Лекция 9

Теорема о барабане.— Теорема Брауэра о неподвижной точке.— Теорема о перегородках в кубе.— Нормальные и вполне нормальные пространства.— Продолжение перегородок.— Теорема Лебега о покрытиях куба.— Оценка размерности куба снизу.

В предыдущей лекции мы доказали, что $\dim \mathbb{I}^n \leqslant n$. Основная цель этой лекции—доказать обратное неравенство и тем самым установить, что

$$\dim \mathbb{I}^n = n \quad \text{для любого} \quad n \geqslant 0.$$

Для этого мы должны будем начать довольно издалека.

Определение 1. Подпространство A топологического пространства $\mathscr{X}$ называется его *ретрактом*, если существует такое непрерывное отображение

$$r\colon \mathscr{X} \to A$$

(называемое *ретрагирующим отображением* или просто *ретракцией*), что $r(a) = a$ для любой точки $a \in A$.

Напомним, что символом $\mathbb{B}^n$ мы обозначаем *единичный шар* пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, для которых $|\boldsymbol{x}| \leqslant 1$ (где, как всегда, $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$), а символом $\mathbb{S}^{n-1}$—*единичную сферу* (подмножество шара $\mathbb{B}^n$, состоящее из точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, для которых $|\boldsymbol{x}| = 1$).

Теорема 1. *Сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ не является ретрактом шара $\mathbb{B}^n$.*

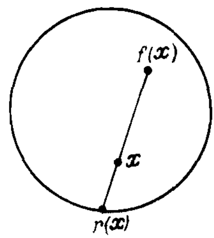
При $n = 2$ эта теорема дает теоретическое объяснение тому, что на окружность можно натянуть пленку, т. е. сделать барабан. Поэтому теорема 1 называется обычно теоремой о барабане.

Несмотря на наглядную очевидность теоремы 1, доказательство ее неожиданно является довольно сложным и требует привлечения целого ряда новых идей. Поэтому мы отложим его до лекции 24.

Легким следствием теоремы 1 является следующая теорема Брауэра о неподвижной точке:

Теорема 2. *Для любого непрерывного отображения $f\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ шара $\mathbb{B}^n$ в себя существует такая точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n$, что $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$.*

Доказательство. Если $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$, то определена прямая, проходящая через точки $\boldsymbol{x}$ и $f(\boldsymbol{x})$. Пусть $r(\boldsymbol{x})$ — та из двух точек пересечения этой прямой со сферой $\mathbb{S}^{n-1}$, которая не отделена от точки $\boldsymbol{x}$ точкой $f(\boldsymbol{x})$. Если $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ для всех точек $\boldsymbol{x}$, то эта конструкция определяет (очевидно, непрерывное) отображение $r\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$. Если $\boldsymbol{x} \in \mathbb{S}^{n-1}$, то не отделенной от точки $\boldsymbol{x}$ точкой пересечения является сама точка $\boldsymbol{x}$. Поэтому $r(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$, т. е. r является ретрагирующим отображением. Поскольку существование такого отображения противоречит теореме 1, неравенство $f(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{x}$ для всех точек $\boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n$ выполнено быть не может. □

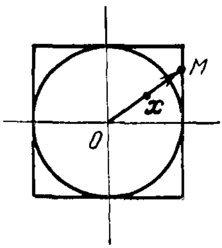


Следствие 1. *Для любого непрерывного отображения $f\colon \boldsymbol{I}^n \longrightarrow \boldsymbol{I}^n$ куба $\boldsymbol{I}^n$ в себя существует такая точка $\boldsymbol{t}_0 \in \boldsymbol{I}^n$, что $f(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{t}_0$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что *куб $\boldsymbol{I}^n$ гомеоморфен шару* $\mathbb{B}^n$. [Гомеоморфизм $\mathbb{B}^n \longrightarrow \boldsymbol{I}^n$ можно задать, например, формулой

$$\boldsymbol{x} \longmapsto \lambda(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{B}^n,$$

где $\lambda(\mathbf{0}) = 0$ и $\lambda(\boldsymbol{x})$ при $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ — длина вектора $\overrightarrow{OM}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{x}$ и такого, что точка M принадлежит границе куба $\boldsymbol{I}^n$ (легко видеть, что с точностью до знака вектор $\overrightarrow{OM}$ этим условием определен однозначно).] □



Замечание 1. Теорема 1 легко вытекает из теоремы 2. Действительно, если бы ретракция $r\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ существовала, то составное отображение

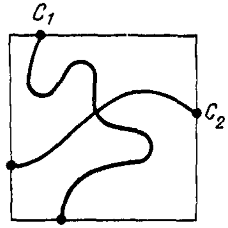
$$i \circ a \circ r\colon \mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n,$$

где $a\colon \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ — *антиподальное отображение* $\boldsymbol{x} \longmapsto -\boldsymbol{x}$, а i — вложение $\mathbb{S}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{B}^n$, было бы отображением $\mathbb{B}^n \longrightarrow \mathbb{B}^n$ без неподвижных точек.

Определение 2. Пусть A и B — непересекающиеся подмножества топологического пространства $\mathscr{X}$. Говорят, что замкнутое множество $C \subset \mathscr{X}$ *отделяет* A от B (или что оно является *перегородкой* между A и B), если его дополнение $\mathscr{X} \setminus C$ является объединением таких непересекающихся (и автоматически открытых) множеств U и V, что $A \subset U$ и $B \subset V$.

Конечно, перегородка C может быть и пустым множеством (так будет, если само пространство $\mathscr{X}$ является объединением открытых непересекающихся множеств U и V, содержащих соответственно множества A и B).

Для любого $k=1, \ldots, n$ и любого $\varepsilon = \pm 1$ мы обозначим символом $I_k^{n-1}(\varepsilon)$ грань куба I^n, состоящую из точек $t=(t_1, \ldots, t_n) \in I^n$, для которых $t_k = \varepsilon$.



$C_1 \cap C_2 \neq \varnothing$

Теорема 3 (о перегородках в кубе). *Пересечение $C_1 \cap \ldots \cap C_n$ любых перегородок $C_1, \ldots, C_n$, отделяющих в кубе I^n грани $I_1^{n-1}(-1), \ldots, I_n^{n-1}(-1)$ от граней $I_1^{n-1}(+1), \ldots, I_n^{n-1}(+1)$, не пусто:*

$$C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \varnothing.$$

Доказательство. По условию для любого $k = 1, \ldots, n$

$$I^n \setminus C_k = U_k(-1) \cup U_k(+1),$$

где $U_k(-1)$ и $U_k(+1)$ — такие непересекающиеся открытые множества, что $I_k^{n-1}(-1) \subset U_k(-1)$ и $I_k^{n-1}(+1) \subset U_k(+1)$. Для каждой точки $t \in I^n$ мы положим

$$\rho_k(t) = \inf_{s \in C_k} |t-s|, \quad k=1, \ldots, n.$$

Заметим, что в силу компактности множества C_k равенство $\rho_k(t)=0$ равносильно включению $t \in C_k$.

Лемма 1. *Число $\rho_k(t)$ обладает тем свойством, что $|t_k - \varepsilon\rho_k(t)| \leqslant 1$, если $t=(t_1, \ldots, t_n) \in U_k(\varepsilon)$.*

Из этой леммы следует, что формула

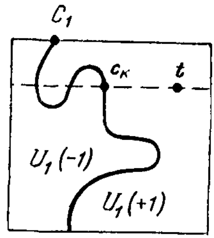
$$f(t) = (t_1-\tau_1, \ldots, t_n-\tau_n),$$

$$\text{где } \tau_k = \begin{cases} \varepsilon\rho_k(t), & \text{если } t \in U_k(\varepsilon), \\ 0, & \text{если } t \in C_k, \end{cases} \qquad k=1, \ldots, n,$$

корректно определяет некоторое (очевидно, непрерывное) отображение $f\colon I^n \to I^n$, обладающее тем свойством, что $f(t)=t$ тогда и только тогда, когда $\rho_k(t)=0$ для любого $k=1, \ldots, n$, т. е. когда $t \in C_1 \cap \ldots \cap C_n$. Поскольку же, согласно следствию 1 теоремы 2, в кубе I^n существует точка t_0, для которой $f(t_0)=t_0$, это доказывает, что $C_1\cap\ldots\cap C_n\neq\varnothing$. □

Осталось доказать лемму 1.

Доказательство леммы 1. Пусть точка $t\in I^n$ принадлежит открытому множеству $U_k(\varepsilon)$. Так как перегородка C_k отделяет грани $I_k^{n-1}(-1)$ и $I_k^{n-1}(+1)$, то перпендикуляр к этим граням, проходящий через точку t, пересекает перегородку C_k в некоторой точке c_k, лежащей между точкой t и ее проекцией на грань $I_k^{n-1}(-\varepsilon)$. Если $\varepsilon=+1$, то для k-й координаты s_k точки c_k имеет место неравенство $s_k\leqslant t_k$, а если $\varepsilon=-1$,— то неравенство $s_k\geqslant t_k$.



При этом $|s_k-t_k|=\sigma_k$, где σ_k—расстояние между точками t и c_k. Поэтому

$$s_k=t_k-\varepsilon\sigma_k.$$

Поскольку, согласно определению,

$$\sigma_k\leqslant\rho_k(t),$$

отсюда следует, что при $\varepsilon=+1$

$$t_k-\varepsilon\rho_k(t)=t_k-\rho_k(t)\geqslant t_k-\sigma_k=t_k-\varepsilon\sigma_k=s_k\geqslant-1,$$

а при $\varepsilon=-1$

$$t_k-\varepsilon\rho_k(t)=t_k+\rho_k(t)\leqslant t_k+\sigma_k=t_k-\varepsilon\sigma_k=s_k\leqslant 1.$$

С другой стороны, при $\varepsilon=+1$

$$t_k-\varepsilon\rho_k(t)=t_k-\rho_k(t)\leqslant t_k\leqslant 1,$$

а при $\varepsilon=-1$

$$t_k-\varepsilon\rho_k(t)=t_k+\rho_k(t)\geqslant t_k\geqslant-1.$$

Таким образом, во всех случаях

$$|t_k-\varepsilon\rho_k(t)|\leqslant 1. \ \square$$

Замечание 2. Теорема 1 также легко вытекает из теоремы 3. Действительно, пусть $\dot I^n$—*граница* куба I^n (состоящая из точек $t\in I^n$, для которых $t_k=\pm1$ хотя бы при одном $k=1,\ldots,n$), и пусть S_k, $k=1,\ldots,n$,— ее подмножество, состоящее из точек $t\in\dot I^n$, для которых $t_k=0$. Ясно, что S_k является перегородкой в $\dot I^n$, отделяющей грани $I_k^{n-1}(-1)$ и $I_k^{n-1}(+1)$. Поэтому для любой ретракции $r\colon I^n\to\dot I^n$ прообраз $C_k=r^{-1}S_k$ множества S_k

будет перегородкой между прообразами $r^{-1}I_k^{n-1}(-1)$ и $r^{-1}I_k^{n-1}(+1)$ граней $I_k^{n-1}(-1)$ и $I_k^{n-1}(+1)$, а значит,— ввиду включений $I_k^{n-1}(\varepsilon) \subset r^{-1}I_k^{n-1}(\varepsilon)$,— и между самими гранями $I_k^{n-1}(-1)$ и $I_k^{n-1}(+1)$. С другой стороны, так как, очевидно, $S_1 \cap \ldots \cap S_n = \varnothing$, то и $C_1 \cap \ldots \cap C_n = \varnothing$, что в силу теоремы 3 невозможно. Поэтому для пары $(I^n, \dot{I}^n)$ — а потому и для гомеоморфной пары $(\mathbb{B}^n, \mathbb{S}^{n-1})$ — ретракция r существовать не может. □

Перегородки существуют не в любых пространствах. Это заставляет нас ввести следующее определение.

Определение 3. Пространство $\mathscr{X}$ называется *нормальным*, если для любых двух его непересекающихся замкнутых подмножеств A и B существует перегородка, и *вполне нормальным*, если перегородка существует для любых подмножеств A и B, обладающих тем свойством, что замыкание каждого из них не пересекается со вторым (такие множества A и B называются *отделенными*).

Заметим, что отделенность множеств необходима для существования перегородки между A и B.

Предложение 1. *Нормальное пространство $\mathscr{X}$ тогда и только тогда вполне нормально, когда каждое его подпространство нормально.*

Доказательство. Ясно, что каждое подпространство вполне нормального пространства вполне нормально (ибо множества, отделенные в подпространстве, будут отделены и во всем пространстве) и, следовательно, нормально. Обратно, пусть A и B — отделенные подмножества пространства $\mathscr{X}$, и пусть

$$O = \mathscr{X} \setminus (\bar{A} \cap \bar{B}) = (\mathscr{X} \setminus \bar{A}) \cup (\mathscr{X} \setminus \bar{B}).$$

Множества

$$\bar{A} \cap O = \bar{A} \setminus (\bar{A} \cap \bar{B}) \quad \text{и} \quad \bar{B} \cap O = \bar{B} \setminus (\bar{A} \cap \bar{B})$$

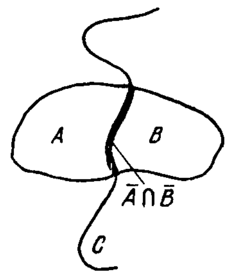
замкнуты в O, и потому, если O нормально, отделяются в O некоторой перегородкой C. По определению $O \setminus C = U \cup V$, где U и V — такие открытые в O непересекающиеся множества, что $\bar{A} \cap O \subset U$ и $\bar{B} \cap O \subset V$. Но так как O, очевидно, открыто в $\mathscr{X}$, то U и V также открыты в $\mathscr{X}$, а так как $A \cap \bar{B} = \varnothing$ и $B \cap \bar{A} = \varnothing$, то $A \subset \bar{A} \cap O$ и $B \subset \bar{B} \cap O$. Значит, $A \subset U$ и $B \subset V$. Поскольку

$$O \setminus C = \mathscr{X} \setminus (C \cup (\bar{A} \cap \bar{B})),$$

этим доказано, что множество $C \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$ является перегородкой в $\mathscr{X}$, отделяющей A от B. Таким образом, нормальное пространство, все подпространства которого также нормальны, вполне нормально. □

На основании предложения 1 вполне нормальные пространства называются также *наследственно нормальными*.

Замечание 3. В определении нормальных (и вполне нормальных) пространств к требованию существования перегородок часто добавляется еще требование хаусдорфовости. Подчеркнем, что мы этого не делаем.



Предложение 2. *Любое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — непересекающиеся замкнутые подмножества метрического пространства $\mathscr{X}$. Для каждой точки $p \in A$ число

$$\rho_B(p) = \inf_{q \in B} \rho(p, q)$$

(*расстояние от p до B*), очевидно, положительно, и потому для этой точки определена ее шаровая $\rho_B(p)/2$-окрестность

$$U(p) = \left\{ a \in \mathscr{X},\ \rho(p, a) < \frac{\rho_B(p)}{2} \right\}.$$

Аналогично, для любой точки $q \in B$ определена ее шаровая $\rho_A(q)/2$-окрестность

$$V(q) = \left\{ a \in \mathscr{X},\ \rho(a, q) < \frac{\rho_A(q)}{2} \right\},$$

где

$$\rho_A(q) = \inf_{p \in A} \rho(p, q)$$

— расстояние от q до A. Пусть

$$U = \bigcup_{p \in A} U(p), \quad V = \bigcup_{q \in B} V(q).$$

Множества U и V открыты, содержат соответственно множества A и B и не пересекаются (если $a \in U \cap V$, то существуют такие точки $p \in A$, $q \in B$, что $a \in U(p)$, $a \in V(q)$, и, значит,

$$\rho(p, a) < \frac{\rho_B(p)}{2} \leqslant \frac{\rho(p, q)}{2}$$

и

$$\rho(a, q) < \frac{\rho_A(q)}{2} \leqslant \frac{\rho(p, q)}{2};$$

но тогда

$$\rho(p, q) \leqslant \rho(p, a) + \rho(a, q) < \rho(p, q),$$

что невозможно). Поэтому множество $C = \mathscr{X} \setminus (U \cup V)$ является перегородкой между A и B. □

Следствие. *Любое метрическое пространство вполне нормально.*

Доказательство. Достаточно заметить, что каждое подпространство метрического пространства само является метрическим пространством (и, следовательно, нормально). □

В частности, *куб I^n является вполне нормальным пространством.*

Предложение 3. *Любое компактное хаусдорфово пространство $\mathscr{X}$ нормально.*

Доказательство. Пусть A и B — замкнутые непересекающиеся подмножества пространства $\mathscr{X}$. Так как пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то для любой точки $p \in A$ и любой точки $q \in B$ существуют такая окрестность $U_q(p)$ точки p и такая окрестность $V_p(q)$ точки q, что

$$U_q(p) \cap V_p(q) = \varnothing.$$

Для каждой точки $q \in B$ все окрестности $U_q(p)$, $p \in A$, образуют открытое покрытие подпространства A и, значит — поскольку это подпространство, будучи замкнутым множеством компактного пространства, компактно — существует такое конечное семейство $p_1, \ldots, p_n$ точек множества A, что открытое множество

$$U_q = U_q(p_1) \cup \ldots \cup U_q(p_n)$$

содержит A. При этом множество U_q не пересекается с окрестностью

$$V(q) = V_{p_1}(q) \cap \ldots \cap V_{p_n}(q)$$

точки q.

Окрестности $V(q)$, $q \in B$, составляют открытое покрытие подпространства B, и, значит, — по аналогичным причинам — существует такое конечное семейство $q_1, \ldots, q_m$ точек множества B, что открытое множество

$$V = V(q_1) \cup \ldots \cup V(q_m)$$

содержит V. При этом множество V не пересекается с открытым множеством

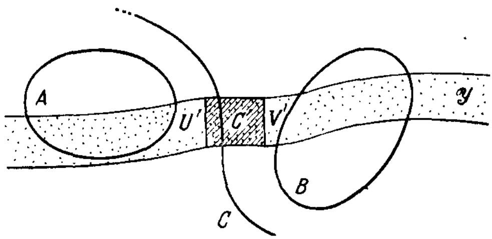
$$U = U_{q_1} \cap \ldots \cap U_{q_m},$$

содержащим A. Поэтому множество $C = \mathscr{X} \setminus (U \cup V)$ будет перегородкой, отделяющей A от B. □

Пример компактного хаусдорфова не вполне нормального пространства мы приведем в следующей лекции.

Нам понадобится также следующее простое предложение.

Предложение 4 (о продолжении перегородок). *Пусть $\mathscr{X}$ — вполне нормальное пространство,*



A и B — его непересекающиеся замкнутые подмножества и $\mathscr{Y}$ — замкнутое подпространство пространства $\mathscr{X}$. Пусть, далее, C' — произвольная перегородка в $\mathscr{Y}$, отделяющая замкнутые (в $\mathscr{Y}$) множества $A \cap \mathscr{Y}$ и $B \cap \mathscr{Y}$. Тогда в $\mathscr{X}$ существует такая перегородка C, отделяющая A от B, что $C \cap \mathscr{Y} \subset C'$.

Доказательство. По условию $\mathscr{Y} \setminus C' = U' \cup V'$, где U' и V' — непересекающиеся открытые (в $\mathscr{Y}$) множества, содержащие соответственно множества $A \cap \mathscr{Y}$ и $B \cap \mathscr{Y}$. Пусть

$$A' = A \cup U' \quad \text{и} \quad B' = B \cup V'.$$

Так как множества U' и V' не только открыты, но и замкнуты (в $\mathscr{Y} \setminus C'$), то в $\mathscr{X}$ они отделены. Значит, множества A' и B' также отделены, и потому существует перегородка C, отделяющая A' от B'. Та же перегородка отделяет, конечно, A от B. Кроме того, так как

$$\mathscr{X} \setminus C \supset A' \cup B' \supset U' \cup V' = \mathscr{Y} \setminus C',$$

то $\mathscr{Y} \cap C \subset C'$. □

Теперь мы можем вернуться к исследованию перегородок в кубе I^n.

Предложение 5. *Пусть*

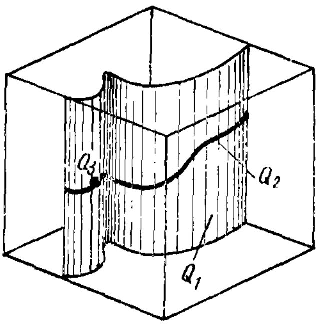
$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n$$

— такая убывающая последовательность замкнутых подмножеств куба I^n, *что*

Q_1 *отделяет* $I_1^{n-1}(-1)$ *от* $I_1^{n-1}(+1)$ *в* I^n;
Q_2 *отделяет* $I_2^{n-1}(-1) \cap Q_1$ *от* $I_2^{n-1}(+1) \cap Q_1$ *в* Q_1;
. . . .
Q_n *отделяет* $I_n^{n-1}(-1) \cap Q_{n-1}$ *от* $I_n^{n-1}(+1) \cap Q_{n-1}$ *в* Q_{n-1}.

Тогда Q_n *не пусто.*

Доказательство. Применив предложение 4 к $\mathscr{X} = I^n$, $A = I_k^{n-1}(-1)$, $B = I_k^{n-1}(+1)$ и $\mathscr{Y} = Q_{k-1}$, мы для любого $k = 2, \ldots, n$ получим в кубе I^n перегородку C_k, отделяющую грань $I_k^{n-1}(-1)$ то грани $I_k^{n-1}(+1)$ и такую, что



$$C_k \cap Q_{k-1} \subset Q_k.$$

При $k = 1$ мы положим $C_1 = Q_1$.

Согласно теореме 3 перегородки $C_1, C_2, \ldots, C_n$ обладают тем свойством, что

$$C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \neq \varnothing.$$

С другой стороны, так как

$$C_1 = Q_1, \quad C_2 \cap Q_1 \subset Q_2, \quad \ldots, \quad C_n \cap Q_{n-1} \subset Q_n,$$

то $C_1 \cap C_2 \cap \ldots \cap C_n \subset Q_n$. Следовательно, $Q_n \neq \varnothing$. □

Теперь мы уже можем доказать основную теорему этой лекции.

Теорема 4 (теорема Лебега о покрытиях куба). *Каждое конечное замкнутое покрытие* $\{C_\alpha\}$ *куба* I^n, *состоящее из множеств, ни одно из которых не пересекается ни с какими двумя противоположными гранями, имеет кратность* $\geqslant n + 1$.

Доказательство. Пусть

A_1 — объединение всех элементов покрытия $\{C_\alpha\}$, пересекающихся с гранью $I_1^{n-1}(-1)$ (и, следовательно, не пересекающихся с гранью $I_1^{n-1}(+1)$);

A_2 — объединение всех элементов покрытия $\{C_\alpha\}$, пересекающихся с гранью $I_2^{n-1}(-1)$ и не участвующих в A_1;

. . . .

A_n — объединение всех элементов покрытия $\{C_\alpha\}$, пересекающихся с гранью $I_n^{n-1}(-1)$ и не участвующих ни в A_1, ни в A_2, ..., ни в A_{n-1};

A_{n+1} — объединение всех элементов покрытия $\{C_\alpha\}$, не пересекающихся ни с одной гранью куба I^n.

Пусть, далее,

$$Q_1 = A_1 \cap B_1, \text{ где } B_1 = A_2 \cup \ldots \cup A_{n+1},$$
$$Q_2 = A_1 \cap A_2 \cap B_2, \text{ где } B_2 = A_3 \cup \ldots \cup A_{n+1},$$

. . . .

$$Q_{n-1} = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap B_{n-1}, \text{ где } B_{n-1} = A_n \cup A_{n+1},$$
$$Q_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap B_n, \text{ где } B_n = A_{n+1}.$$

Ясно, что множества Q_k замкнуты и образуют убывающую последовательность

$$Q_1 \supset Q_2 \supset \ldots \supset Q_n.$$

Кроме того, так как $A_1 \cup B_1 = I^n$, то $(I^n \setminus A_1) \cap (I^n \setminus B_1) = \varnothing$, и так как множество A_1 не пересекается с гранью $I_1^{n-1}(+1)$, а множества $A_2, \ldots, A_{n+1}$ — с гранью $I_1^{n-1}(-1)$, то

$$I_1^{n-1}(+1) \subset I^n \setminus A_1 \quad \text{и} \quad I_1^{n-1}(-1) \subset I^n \setminus B_1.$$

Поскольку $I^n \setminus Q_1 = (I^n \setminus A_1) \cup (I^n \setminus B_1)$, это доказывает, что Q_1 отделяет $I_1^{n-1}(-1)$ и $I_1^{n-1}(+1)$ в I^n.

Аналогично, так как $(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap B_2) = A_1 \cap (A_2 \cup \cup B_2) = A_1 \cap B_1 = Q_1$, то $(Q \setminus (A_1 \cap A_2)) \cap (Q_1 \setminus (A_1 \cap B_2)) = \varnothing$ и так как множество A_2 не пересекается с гранью $I_2^{n-1}(+1)$, а множества $A_3, \ldots, A_{n+1}$ — с гранью $I_2^{n-1}(-1)$, то

$$I_2^{n-1}(+1) \cap Q_1 \subset Q_1 \setminus (A_1 \cap A_2)$$

и

$$I_2^{n-1}(-1) \cap Q_1 \subset Q_1 \setminus (A_1 \cap B_2).$$

Поскольку $Q_2 = (A_1 \cap A_2) \cap (A_1 \cap B_2)$, и потому

$$Q_1 \setminus Q_2 = (Q_1 \setminus (A_1 \cap A_2)) \cup (Q_1 \setminus (A_1 \cap B_2)),$$

это доказывает, что Q_2 отделяет $I_2^{n-1}(-1) \cap Q_1$ и $I_2^{n-1}(+1) \cap \cap Q_1$ в Q_1.

Вообще, если $A'_k = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ и $B'_k = A_1 \cap \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \cap B_{k+1}$, где $k = 1, \ldots, n-1$, то

$$A'_k \cup B'_k = A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap (A_{k+1} \cup B_{k+1}) =$$
$$= A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap B_k = Q_k,$$

и потому $(Q_k \setminus A'_k) \cap (Q_k \setminus B'_k) = \varnothing$. Далее, так как множество A_{k+1}, а значит, и множество A'_k не пересекаются с гранью $I^{n-1}_{k+1}(+1)$, и множества $A_{k+2}, \ldots, A_{n+1}$, а значит, и множества B_k и B'_k не пересекаются с гранью $I^{n-1}_{k+1}(-1)$, то

$$I^{n-1}_{k+1}(+1) \cap Q_k \subset Q_k \setminus A'_k \quad \text{и} \quad I^{n-1}_{k+1}(-1) \cap Q_k \subset Q_k \setminus B'_k.$$

Поскольку $Q_{k+1} = A'_k \cap B'_k$ и, значит, $Q_k \setminus Q_{k+1} = (Q_k \setminus A'_k) \cup \cup (Q_k \setminus B'_k)$, это доказывает, что Q_{k+1} отделяет $I^{n-1}_{k+1}(-1) \cap \cap Q_k$ и $I^{n-1}_{k+1}(+1) \cap Q_k$ в Q_k.

Таким образом, множества $Q_1, \ldots, Q_n$ удовлетворяют всем условиям предложения 5 и, значит, согласно этому предложению, множество Q_n не пусто.

Пусть p_0 — произвольная точка из Q_n. Так как

$$Q_n = A_1 \cap \ldots \cap A_{n+1}$$

и так как каждое из множеств A_i является объединением элементов покрытия $\{C_\alpha\}$, причем элементы, участвующие в одном из множеств A_k, не участвуют ни в одном другом, то точка p_0 принадлежит по крайней мере $n+1$ из этих элементов. Следовательно, кратность покрытия $\{C_\alpha\}$ не меньше $n+1$. $\square$

Чтобы вывести из теоремы Лебега неравенство $\dim I^n \geqslant n$ осталось совсем немного.

Определение 4. Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ топологического пространства $\mathscr{X}$ называется *сжимаемым*, если существует такое открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ пространства $\mathscr{X}$ с тем же множеством индексов (*сжатие* покрытия $\{U_\alpha\}$), что

$$\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha \text{ для любого } \alpha.$$

Предложение 6. *Каждое открытое покрытие нормального пространства $\mathscr{X}$ сжимаемо.*

Доказательство. Мы докажем это предложение лишь в предположении, что *покрытие конечно*. Общий случай требует трансфинитной индукции и нам здесь не нужен.

Пусть $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — произвольное конечное открытое покрытие нормального пространства $\mathscr{X}$. Достаточно, очевидно, доказать, что существует такое открытое множество V_1, что $\overline{V}_1 \subset U_1$ и семейство $\{V_1, U_2, \ldots, U_n\}$ все еще является покрытием.

С этой целью рассмотрим замкнутые множества

$$\mathscr{X}\setminus U_1 \quad \text{и} \quad \mathscr{X}\setminus(U_2\cup \ldots \cup U_n).$$

Так как $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ является покрытием, то эти множества не пересекаются. Поэтому существует отделяющая их перегородка C. Пусть $\mathscr{X}\setminus C = U\cup V$, где U и V — такие непересекающиеся открытые множества, что

$$\mathscr{X}\setminus U_1\subset U \quad \text{и} \quad \mathscr{X}\setminus(U_2\cup \ldots \cup U_n)\subset V.$$

Второе включение означает, что семейство $\{V, U_2, \ldots, U_n\}$ является покрытием пространства $\mathscr{X}$, а из первого следует, что $\overline{V}\subset\mathscr{X}\setminus U\subset U_1$. Остается положить $V_1 = V$. □

Теперь мы уже можем доказать неравенство

$$\dim I^n \geqslant n.$$

Так как куб I^n является компактным метрическим пространством, то, согласно следствию 2 леммы 1 предыдущей лекции, это неравенство означает, что для некоторого $\varepsilon > 0$ (как мы покажем, годится любое $\varepsilon < 2$) каждое конечное открытое ε-покрытие $\{U_\alpha\}$ куба I^n имеет кратность $\geqslant n+1$.

Пусть $\{V_\alpha\}$ — произвольное сжатие покрытия $\{U_\alpha\}$ (существующее, согласно предложению 3, для конечных покрытий нами доказанного). Тогда семейство $\{\overline{V}_\alpha\}$ будет замкнутым ε-покрытием куба I^n. Так как при $\varepsilon < 2$ это покрытие удовлетворяет, очевидно, условию теоремы Лебега, то, согласно этой теореме, кратность покрытия $\{\overline{V}_\alpha\}$ не меньше $n+1$. Но тогда кратность исходного покрытия $\{U_\alpha\}$ также, конечно, не меньше $n+1$. □