Лекция 8

Топологическая инвариантность размерности многообразий.— Размерность по покрытиям.— Компактные пространства.— Лемма Лебега.— Оценка сверху размерности компактных подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$.— Свойство монотонности размерности.— Замкнутые множества.— Монотонность размерности по замкнутым множествам.— Прямое произведение топологических пространств.— Компактность прямого произведения компактных пространств.

Сделанное в предыдущей лекции заключение о том, что структура топологического многообразия на топологическом пространстве $\mathscr{X}$ не вносит в это пространство ничего нового, на самом деле было несколько поспешным, поскольку априори не исключено, что одно и то же пространство $\mathscr{X}$ может обладать такими открытыми покрытиями $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$, что каждое множество U_α гомеоморфно некоторому открытому множеству $\mathring{U}_\alpha$ пространства $\mathbb{R}^n$, а каждое множество V_β — некоторому открытому множеству $\mathring{V}_\beta$ пространства $\mathbb{R}^m$, где $n \neq m$, и, значит, на пространстве $\mathscr{X}$ будут существовать две различные структуры топологического многообразия, в одной из которых $\mathscr{X}$ является n-мерным, а в другой m-мерным многообразием. Вопрос: может так случиться или нет — равносилен, очевидно, вопросу: *является ли размерность топологическим инвариантом*, т. е. обязательно ли гомеоморфные многообразия имеют одинаковую размерность.

Пусть такие покрытия $\{U_\alpha\}$ и $\{V_\beta\}$ существуют. Выбрав два множества U_{α_0} и V_{β_0}, обладающие тем свойством, что множество $W = U_{\alpha_0} \cap V_{\beta_0}$ не пусто (ясно, что это всегда можно сделать), рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество O_1, являющееся образом множества W при гомеоморфизме $U_{\alpha_0} \to \mathring{U}_{\alpha_0}$, а в пространстве $\mathbb{R}^m$ множество O_2, являющееся образом множества W при гомеоморфизме $V_{\beta_0} \to \mathring{V}_{\beta_0}$. Множества O_1 и O_2 открыты (в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно) и гомеоморфны. Обратно, если такие множества существуют, то они составляют пример гомеоморфных многообразий различных размерностей.

Таким образом, наш вопрос сводится к тому, могут ли быть гомеоморфны открытые множества в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ с $n \neq m$. Мы покажем, что *ответ на этот* *вопрос отрицателен* и, значит, справедлива следующая теорема о топологической инвариантности размерности многообразий, полностью снимающая все сомнения:

Теорема 1. *Гомеоморфные многообразия имеют одну и ту же размерность.*

Чтобы доказать теорему 1, мы для любого топологического пространства $\mathscr{X}$ определим целое число $\dim \mathscr{X}$, которое будем называть его *размерностью*. По определению это число топологически инвариантно, т. е. одно и то же для любых гомеоморфных пространств. Кроме того, мы докажем, что для любого замкнутого ограниченного (компактного; см. ниже) множества $F \subset \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$\dim F \leqslant n, \tag{1}$$

причем в случае, когда F является кубом I^n пространства $\mathbb{R}^n$, состоящим из точек $\boldsymbol{t}=(t^1, \ldots, t^n)$, для которых $|t^i| \leqslant 1$ при всех $i=1, \ldots, n$, это неравенство переходит в равенство:

$$\dim I^n = n. \tag{2}$$

Этого уже достаточно для доказательства теоремы 1.

Действительно, пусть O_1 и O_2 — гомеоморфные открытые множества пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно. Поскольку множество O_1 открыто, оно содержит замкнутое и ограниченное подмножество F_1, гомеоморфное кубу I^n. Пусть F_2 — образ этого подмножества при гомеоморфизме $O_1 \to O_2$. Подмножество F_2 пространства $\mathbb{R}^m$ также замкнуто и ограничено (докажите!). Поэтому, согласно формуле (1), $\dim F_2 \leqslant m$. С другой стороны, так как функция $\dim$ топологически инвариантна, то $\dim F_2 = \dim F_1 = \dim I^n = n$. Следовательно, $n \leqslant m$. Так как множества O_1 и O_2 играют в этом рассуждении симметричные роли, то, переставив их, мы аналогично получим, что $m \leqslant n$. Следовательно, $n = m$, что и доказывает теорему 1. $\square$

Замечание 1. Следует иметь в виду, что для многообразия $\mathscr{X}$ (даже гладкого) число $\dim \mathscr{X}$ *может быть отлично* от его размерности в смысле определения 5 лекции 6 (см. ниже пример 4). Временно (только в этой лекции!) мы будем размерность многообразия $\mathscr{X}$ в смысле определения 5 лекции 6 обозначать символом $\dim' \mathscr{X}$. Ниже (см. замечание 3) мы дадим этому числу топологическую характеристику (и тем самым еще раз докажем теорему 1).

Функцию dim мы введем посредством следующей серии определений:

Определение 1. Говорят, что покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{X}$ *вписано* в покрытие $\{V_\beta\}$, если для любого α существует такое β, что $U_\alpha \subset V_\beta$.

Определение 2. Говорят, что покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{X}$ имеет *кратность* $\leqslant n+1$, если пересечение любого $(n+2)$-членного подсемейства покрытия $\{U_\alpha\}$ пусто. Если покрытие $\{U_\alpha\}$ имеет кратность $\leqslant n+1$, но не имеет кратности $\leqslant n$ (т. е. в нем существует $(n+1)$-членное подсемейство с непустым пересечением), то говорят, что покрытие $\{U_\alpha\}$ имеет *кратность* $n+1$.

Определение 3. Говорят, что $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, если в любое конечное открытое покрытие пространства $\mathscr{X}$ можно вписать конечное открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$. Если $\dim \mathscr{X} \leqslant n$, но неверно, что $\dim \mathscr{X} \leqslant n+1$, то говорят, что $\dim \mathscr{X} = n$.

Пример 1. Дискретное пространство, очевидно, нульмерно.

Пример 2. Множество всех рациональных чисел (в топологии, индуцированной топологией вещественной прямой) также нульмерно (в любое конечное открытое покрытие этого множества можно вписать конечное покрытие, состоящее из непересекающихся интервалов и потому имеющее кратность 1).

Пример 3. По аналогичным соображениям нульмерно и множество всех иррациональных чисел.

Пример 4. Пусть $\mathscr{X}$ — нехаусдорфова прямая с особой точкой 0 кратности $n+1$, и пусть $\{U_\alpha\}$ — такое конечное открытое покрытие пространства $\mathscr{X}$, что все $n+1$ точек, на которые распалась точка 0, содержатся в различных элементах этого покрытия. Тогда кратность этого покрытия, а также любого открытого покрытия, вписанного в покрытие $\{U_\alpha\}$, будет $\geqslant n+1$. Это показывает, что $\dim \mathscr{X} \geqslant n$ (тогда как $\dim' \mathscr{X} = 1$).

Таким образом, для нехаусдорфовых многообразий инвариант dim не отражает адекватно интуитивного представления о размерности.

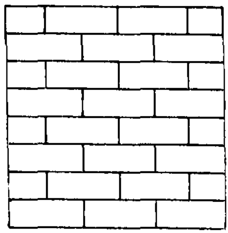
Замечание 2. Имеет ли место для всех хаусдорфовых многообразий равенство $\dim \mathscr{X} = \dim' \mathscr{X}$, неизвестно. Можно показать, что $\dim \mathscr{X} \doteq \dim' \mathscr{X}$, если многообразие

$\mathscr{X}$ паракомпактно (паракомпактные многообразия мы определим в лекции 23).

Пример 5. Наглядно очевидно, что в любое конечное открытое покрытие отрезка $I=[-1, 1]$ можно вписать покрытие, состоящее из интервалов, лишь чуть-чуть перекрывающихся их концами (и, следовательно, имеющее кратность 2). Поэтому $\dim I \leqslant 1$. Поскольку равенство $\dim I = 0$, очевидно, невозможно (отрезок I нельзя покрыть конечным семейством непересекающихся интервалов длины < 1), этим доказано, что $\dim I = 1$ (см. формулу (2)).

Задача 1. Обоснуйте строго изложенное рассуждение.

Пример 6. Покрыв квадрат $I^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leqslant x \leqslant 1, -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ рядами кирпичей так, чтобы стыки кирпичей каждого ряда приходились на середины кирпичей соседних рядов, и чуть-чуть увеличив затем каждый кирпич, мы получим конечное открытое покрытие квадрата кратности 3. Можно показать (см. ниже, но мы рекомендуем читателю доказать это немедленно), что подобного рода мостовую можно вписать в любое конечное открытое покрытие квадрата. Поэтому $\dim I^2 \leqslant 2$. (Обратное неравенство $\dim I^2 \geqslant 2$ доказывается, как мы увидим, существенно сложнее.)



Наша ближайшая цель будет состоять в обобщении изложенного в примере 6 построения на n-мерный куб

$$I^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n, -1 \leqslant t_1 \leqslant 1, \ \ldots, \ -1 \leqslant t_n \leqslant 1\}.$$

Для этого нам понадобится некоторая подготовительная работа.

Определение 4. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *компактным* (в русской математической литературе также *бикомпактным*, а у Бурбаки — *квазикомпактным*), если из любого его открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ можно выбрать конечное подпокрытие.

Легко видеть, что *любое бесконечное подмножество компактного пространства имеет предельную точку* (каждая окрестность которой содержит бесконечно много точек подмножества). Действительно, в противном случае, каждая точка пространства имеет окрестность, содержащую только конечное число точек подмножества. Эти окрестности составляют открытое покрытие, обладающее тем свойством, что никакое его конечное подсемейство не является покрытием (поскольку общее число точек подмножества, содержащееся в элементах этого подсемейства, конечно). Так как в компактном пространстве такое покрытие существовать не может, то, следовательно, предельные точки существуют. □

Подмножество A топологического пространства называется *компактным*, если оно компактно в индуцированной топологии (как подпространство).

Открытым покрытием в пространстве $\mathscr{X}$ подпространства A называется такое семейство $\{U_\alpha\}$ открытых множеств пространства $\mathscr{X}$, что

$$A \subset \bigcup_\alpha U_\alpha.$$

В этом случае пересечения $A \cap U_\alpha$ составляют открытое покрытие A как топологического пространства (в индуцированной топологии) и любое покрытие A может быть так получено (хотя и не единственным способом). Поэтому *подпространство тогда и только тогда компактно, когда из любого его открытого покрытия в $\mathscr{X}$ может быть выбрано конечное подпокрытие.*

Известная из курса анализа теорема Гейне—Бореля утверждает, что *любое замкнутое ограниченное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$ компактно*. В частности, *куб I^n компактен.*

Напомним, что *диаметром* подмножества K метрического пространства $\mathscr{X}$ называется число

$$d(K) = \sup_{p,\, q \in K} \rho(p, q),$$

где ρ—метрика на $\mathscr{X}$.

Лемма 1 (лемма Лебега). *Для произвольного открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ компактного метрического пространства $\mathscr{X}$ существует такое положительное число $\varepsilon > 0$, что любое подмножество K пространства $\mathscr{X}$ диаметра, меньшего чем ε, содержится в некотором элементе покрытия $\{U_\alpha\}$.*

Доказательство. Если такого числа ε не существует, то для любого $n > 0$ в $\mathscr{X}$ найдется подмножество K_n диаметра $< 1/n$, не содержащееся ни в одном элементе покрытия $\{U_\alpha\}$. Произвольно выбрав в K_n точку p_n, рассмотрим множество $\{p_n\}$. Так как $\mathscr{X}$ компактно, то это множество имеет хотя бы одну предельную точку p_0. Пусть $p_0 \in U_{\alpha_0}$, и пусть d — расстояние от p_0 до $\mathscr{X} \setminus U_{\alpha_0}$ (т. е. $d = \inf \rho(p_0, p)$, где $p \in \mathscr{X} \setminus U_\alpha$). Если $n > 2/d$ и $\rho(p_0, p_n) < d/2$, то

$$\rho(p_0, p) \leqslant \rho(p_0, p_n) + \rho(p_n, p) \leqslant \frac{d}{2} + \frac{1}{n} < d$$

для любой точки $p \in K_n$, и, значит, вопреки предположению, $K_n \subset U_{\alpha_0}$. □

Предусмотренное леммой Лебега число $\varepsilon > 0$ называется *числом Лебега* покрытия $\{U_\alpha\}$.

Покрытие $\{V_\beta\}$ метрического пространства $\mathscr{X}$ называется *ε-покрытием*, если $d(V_\beta) < \varepsilon$ для любого β.

Следствие 1. *Если ε — число Лебега покрытия $\{U_\alpha\}$, то любое конечное открытое ε-покрытие $\{V_\beta\}$ компактного метрического пространства $\mathscr{X}$ вписано в $\{U_\alpha\}$.* □

Следствие 2. *Для компактного метрического пространства $\mathscr{X}$ неравенство $\dim \mathscr{X} \leqslant n$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное открытое ε-покрытие пространства $\mathscr{X}$ кратности $\leqslant n+1$.* □

Теперь мы уже можем обобщить пример 6 на любое n (и на любое замкнутое ограниченное множество $F \subset \mathbb{R}^n$).

Предложение 1. *Для каждого замкнутого ограниченного множества $F \subset \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство*

$$\dim F \leqslant n.$$

Доказательство. Пусть $N > 0$. Индукцией по n построим для любого $n \geqslant 1$ некоторое специальное покрытие пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее из замкнутых множеств, которое мы будем называть *мостовой ранга N*. При этом точки пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, мы будем отождествлять с парами $(\boldsymbol{t}, t)$, где $\boldsymbol{t} \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$.

По определению мостовая ранга N прямой $\mathbb{R}$ состоит из отрезков $[(a-1)/N, a/N]$, $-\infty < a < +\infty$.

Пусть мостовая ранга N пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, $n \geqslant 2$, уже построена. За мостовую ранга N пространства $\mathbb{R}^n$ мы примем покрытие, которое состоит из всех множеств вида

$$K \times [(a-1)/N, a/N] = \{(\boldsymbol{t}, t) \in \mathbb{R}, \boldsymbol{t} \in K, (a-1)/N \leqslant t \leqslant a/N\},$$

где a — произвольное целое число, а K — при a нечетном — элемент мостовой ранга N пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, а при a

четном — элемент мостовой ранга N пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, сдвинутый на вектор $(1/2N, \ldots, 1/2N)$.

Индукцией по n немедленно доказывается, что:

а) мостовая ранга N пространства $\mathbb{R}^n$ является покрытием пространства $\mathbb{R}^n$, состоящим из кубиков со стороной $1/N$;

б) любая точка пространства $\mathbb{R}^n$ принадлежит не более чем $n+1$ кубикам мостовой ранга N, причем точка тогда и только тогда принадлежит точно $n+1$ кубикам, когда она имеет вид

$$\left(\frac{a_1}{2N}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{2N}, \frac{a_n}{N}\right),$$

где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — целые числа.

Поскольку диаметр кубика со стороной a в пространстве $\mathbb{R}^n$ равен, очевидно, $a\sqrt{n}$, мы видим, следовательно, что мостовая ранга N является *замкнутым* (состоящим из замкнутых множеств) $(\sqrt{n}/N)$-покрытием пространства $\mathbb{R}^n$ кратности $n+1$. Чтобы получить открытое покрытие, мы, выбрав некоторое число $\delta > 0$, заменим каждый кубик мостовой его δ-окрестностью (имеющей, очевидно, диаметр $2\delta + (\sqrt{n}/N)$). При достаточно малом δ (именно, при $\delta < 1/2N$) от этого кратность покрытия не изменится. Поскольку для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие N и δ, что $\varepsilon > 2\delta + (\sqrt{n}/N)$, мы видим, следовательно, что *для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое ε-покрытие пространства $\mathbb{R}^n$ кратности $n+1$.*

С любым замкнутым ограниченным (т. е. компактным) подмножеством F пространства $\mathbb{R}^n$ пересекается лишь конечное число элементов этого покрытия, и, значит, это покрытие высекает на F конечное открытое ε-покрытие кратности $\leqslant n+1$. Поэтому $\dim F \leqslant n$. □

Таким образом, из двух формул (1) и (2), нужных для доказательства теоремы 1, мы уже доказали формулу (1). Чтобы завершить доказательство теоремы 1, нам, следовательно, осталось доказать лишь неравенство $\dim I^n \geqslant n$ (что на самом деле является наиболее трудной частью доказательства). Мы, чтобы не прерывать изложения, сделаем это в следующей лекции, а пока обсудим более подробно формулу (1).

За счет более искусного использования конструкции мостовых можно показать, что формула (1) справедлива для любых подмножеств F пространства $\mathbb{R}^n$ (не обязательно замкнутых и ограниченных).

Задача 2. Докажите формулу (1) для произвольных подмножеств $F \subset \mathbb{R}^n$.

В частности, при $F = \mathbb{R}^n$ мы получаем, что

$$\dim \mathbb{R}^n \leqslant n. \tag{3}$$

Поэтому формула (1) является следствием — формально более точного — неравенства

$$\dim F \leqslant \dim \mathbb{R}^n \tag{4}$$

(на самом деле, как мы увидим ниже, в формуле (3) имеет место знак равенства:

$$\dim \mathbb{R}^n = n, \tag{5}$$

и поэтому неравенства (1) и (4) равносильны).

Формула (4) утверждает, что для топологического пространства $\mathbb{R}^n$ размерность произвольного его подпространства не превосходит размерности самого пространства, что вполне согласуется с нашей геометрической интуицией. Естественно ожидать, что аналогичное свойство монотонности размерности

$$\dim F \leqslant \dim \mathscr{X} \tag{6}$$

справедливо и для подпространств F произвольного топологического пространства $\mathscr{X}$. Однако, как мы увидим на примере в лекции 10, *неравенство* (6), *вообще говоря, неверно*, и для его справедливости надо налагать на F или на $\mathscr{X}$ те или иные дополнительные условия.

Определение 5. Подмножество F топологического пространства $\mathscr{X}$ называется *замкнутым*, если его дополнение открыто.

Для подмножеств метрических пространств (и, в частности, для подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$) это определение известно из курса анализа (и для этих пространств мы им уже пользовались).

Задача 3. Докажите, что *в любом многообразии $\mathscr{X}$ каждое одноточечное множество замкнуто* (т. е., как принято говорить, точки в $\mathscr{X}$ замкнуты).

Задача 4. Докажите, что *каждое замкнутое подмножество компактного пространства компактно.* [Указание. Воспользуйтесь тем, что при добавлении к про извольному открытому покрытию множества F открытого множества $\mathscr{X}\setminus F$ получается открытое покрытие всего пространства $\mathscr{X}$.]

Ясно, что:

1° Пустое множество $\varnothing$ и все пространство $\mathscr{X}$ замкнуты.

2° Пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто.

3° Объединение любого конечного семейства замкнутых множеств замкнуто.

Ср. соответствующие свойства 1°—3° открытых множеств в лекции 7.

Из свойства 2° замкнутых множеств непосредственно следует, что *для любого подмножества A топологического пространства существует наименьшее замкнутое множество, содержащее A* (им будет пересечение всех содержащих A замкнутых множеств). Это замкнутое множество называется *замыканием* множества A и обозначается символом $\bar{A}$ (в русской топологической литературе используется также символ $[A]$, а в англоязычной—символ $\mathrm{Cl}\,A$).

Ясно, что *точка $p\in\mathscr{X}$ тогда и только тогда принадлежит $\bar{A}$, когда любая ее окрестность пересекается с A*. Это означает, что

$$\mathscr{X}\setminus\bar{A}=\operatorname{Int}(\mathscr{X}\setminus A).$$

[Заметим, что для $\operatorname{Int} A$ имеет место двойственная формула $\mathscr{X}\setminus\operatorname{Int} A=\overline{\mathscr{X}\setminus A}$.]

Задача 5. Докажите, что следующие свойства отображения $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ равносильны:

а) Отображение f непрерывно.

б) Для любого замкнутого множества $C\subset\mathscr{Y}$ множество $f^{-1}C\subset\mathscr{X}$ замкнуто.

в) Для любого множества $A\subset\mathscr{X}$ имеет место включение

$$f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}.$$

г) Для любого множества $B\subset\mathscr{Y}$ имеет место включение

$$\overline{f^{-1}(B)}\subset f^{-1}(\bar{B}).$$

Замечание 3. Выше мы видели, что инвариант $\dim$ не всегда адекватен интуитивному представлению о размерности. Можно пытаться поправить дело, введя новый инвариант $\dim'$. Для любого топологического пространства $\mathscr{X}$ мы будем считать, что $\dim'\mathscr{X}\leqslant n$, если для произвольной окрестности U каждой точки $p \in \mathscr{X}$ существует такая окрестность V этой точки, содержащаяся в окрестности U, что для ее замыкания $\overline{V}$ в U имеет место неравенство $\dim \overline{V} \leqslant n$. (Оговорка «в U» здесь существенна, поскольку замыкание окрестности V в $\mathscr{X}$ может быть существенно больше). Если $\dim' \mathscr{X} \leqslant n$, но неверно, что $\dim' \mathscr{X} \leqslant n-1$, то по определению $\dim' \mathscr{X} = n$. Так как любая точка каждого открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ обладает окрестностью, замыкание которой гомеоморфно кубу I^n, то (здесь мы пользуемся еще недоказанной формулой (2)) для любого многообразия $\mathscr{X}$ число $\dim' \mathscr{X}$ совпадает с его размерностью в смысле определения 5 лекции 6 (см. выше замечание 1). Условия, необходимые и достаточные для выполнения равенства

$$\dim \mathscr{X} = \dim' \mathscr{X},$$

до сих пор неизвестны (см. выше пример 4 и замечание 2).

Как уже говорилось, размерность подпространства может быть больше размерности всего пространства.

Однако для замкнутых подпространств это невозможно.

Предложение 2. *Для любого замкнутого подпространства F произвольного топологического пространства $\mathscr{X}$*

$$\dim F \leqslant \dim \mathscr{X}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное конечное открытое покрытие подпространства F. Утверждение, что U_α открыто в F, означает, что в $\mathscr{X}$ существуют такие открытые множества U'_α, что $U_\alpha = U'_\alpha \cap F$ для любого α. Множества U'_α вместе с множеством $\mathscr{X} \setminus F$ образуют конечное открытое покрытие пространства $\mathscr{X}$. Поэтому существует вписанное в это покрытие конечное открытое покрытие $\{V_\beta\}$ кратности $\leqslant n+1$, где $n = \dim \mathscr{X}$. Рассмотрим все непустые множества вида $V_\beta \cap F$. Ясно, что эти множества образуют конечное открытое покрытие подпространства F кратности $\leqslant n+1$, вписанное в покрытие $\{U_\alpha\}$. Таким образом, в каждое конечное открытое покрытие подпространства F можно вписать некоторое конечное открытое покрытие кратности $\leqslant n+1$. Следовательно, $\dim F \leqslant n$. $\square$

В примере, который мы построим в лекции 10, подпространство F будет открытым (а пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфовым и компактным).

Можно показать (это трудная теорема!), что для выполнения неравенства (6) для любого подпространства F достаточно, чтобы пространство $\mathscr{X}$ было метризуемо и удовлетворяло второй аксиоме счетности (вообще, метризуемые пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, являются в определенном отношении наиболее естественной областью построения теории размерности, вне этого класса пространств почти любое «естественное» свойство размерности оказывается, вообще говоря, неверным). Поэтому в примере из лекции 10 пространство $\mathscr{X}'$ заведомо либо не метризуемо, либо не удовлетворяет второй аксиоме счетности. (На самом деле, как можно легко показать, оно и не метризуемо, и не удовлетворяет второй аксиоме счетности. Это не мешает ему быть хаусдорфовым и компактным.)

Замечание 4. Из предложения 2, в частности, следует, что $\dim I^n \leqslant \dim \mathbb{R}^n$. В силу формулы (2), которую мы докажем в лекции 9, это означает, что $n \leqslant \dim \mathbb{R}^n$. Вместе с формулой (3)—заметим, у нас еще не доказанной!—это дает равенство (5).

Наряду с намеченным выше, возможен другой—более концептуальный—подход к доказательству формулы (3).

Он основывается на одной простой, но важной топологической конструкции, в частных случаях уже излагавшейся в курсе анализа.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$—произвольные топологические пространства, и пусть $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$—множество всех пар (p, q), где $p\in\mathscr{X}$ и $q\in\mathscr{Y}$. Если $U\subset\mathscr{X}$ и $V\subset\mathscr{Y}$, то $U\times V\subset\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, и ясно, что множество всех подмножеств вида $U\times V$, где U открыто в $\mathscr{X}$, а V открыто в $\mathscr{Y}$, замкнуто относительно пересечений. Поэтому это множество является базой некоторой топологии на $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$.

Определение 6. Получающееся топологическое пространство называется *прямым* (или *декартовым*) *произведением* пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Обозначается оно тем же символом $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$.

Легко видеть, что *прямое произведение $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ хаусдорфовых пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ хаусдорфово*. Действительно, пусть (p_1, q_1) и (p_2, q_2)—две различные точки пространства $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$. Тогда либо $p_1\neq p_2$, либо $q_1\neq q_2$. Пусть для определенности $p_1\neq p_2$. Так как пространство $\mathscr{X}$ по условию хаусдорфово, то точки p_1 и p_2 обладают в $\mathscr{X}$ непересекающимися окрестностями U_1 и U_2. Тогда множества

$U_1 \times \mathscr{Y}$ и $U_2 \times \mathscr{Y}$ будут непересекающимися окрестностями точек (p_1, q_1) и (p_2, q_2) в произведении $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. □

Аналогично определяется прямое произведение $\mathscr{X}_1 \times \ldots \times \mathscr{X}_n$ любого **конечного** семейства топологических пространств. Оно также хаусдорфово, если хаусдорфовы пространства $\mathscr{X}_1, \ldots, \mathscr{X}_n$.

Задача 6. Докажите, что

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}.$$

[Указание. Для любого шара пространства $\mathbb{R}$ существуют вписанный и описанный кубы с гранями, параллельными координатным плоскостям.]

Для того чтобы множества $U \times V$ составляли базу пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, нет нужды, чтобы U и V пробегали все открытые множества пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно. Достаточно, очевидно, чтобы U пробегали некоторую базу пространства $\mathscr{X}$, а V — некоторую базу пространства $\mathscr{Y}$. Поэтому *прямое произведение пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, также удовлетворяет этой аксиоме*.

В частности, мы снова видим, что пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Рассмотрение простейших примеров (скажем, кубов I^n) наводит на мысль, что для любых двух пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ должно иметь место равенство

$$\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = \dim \mathscr{X} + \dim \mathscr{Y}. \tag{8}$$

Однако примеры, изложить которые из-за их сложности мы здесь не можем, показывают, что *равенство* (8) *неверно даже для компактных метрических пространств.*

Задача 7. Докажите, что любое компактное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Более того, для произвольных топологических пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ может не выполняться даже неравенство

$$\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \leqslant \dim \mathscr{X} + \dim \mathscr{Y}. \tag{9}$$

Тем не менее можно показать, что *в классе метрических пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности* (а также в классе хаусдорфовых компактных пространств), *неравенство* (9) *верно*. Поскольку, как легко видеть, $\dim \mathbb{R} = 1$ (ср. выше пример 5), это, в частности, снова доказывает неравенство (3). Однако доказательство формулы

(9) для метрических пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, довольно сложно и здесь нет места для его изложения.

Утверждение, что формула (9) справедлива в классе хаусдорфовых компактных пространств, предусматривает, в частности, что справедливо следующее предложение:

Предложение 3. *Прямое произведение компактных топологических пространств компактно.*

Доказательству этого предложения мы предпошлем несколько замечаний о проекции

(10) $$\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to\mathscr{X}, \quad (p, q)\mapsto p.$$

Прообразом при проекции (10) произвольного открытого множества $U\subset\mathscr{X}$ является (по определению открытое) множество $U\times\mathscr{Y}$. Следовательно, *проекция* (10) *является непрерывным отображением.*

Более того, так как каждое множество вида $U\times V$ проектируется на множество U, то *каждое открытое множество пространства $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ проекция* (10) *отображает на открытое множество пространства $\mathscr{X}$* (является открытым отображением).

Конечно, аналогичные утверждения справедливы и для проекции $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to\mathscr{Y}$, $(p, q)\mapsto q$, а также для проекций $\mathscr{X}_1\times\ldots\times\mathscr{X}_n\to\mathscr{X}_k$ произведения любого числа пространств на каждый из сомножителей.

Вместе с тем, вообще говоря, проекция (10) может замкнутое множество переводить в незамкнутое (например, при проекции $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $(x, y)\mapsto x$, гипербола $xy=1$, являющаяся замкнутым множеством плоскости $\mathbb{R}^2$, переходит в незамкнутое множество $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ оси $\mathbb{R}$). Однако *если пространство $\mathscr{Y}$ компактно, то для любого пространства $\mathscr{X}$ каждое замкнутое множество пространства $\mathscr{X}$ проекция* (10) *отображает на замкнутое множество пространства $\mathscr{X}$* (является, как говорят, *замкнутым отображением*). Действительно, пусть точка $p_0\in\mathscr{X}$ не принадлежит проекции $\operatorname{пр} F\subset\mathscr{X}$ замкнутого множества $F\subset\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, т. е. пусть $\{p_0\}\times\mathscr{Y}\subset(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})\setminus F$. Так как множество $(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})\setminus F$ открыто и, значит, любая его точка является его внутренней точкой, отсюда следует, что для каждой точки $q\in\mathscr{Y}$ существует такая ее окрестность $V_q\subset\mathscr{Y}$ и такая окрестность $U(q)\subset\mathscr{X}$ точки p_0, что $U(q)\times V_q\subset(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})\setminus F$. Все окрестности V_q, $q\in\mathscr{Y}$, составляют открытое покрытие пространства $\mathscr{Y}$, и потому — в силу компактности пространства $\mathscr{Y}$ — из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $V_{q_1}, \ldots, V_{q_n}$. Пусть

$$U = U(q_1) \cap \ldots \cap U(q_n).$$

Множество U открыто, содержит точку p_0 и обладает тем свойством, что для любой точки $p \in U$ все точки произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ вида (p, q), $q \in \mathscr{Y}$, не принадлежат F (если $q \in V_{q_i}$, то $(p, q) \in U(q_i) \times V_{q_i} \subset (\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \setminus F$). Это означает, что $\{p\} \times \mathscr{Y} \subset (\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) \setminus F$, т. е., что $p \notin \text{пр}\, F$. Тем самым доказано, что каждая точка $p_0 \notin \text{пр}\, F$ обладает такой окрестностью $U \subset \mathscr{X}$, что $U \subset \mathscr{X} \setminus \text{пр}\, F$, т. е. точка p_0 является внутренней точкой множества $\mathscr{X} \setminus \text{пр}\, F$. Следовательно, это множество открыто, и, значит, множество $\text{пр}\, F$ замкнуто. □

Теперь мы уже можем доказать предложение 3.

Доказательство предложения 3. Пусть пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ компактны, и пусть $\{W_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$. Будем называть — только в этом доказательстве! — открытое множество $O \subset \mathscr{X}$ *отмеченным*, если подмножество $O \times \mathscr{Y}$ произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ содержится в объединении конечного подсемейства покрытия $\{W_\alpha\}$. Для любой точки $p \in \mathscr{X}$ подпространство $\{p\} \times \mathscr{Y}$ произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ гомеоморфно (докажите!) пространству $\mathscr{Y}$ и, значит, компактно. Поэтому оно покрывается конечным подсемейством покрытия $\{W_\alpha\}$. Пусть F — замкнутое подмножество пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, являющееся дополнением в $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ объединения G всех элементов этого подсемейства. Так как $\mathscr{Y}$ по условию компактно, то, по доказанному, проекция $\text{пр}\, F$ множества F замкнута в $\mathscr{X}$ и, значит, ее дополнение O открыто. С другой стороны по построению множество $O \times \mathscr{Y}$ содержится в G. Следовательно, множество O отмечено. Поскольку $p \in O$, этим доказано, что все отмеченные множества составляют покрытие пространства $\mathscr{X}$. В силу компактности $\mathscr{X}$ из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие, т. е. найти конечное семейство отмеченных множеств, покрывающих $\mathscr{X}$. Но ясно, что объединение любого конечного семейства отмеченных множеств отмечено. Следовательно, $\mathscr{X}$ отмечено, и, значит, покрытие $\{W_\alpha\}$ содержит конечное подпокрытие. □

Доказательство неравенства (9) для хаусдорфовых компактных пространств также слишком сложно, чтобы мы могли его здесь изложить.