$$h \circ k^{-1}\colon k(U \cap V) \to h(U \cap V)$$

также будет гомеоморфизмом. Таким образом, карты (U, h) и (V, k) согласованы. $\square$

Предложение 3 означает, что при $r=0$ карты многообразия $\mathscr{X}$ характеризуются чисто топологически, т. е. что *структура топологического многообразия на топологическом пространстве $\mathscr{X}$ (когда она существует) определяется единственным образом.* Иными словами, структура топологического многообразия на топологическом пространстве $\mathscr{X}$ не вносит в это пространство ничего нового и класс топологических многообразий — это просто некоторый подкласс класса всех топологических пространств.

Чтобы узнать, является ли данное топологическое пространство $\mathscr{X}$ топологическим n-мерным многообразием, надо рассмотреть всевозможные открытые подмножества $U \subset \mathscr{X}$, гомеоморфные открытым подмножествам пространства $\mathbb{R}^n$. Пространство $\mathscr{X}$ тогда и только тогда будет многообразием, когда все карты вида (U, h), где $h\colon U \to h(U)$ — некоторый гомеоморфизм (а $h(U)$ — открытое множество в $\mathbb{R}^n$), составляют атлас, т. е. — поскольку согласно лемме 1 две такие карты согласованы, — когда множества U составляют открытое покрытие пространства $\mathscr{X}$. Это доказывает, что *топологические многообразия — это в точности локально евклидовы пространства.*

Замечание 4. Существуют локально евклидовы пространства (= топологические многообразия), в которых нельзя ввести структуру гладкого (класса C^r с $r>0$) многообразия. (Такие многообразия называются *несглаживаемыми.*) Условия, необходимые и достаточные для существования на топологическом многообразии гладкости, согласованной с его топологией, известны, но весьма сложны.

В дальнейшем, если только явно не оговорено противное, топологические многообразия мы из рассмотрения будем исключать.

Как уже сказано в лекции 6, случай $n=0$ мы, вообще говоря, не исключаем. Однако на самом деле он мало интересен.

Действительно, при $n=0$ пространство $\mathbb{R}^n$ состоит только из одной точки 0, и, значит, в нульмерном многообразии $\mathscr{X}$ каждая точка имеет только одну координатную окрестность, состоящую из самой этой точки. Таким образом, в нульмерном многообразии $\mathscr{X}$ каждая точка (а потому и любое его подмножество) является открытым множеством. Обладающее этим свойством топологическое пространство называется *дискретным*. Поскольку любое дискретное пространство обладает, очевидно, единственной структурой нульмерного многообразия (в которой каждая его точка является носителем карты), мы видим, следовательно, что *нульмерные многообразия — это в точности дискретные пространства.*

Заметим, что карты нульмерного многообразия не пересекаются. Поэтому мы имеем право приписать такому многообразию произвольный класс C^r.

Каждое нульмерное многообразие (=дискретное пространство) $\mathscr{X}$ метризуемо посредством метрики, в которой расстояние между двумя любыми различными точками равно единице. Это оправдывает наглядное представление об $\mathscr{X}$ как о множестве, рассыпанном на отдельные изолированные точки.

В дальнейшем случай $n=0$ мы будем, как правило, из рассмотрения исключать.

Отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ топологических пространств называется *непрерывным в точке* $p\in\mathscr{X}$, если для любой окрестности V точки $f(p)$ в $\mathscr{Y}$ существует такая окрестность U точки p в $\mathscr{X}$, что $f(U)\subset V$ (сравните с (ε, δ)-определением непрерывной функции).

Отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$, непрерывное в каждой точке $p\in\mathscr{X}$, называется *непрерывным на* $\mathscr{X}$.

Легко видеть, что *отображение* $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *тогда и только тогда непрерывно на* $\mathscr{X}$, *когда для каждого открытого множества* $O\subset\mathscr{Y}$ *его полный прообраз* $f^{-1}O=\{p\in\mathscr{X};\ f(p)\in O\}$ *открыт в* $\mathscr{X}$. Действительно, если отображение f непрерывно, то для любой точки $p\in f^{-1}O$ существует — поскольку O является окрестностью точки $f(p)$ — такая ее окрестность U в $\mathscr{X}$, что $fU\subset O$. Но тогда $U\subset f^{-1}O$ и, значит, точка p является внутренней точкой множества $f^{-1}O$. Следовательно, множество $f^{-1}O$ открыто. Обратно, если для любого открытого множества $O\subset\mathscr{Y}$ множество $f^{-1}O\subset\mathscr{X}$ открыто, то, в частности, для любой точки $p\in\mathscr{X}$ и любой окрестности V точки $f(p)$ в $\mathscr{Y}$ множество $U=f^{-1}V$ (содержащее точку p) открыто (т. е. является окрестностью точки p). Так как $fU \subset V$, то, следовательно, отображение f непрерывно в точке p. $\square$

Отсюда следует, что *гомеоморфизмы* $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — *это в точности непрерывные биективные отображения, для которых обратное отображение* $f^{-1}: \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ *также непрерывно.*

Инъективное непрерывное отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, являющееся гомеоморфизмом на подпространство $f\mathscr{X} \subset \mathscr{Y}$, называется *мономорфизмом* (ср. лекцию 1).

Заметим, что если множество $O \subset \mathscr{X}$ открыто в $\mathscr{X}$, и отображение $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ непрерывно, то, вообще говоря, множество fO может не быть открытым в $\mathscr{Y}$. Например, так заведомо будет, если подмножество $f\mathscr{X}$ пространства $\mathscr{Y}$ не имеет ни одной внутренней точки. (Конкретный пример: $\mathscr{X} = \mathbb{R}$, $\mathscr{Y} = \mathbb{R}^2$ и f — вложение $x \mapsto (x, 0)$.)

Непрерывные отображения $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, обладающие тем свойством, что для любого открытого в $\mathscr{X}$ множества O множество $fO \subset \mathscr{Y}$ открыто в $\mathscr{Y}$ называются *открытыми.*

Задача 2. Покажите, что:

а) Для каждого топологического пространства $\mathscr{X}$ тождественное отображение $\mathrm{id}: \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $p \mapsto p$, непрерывно.

б) Для любых двух непрерывных отображений вида $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g: \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ их композиция

$$g \circ f: \mathscr{X} \to \mathscr{Z}, \quad p \mapsto g(f(p)),$$

также является непрерывным отображением.

Свойства **а** и **б** означают, что совокупность TOP всех топологических пространств и всех их непрерывных отображений составляет *категорию.*

Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — гладкие многообразия (размерностей n и m соответственно), то для любой точки $p_0 \in \mathscr{X}$, любого непрерывного отображения $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и любой координатной окрестности V точки $f(p)$ в $\mathscr{Y}$ окрестность U точки p_0 в $\mathscr{X}$, для которой $fU \subset V$, мы также можем считать координатной. Поэтому, если

$$h: U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{и} \quad k: V \to k(V) \subset \mathbb{R}^m$$

— координатные отображения, то формула

$$\mathring{f} = k \circ (f|_U) \circ h^{-1}$$

будет определять некоторое отображение

$$\mathring{f}: h(U) \to k(V) \tag{2}$$

открытого множества $h(U)$ пространства $\mathbb{R}^n$ в открытое множество $k(V)$ пространства $\mathbb{R}^m$. Это отображение задается m функциями

$$(3)\qquad y^j = f^j(x^1, \ldots, x^n), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

от n переменных, выражающих координаты $y^1, \ldots, y^m$ точки $\boldsymbol{y} = \mathring{f}(\boldsymbol{x}) \in k(V) \subset \mathbb{R}^m$ через координаты $x^1, \ldots, x^n$ точки $\boldsymbol{x} \in h(U) \subset \mathbb{R}^n$ (т. е., иными словами, локальные координаты точки $q = f(p) \in V$ через локальные координаты точки $p \in U$). Мы будем говорить, что функции (3) *выражают* (или *задают*) *отображение* f *в картах* (U, h) *и* (V, k) (в локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^m$).

Задача 3. Докажите, что если (U', h') и (V', k') — другие карты, обладающие тем свойством, что $p_0 \in U'$ и $fU' \subset V'$, то функции f'^j, выражающие отображение f в картах (U', h') и (V', k') тогда и только тогда гладки в точке $h'(p_0)$, когда функции (3) гладки в точке $h(p_0)$.

В этом смысле свойство гладкости функций (3) не зависит от выбора карт (U, h) и (V, k).

Определение 3. Непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называется *гладким в точке* $p_0 \in \mathscr{X}$, если в некоторых (а потому и во всех) картах (U, h) и (V, k), обладающих тем свойством, что $p_0 \in U$ и $fU \subset V$, функции (3), выражающие отображение f, являются в точке $h(p_0)$ гладкими функциями (данного класса C^r).

Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, гладкое во всех точках $p \in \mathscr{X}$, называется *гладким*.

Задача 4. Докажите, что:

а) Для каждого гладкого многообразия $\mathscr{X}$ тождественное отображение id: $\mathscr{X} \to \mathscr{X}$ гладко.

б) Для любых двух гладких отображений вида $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ их композиция

$$g \circ f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}, \quad p \mapsto g(f(p)).$$

является гладким отображением.

По определению это означает, что *совокупность* DIFF *всех гладких многообразий и всех их гладких отображений является категорией.*

Определение 4. Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гладких многообразий называется *диффеоморфизмом*, если

1° оно биективно,

2° гладко,

3° обратное отображение $f^{-1}\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ гладко (и, значит, тоже является диффеоморфизмом).

Очевидным примером диффеоморфизма является произвольное координатное отображение $h: U \to h(U)$. (Вопрос: что за функции (3) задают это отображение?)

Обратно, легко видеть, что *для любого открытого множества U гладкого многообразия $\mathscr{X}$ и любого его диффеоморфизма $h: U \to h(U)$ на открытое множество $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ пара (U, h) является картой многообразия $\mathscr{X}$* (принадлежит его максимальному атласу). Действительно, утверждение, что (U, h) принадлежит максимальному атласу, означает, что для любой карты (V, k) этого атласа карта (U, h) согласована с картой (V, k), т. е. множества $h(U \cap V)$ и $k(U \cap V)$ открыты в $\mathbb{R}^n$ (или, что равносильно,— в $h(U)$ и $k(V)$), а отображение $k \circ h^{-1}: h(U \cap V) \to k(U \cap V)$ является диффеоморфизмом. Но первое свойство следует из того, что множество $U \cap V$ открыто в V и в U, а отображения h и k являются гомеоморфизмами, а второе—из того, что оба эти отображения (или, точнее, их ограничения на $U \cap V$) являются диффеоморфизмами (ср. выше доказательство предложения 3 и леммы 1). □

Многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ называются *диффеоморфными*, если существует хотя бы один диффеоморфизм $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Такие многообразия имеют одни и те же дифференциальные свойства (свойства, выражающиеся в терминах гладкостей) и в этом смысле одинаковы. В частности, $\dim \mathscr{X} = \dim \mathscr{Y}$.

Задача 5. Докажите, что гладкие многообразия, получающиеся из прямой $\mathbb{R}$ введением стандартной гладкости и гладкости из примера 3 лекции 6, диффеоморфны.

Замечание 5. Можно показать—попытайтесь это сделать!—что любое одномерное некомпактное гладкое многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, диффеоморфно прямой $\mathbb{R}$ в стандартной гладкости (а компактное—окружности $\mathbb{S}^1$). Любопытно, что при $n=4$ (и только при $n=4$) на $\mathbb{R}^n$ существуют гладкости (строящиеся очень сложно), согласованные с топологией на $\mathbb{R}^n$, относительно которых $\mathbb{R}^n$ не диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ в стандартной гладкости.

Пусть $\mathscr{X}$—некоторое множество, $\mathscr{Y}$—гладкое многообразие и $f: \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$—биективное отображение. Тогда *на $\mathscr{X}$ существует единственная гладкость, по отношению к которой f является диффеоморфизмом*. Картами этой гладкости являются возможные пары вида $(f^{-1}U, h \circ f)$, где (U, h) — произвольная карта многообразия $\mathscr{Y}$. Об этой гладкости говорят, что она *перенесена* на $\mathscr{X}$ с $\mathscr{Y}$ посредством f.

Ясно, что *гладкости, перенесенные на $\mathscr{X}$ с $\mathscr{Y}$ посредством биективных отображений $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, тогда и только тогда совпадают, когда отображение $g \circ f^{-1}\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Y}$ является диффеоморфизмом.*