Лекция 10

Порядковые числа.— Интервальная топология в множествах порядковых чисел.— Нульмерные пространства.— Пример Тихонова.— Тихоновское произведение топологических пространств.—Фильтры.—Центрированные множества множеств.— Ультрафильтры.— Критерий компактности.— Теорема Тихонова.

Эта лекция, целиком посвященная общей топологии, не имеющей отношения к теории гладких многообразий, состоит из двух частей, связанных только именем А. Н. Тихонова. В первой части строится пример Тихонова хаусдорфова нормального, но не вполне нормального компактного нульмерного пространства, содержащего одномерное подпространство, а основная цель второй части —доказать теорему Тихонова о произведениях компактных пространств.

Пример Тихонова строится из так называемых трансфинитных порядковых чисел; напомним поэтому вкратце их определение и основные свойства.

Множество A называется *частично упорядоченным*, если на нем определено отношение $\leqslant$, обладающее свойствами *рефлексивности* ($a \leqslant a$ для любого $a \in A$), *антисимметричности* (если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$, то $a = b$) и *транзитивности* (если $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$, то $a \leqslant c$). Если $a \leqslant b$, но $a \neq b$, то пишут $a < b$. Отображение φ: $A \longrightarrow B$ частично упорядоченных множеств называется *монотонным*, если $\varphi a \leqslant \varphi b$, когда $a \leqslant b$. Биективное монотонное отображение, обратное к которому также монотонно, называется *изоморфизмом*. Частично упорядоченные множества A и B называются *изоморфными*, если существует хотя бы один изоморфизм $A \longrightarrow B$. Отношение изоморфности частично упорядоченных множеств является отношением эквивалентности и поэтому все частично упорядоченные множества распределяются по классам изоморфных множеств.

Частично упорядоченное множество A называется *упорядоченным* (или, более пространно, *линейно упорядоченным*), если для любых двух элементов $a, b \in A$ либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$. Классы изоморфных упорядоченных множеств называются *порядковыми типами*. Отображение упорядоченных множеств тогда и только тогда является изоморфизмом, когда оно биективно и монотонно.

Упорядоченное множество A называется *вполне упорядоченным*, если каждое его непустое подмножество (в том числе само множество A) имеет первый элемент. Порядковые типы вполне упорядоченных множеств называются *порядковыми числами* (или *ординалами*). О вполне упорядоченном множестве, принадлежащем порядковому числу α, говорят, что A ***имеет тип*** α или что A является ***множеством типа*** α. Говорят также, что α есть *порядковое число* ***множества*** A.

Если упорядоченные множества A и B имеют один и тот же тип α, то они, конечно, равномощны. Их общая мощность называется ***мощностью числа*** α и обозначается символом $|\alpha|$.

Если множество A конечно, то его порядковое число называется *конечным* (или числом *первого класса*). Так как для любого натурального числа n любые два упорядоченных множества мощности n очевидным образом изоморфны, то для конечных порядковых чисел α и β из равенства $|\alpha|=|\beta|$ следует, что $\alpha=\beta$. Поэтому такие числа могут быть отождествлены с их мощностями, т. е. с натуральными числами

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n,\ \ldots \tag{1}$$

(Натуральные числа одинаково пригодны как для счета, так и для пересчета.)

Если множество A счетно, то его порядковое число α называется *счетным* (или числом *второго класса*). Примером счетного порядкового числа служит порядковый тип множества (1) всех натуральных чисел (очевидно, вполне упорядоченного). Это число обозначается символом ω.

Для любого элемента a_0 вполне упорядоченного множества A множество всех элементов $a \in A$, для которых $a < a_0$, называется *отрезком* (или *начальным интервалом*) множества A, определенным элементом a_0 и обозначается символом $A(a_0)$. Оно также вполне упорядочено.

Если каждое множество типа β изоморфно некоторому отрезку множества типа α, то говорят, что β *меньше* α и пишут $\beta < \alpha$. Формула $\beta \leqslant \alpha$ по определению означает, что либо $\beta < \alpha$, либо $\beta = \alpha$.

Ясно, что *отношение* $<$ *транзитивно* (если $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, то $\alpha < \gamma$).

Множество всех порядковых чисел β, для которых $\beta < \alpha$, обозначается символом $[0, \alpha)$ и называется *интервалом с концом* α. Аналогично, множество всех порядковых чисел β с $\beta \leqslant \alpha$ обозначается символом $[0, \alpha]$ и называется *сегментом с концом* α. Ясно, что $[0, \alpha] = [0, \alpha) \cup \{\alpha\}$.

Например, интервал $[0, \omega)$ — это множество (1) всех натуральных чисел, а сегмент $[0, \omega]$ — это множество (1), к которому справа добавлен элемент ω.

Поскольку любой отрезок множества (1) имеет вид $[0, n]$, мы видим, в частности, что ω *является наименьшим порядковым числом второго класса.*

Легко видеть, что *ни одно вполне упорядоченнсе множество A не может быть изоморфно отрезку $B(a_0)$ никакого свсего подмножества $B \subset A$ (случай $B = A$ не исключается)*. Действительно, рассуждая от противного, предположим, что изоморфизм φ: $A \longrightarrow B(a_0)$ существует, и рассмотрим множество всех элементов $a \in A$, для которых $\varphi a < a$. Это множество содержит a_0 и потому не пусто. Пусть a_1 — его первый элемент (он существует, потому что множество A вполне упорядочено), и пусть $a_2 = \varphi a_1$. Тогда $a_2 < a_1$ и одновременно $\varphi a_2 < \varphi a_1 = a_2$, что противоречит выбору элемента a_1. Полученное противоречие доказывает, что изоморфизм φ существовать не может. □

При $B = A$ мы получаем, в частности, что *если $\beta < \alpha$, то $\beta \neq \alpha$.*

Легко видеть также, что *каждый интервал $[0, \alpha)$ является вполне упорядоченным множеством типа α.* Действительно, сопоставив каждому элементу a вполне упорядоченного множества A типа α тип отрезка $A(a)$, мы, очевидно, получим изоморфное отображение $A \longrightarrow [0, \alpha)$. □

Отсюда следует, что *в каждом множестве A порядковых чисел есть первый элемент.* Действительно, выберем в A произвольный элемент α_0. Если элемент α_0 первый, то доказывать нечего, а если α_0 не первый, то пересечение $[0, \alpha_0) \cap A$ не пусто и первый элемент этого пересечения (существующий в силу полной упорядоченности интервала $[0, \alpha_0)$) будет первым элементом и множества A. □

Поскольку интервал $[0, \alpha)$ вполне упорядочен, то вполне упорядочен и сегмент $[0, \alpha] = [0, \alpha) \cup \{\alpha\}$. Порядковый тип этого сегмента обозначается символом $\alpha + 1$. Так как интервал $[0, \alpha)$ является отрезком $[0, \alpha](\alpha)$ сегмента $[0, \alpha]$, то $\alpha < \alpha + 1$. Кроме того, *если $\beta \leqslant \alpha + 1$, то $\beta \leqslant \alpha$* (ибо любой отрезок сегмента $[0, \alpha]$ содержится в интервале $[0, \alpha)$). На этом основании говорят, что число $\alpha + 1$ *непосредственно следует* за числом α.

Порядковое число β называется *предельным*, если не существует такого порядкового числа α, что $\beta = \alpha + 1$. Примером предельного числа является число ω.

Для любых порядковых чисел α и β рассмотрим пересечение $D = [0, \alpha) \cap [0, \beta)$ интервалов $[0, \alpha)$ и $[0, \beta)$. Оказывается, что *существует такое порядковое число $\delta \leqslant \alpha$, что $D = [0, \delta)$*. Действительно, если $D = [0, \alpha)$, то $\delta = \alpha$. Пусть $D \neq [0, \alpha)$, т. е. дополнение $C = [0, \alpha) \setminus D$ множества D в $[0, \alpha)$ не пусто, и пусть δ — первый элемент этого дополнения. Если $\xi \in [0, \delta)$, то $\xi < \alpha$ (ибо $\xi < \delta$, а $\delta < \alpha$) и $\xi \notin C$ (ибо $\xi < \delta$, а δ — первый элемент в C), т. е. $\xi \in D$. Обратно, если $\xi \in D$ и $\delta \leqslant \xi$, то $\delta < \beta$ (ибо $\xi < \beta$), и, значит, $\delta \in D$, что невозможно. Следовательно, $\xi < \delta$, т. е. $\xi \in [0, \delta)$. □

По симметрии вместе с неравенством $\delta \leqslant \alpha$ имеет место также и неравенство $\delta \leqslant \beta$. При этом, если $\delta < \alpha$ и $\delta < \beta$, то $\delta \in D = [0, \delta)$, что невозможно. Поэтому либо $\delta=\alpha$ (и тогда $\alpha\leqslant\beta$), либо $\delta=\beta$ (и тогда $\beta\leqslant\alpha$). Этим доказано, что для любых двух порядковых чисел α и β либо $\alpha=\beta$, либо $\alpha<\beta$, либо $\beta<\alpha$, т. е. *каждое множество порядковых чисел упорядочено и, значит* (поскольку каждое его подмножество имеет первый элемент), *вполне упорядочено.*

Теперь легко видеть, что *для любого подмножества B произвольного упорядоченного множества A тип β множества B не превосходит типа α множества A:*

$$\beta\leqslant\alpha.$$

Действительно, в противном случае имело бы место неравенство $\alpha<\beta$ и множество A было бы изоморфно некоторому отрезку подмножества B, что, как мы знаем, невозможно. $\square$

Пусть нам дано произвольное семейство $\{\alpha_\xi\}$ порядковых чисел, занумерованных числами ξ из некоторого интервала $[0, \tau)$, и пусть A_ξ — произвольное множество типа α_ξ. Мы упорядочим дизъюнктное объединение

$$A=\bigsqcup_\xi A_\xi$$

всех множеств A_ξ, считая, что для элементов $a\in A_\xi$ и $b\in A_\eta$ неравенство $a<b$ имеет место тогда и только тогда, когда либо $\xi<\eta$, либо $\xi=\eta$ и $a<b$ в множестве A_ξ. Для любого непустого подмножества $C\subset A$ множество всех чисел $\xi<\tau$, для которых $C\cap A_\xi\neq\varnothing$, является непустым подмножеством интервала $[0, \tau)$ и, значит, имеет первый элемент ξ_0. Ясно, что первый элемент множества $C\cap A_{\xi_0}$ будет первым элементом и всего множества C. Этим доказано, что *множество A вполне упорядочено*, и потому его тип α является порядковым числом. Очевидно, что число α зависит только от чисел α_ξ (и не зависит от выбора множеств A_ξ). Оно называется *суммой* чисел α_ξ и обозначается символом

$$\sum_{\xi<\tau}\alpha_\xi.$$

Заметим, что α *зависит* от того, в каком порядке занумерованы числа α_ξ. (Например, так как множество типа $\omega+n$ имеет последний элемент, а типа $n+\omega$ не имеет, то $n+\omega\neq\omega+n$.)

Так как $A_\xi\subset A$ для любого ξ, то $\alpha_\xi\leqslant\alpha$. (Равенство здесь вполне возможно; например, ясно, что $n+\omega=\omega$.)

Однако $\alpha_\xi<\alpha+1$. Поскольку любое множество порядковых чисел, будучи вполне упорядоченным, имеет некоторый тип τ и, значит, его элементы могут быть занумерованы числами интервала $[0, \tau)$, тем самым доказано, что *для любого множества порядковых чисел существует число, большее всех его элементов.*

[Отсюда следует, что *понятие множества всех порядковых чисел смысла не имеет*. Внимательный читатель безусловно уже заметил, что за счет некоторой неуклюжести формулировок мы выше тщательно избегали упоминания этого «множества». Теперь он знает причину.]

В частности, существуют порядковые числа большие всех чисел второго класса (числа *третьего класса*). Наименьшее из них — *первое число третьего класса* — обозначается символом Ω.

Для любой счетной (или конечной) последовательности $\{\alpha_n\}$ чисел второго класса их сумма $\sum\limits_{n<\omega} \alpha_n$, очевидно, является числом второго класса (ибо дизъюнктное объединение счетных множеств счетно). Поэтому наименьшее из чисел, больших всех чисел α_n (это число обозначается символом $\sup \alpha_n$), также является числом второго класса (короче, *если* $\alpha_n < \Omega$, *то* $\sup \alpha_n < \Omega$).

Существование числа Ω доказывает, что существуют несчетные порядковые числа. На самом деле *существуют порядковые числа любой мощности*, т. е. — что, очевидно, равносильно, — *любое множество* A *можно занумеровать порядковыми числами некоторого интервала* $[0, \alpha)$. Для доказательства этого утверждения (известного как теорема Цермело о полном упорядочении), мы назовем порядковое число β *отмеченным*, если существует подмножество множества A, которое можно занумеровать числами интервала $[0, \beta)$. Множество B всех отмеченных чисел не пусто (например, если множество A бесконечно, то все числа первого и второго классов отмечены) и обладает тем свойством, что если $\beta \in B$ и $\gamma < \beta$, то $\gamma \in B$, т. е. $[0, \beta) \subset B$.

Пусть $*$ — элемент, не принадлежащий множеству A, и пусть $A^* = A \sqcup \{*\}$. Построим отображение $\varphi\colon B \longrightarrow A^*$ по следующим правилам:

а) Выбрав произвольный элемент $a_0 \in A$, положим $\varphi(0) = a_0$.

б) Пусть для некоторого числа $\beta \in B$ отображение φ уже построено на интервале $[0, \beta)$, и пусть $A' = \varphi[0, \beta)$. Если $A' \subset A$ и $A' \neq A$, то, произвольно выбрав элемент $a_\beta \in A \setminus A'$, мы положим

$$\varphi(\beta) = a_\beta.$$

В противном случае (т. е. когда *либо* $A' = A$, *либо* $* \in A'$) мы положим $\varphi(\beta) = *$.

Ясно, что эта конструкция определяет φ на всем B. [Множество B' всех $\beta \in B$, для которых $\varphi(\beta)$ не определено, являясь множеством порядковых чисел, имеет — если оно не пусто — первый элемент $\beta_0 \in B'$. Тогда отображение φ определено на $[0, \beta_0)$ и, значит, согласно **б** — элемент $\varphi(\beta)$ также определен, т. е. $\beta_0 \notin B'$. Полученное противоречие доказывает, что $B' = \varnothing$.]

Пусть B^* — множество — возможно, пустое — всех чисел β, для которых $\varphi(\beta) = *$, и пусть $\alpha = \sup(B \setminus B^*)$. Тогда по построению

φ отображает интервал $[0, \alpha)$ на множество A, и это отображение биективно, т. е. φ задает нумерацию множества A числами интервала $[0, \alpha)$. □

Каждое множество A порядковых чисел является топологическим пространством по отношению к так называемой *интервальной топологии*, базой открытых множеств которой являются пересечения множества A с интервалами вида (α, β), где $\alpha < \beta$ (по определению каждый интервал (α, β) состоит из всех чисел γ, для которых $\alpha < \gamma < \beta$). Это пространство, очевидно, хаусдорфово.

Замечание 1. Интервальную топологию можно, конечно, ввести на любом упорядоченном множестве; например, на множестве $[0, \Omega)\times[0, 1)$, упорядоченном *лексикографически* (т. е. так, что $(\alpha_1, t_1) < (\alpha_2, t_2)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_1 < \alpha_2$ или $\alpha_1 = \alpha_2$ и $t_1 < t_2$). Получающееся топологическое пространство называется *длинной полупрямой Александрова*. Его можно представлять себе как результат вклеивания отрезка $[0, 1]$ между любыми двумя соседними порядковыми числами α и $\alpha + 1$ второго класса.

Замечание 2. Можно показать, что длинная полупрямая, из которой удалена начальная точка $(0, 0)$, обладает естественной гладкостью класса C^ω, по отношению к которой она является одномерным хаусдорфовым многообразием, не удовлетворяющим второй аксиоме счетности. (Ср. с замечанием 5 лекции 7.)

Интервальная топология на множествах порядковых чисел обладает тем замечательным — и несколько неожиданным — свойством, что *для любого порядкового числа* ξ *сегмент* $[0, \xi]$ *является в интервальной топологии компактным пространством*. Действительно, пусть $\mathfrak{U}$ — произвольное открытое покрытие сегмента $[0, \xi]$. Назовем число $\eta \leqslant \xi$ *допустимым*, если сегмент $[0, \eta]$ накрывается конечным подсемейством покрытия $\mathfrak{U}$. Множество всех допустимых чисел не пусто (оно содержит 0) и если оно не исчерпывает всего сегмента $[0, \xi]$, то существует — в силу полной упорядоченности порядковых чисел — наименьшее недопустимое число $\gamma \leqslant \xi$. Пусть U_0 — элемент покрытия $\mathfrak{U}$, содержащий число γ, и пусть (α, β) — такой интервал, что $\gamma \in (\alpha, \beta) \subset U_0$. Так как $\alpha < \gamma$, то число α допустимо, и, значит, сегмент $[0, \alpha]$ покрывается конечным подсемейством покрытия $\mathfrak{U}$. Добавив к этому подсемейству элемент U_0, мы получим конечное подсемейство, покрывающее интервал $[0, \beta) = [0, \alpha] \cup (\alpha, \beta)$, а потому и сегмент $[0, \gamma] \subset [0, \beta)$. Следовательно, вопреки предположению, число γ допустимо. Полученное противоречие показывает, что все числа сегмента $[0, \xi]$ допустимы. В частности, допустимо число ξ. Следовательно, покрытие $\mathfrak{U}$ содержит конечное подпокрытие. □

Топологическое пространство $\mathscr{X} = [0, \xi]$ обладает тем свойством, что *каждая его точка обладает базой окрестностей, являющихся не только открытыми, но и замкнутыми множествами* (о таких пространствах $\mathscr{X}$ пишут, что $\operatorname{ind} \mathscr{X} = 0$). Для доказательства достаточно заметить, что если число β не предельное (т. е. $\beta = \gamma + 1$), то $(\alpha, \beta) = [\alpha + 1, \gamma]$ для любого α. □

Более того, аналогичное утверждение справедливо не только для точек, но и для любых замкнутых множеств, т. е. *для каждого замкнутого множества $F \subset [0, \xi]$ и любой его окрестности U существует окрестность $V \subset U$, являющаяся замкнутым множеством* (о таких пространствах $\mathscr{X}$ пишут, что $\operatorname{Ind} \mathscr{X} = 0$). Действительно, согласно предыдущему утверждению, каждая точка $\alpha \in F$ обладает замкнутой окрестностью V_α, содержащейся в U. Окрестности V_α составляют открытое покрытие множества F, из которого — поскольку множество F, являясь замкнутым подмножеством компактного пространства, компактно — мы можем выбрать конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_n}\}$. Объединение $V = V_{\alpha_1} \cup \ldots \cup V_{\alpha_n}$ элементов этого подпокрытия и будет замкнутой окрестностью подмножества F, содержащейся в U. □

Фактически для произвольного топологического пространства $\mathscr{X}$ мы доказали, что *если пространство $\mathscr{X}$ компактно и* $\operatorname{ind} \mathscr{X} = 0$, *то* $\operatorname{Ind} \mathscr{X} = 0$. [Кстати, *если пространство $\mathscr{X}$ хаусдорфово и* $\operatorname{Ind} \mathscr{X} = 0$, *то* $\operatorname{ind} \mathscr{X} = 0$. Для доказательства достаточно заметить, что в хаусдорфовом пространстве любое одноточечное множество замкнуто.]

С другой стороны, легко видеть, что *если* $\operatorname{Ind} \mathscr{X} = 0$, *то* $\dim \mathscr{X} = 0$. Действительно, равенство $\dim \mathscr{X} = 0$ означает, что в каждое конечное открытое покрытие $\{U_1, \ldots, U_n\}$ пространства $\mathscr{X}$ можно вписать конечное открытое покрытие $\{V_1, \ldots, V_m\}$, состоящее из непересекающихся открытых множеств, и, значит (поскольку дополнение любого элемента V_j покрытия $\{V_1, \ldots, V_m\}$ является объединением всех остальных элементов этого покрытия и, следовательно, открыто), обладающее тем свойством, что любой его элемент V_j не только открыт, но и замкнут.

Мы докажем (для пространства $\mathscr{X}$ с $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=0$) даже большее, а именно, что *число m элементов покрытия $\{V_1, \ldots, V_m\}$ можно считать равным числу n элементов покрытия $\{U_1, \ldots, U_n\}$ и, кроме того, что это покрытие можно построить так, чтобы для любого $i=1, \ldots, n$ имело место включение $V_i\subset U_i$.*

При $n=1$ положим $V_1=U_1$.

Пусть покрытие $\{V_1, \ldots, V_n\}$ построено для любого покрытия $\{U_1, \ldots, U_n\}$, состоящего из $n\geqslant 1$ открытых множеств. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{U_1, \ldots, U_n, U_{n+1}\}$, состоящее из $n+1$ множеств. По предположению индукции, примененному к покрытию $\{U_1, \ldots, U_{n-1}, U_n\cup U_{n+1}\}$, существует такое открытое покрытие $\{V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n'\}$, состоящее из n непересекающихся множеств, что

$$V_1\subset U_1, \ \ldots, \ V_{n-1}\subset U_{n-1}, \quad V_n'\subset U_n\cup U_{n+1}.$$

С другой стороны, так как множество

$$F=\mathscr{X}\setminus(U_1\cup\ldots\cup U_n)$$

замкнуто и содержится в U_{n+1}, то в силу условия $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=0$ существует такое открытое и одновременно замкнутое множество V, что $F\subset V\subset U_{n+1}$. Мы положим

$$V_n=V_n'\cap(\mathscr{X}\setminus V), \quad V_{n+1}=V_n'\cap V.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что все множества $V_1, \ldots, V_{n-1}, V_n, V_{n+1}$ открыты, не пересекаются, покрывают $\mathscr{X}$ и обладают тем свойством, что $V_i\subset U_i$ для любого $i=1, \ldots, n+1$. □

В частности, мы видим, что *для любого порядкового числа ξ*

$$\dim[0, \xi]=0.$$

Оказывается, что не только из $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=0$ следует, что $\dim\mathscr{X}=0$, но и, наоборот, из $\dim\mathscr{X}=0$ следует, что $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=0$ (так что $\dim\mathscr{X}=0$ *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Ind}\mathscr{X}=0$). Действительно, если $\dim\mathscr{X}=0$ и если U — окрестность замкнутого множества $F\subset\mathscr{X}$, то, поскольку множества U и $\mathscr{X}\setminus F$ составляют конечное открытое покрытие пространства $\mathscr{X}$, в это покрытие можно вписать конечное покрытие $\{V_j\}$, состоящее из непересекающихся открытых — и, следовательно, замкнутых —

множеств. Тогда объединение V всех элементов этого покрытия, пересекающихся с F (и потому лежащих в U) будет открытой и одновременно замкнутой окрестностью множества F, содержащейся в U. $\square$

Теперь легко доказывается, что *если пространства* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *хаусдорфовы и компактны, а* $\dim \mathscr{X} = 0$ *и* $\dim \mathscr{Y} = 0$, *то*

$$\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = 0$$

(так что для этих пространств справедлива формула (8) лекции 8). Действительно, в силу сделанных выше замечаний о связи между ind, Ind и dim для пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ имеют место равенства $\operatorname{ind} \mathscr{X} = 0$ и $\operatorname{ind} \mathscr{Y} = 0$, а равенство $\dim(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = 0$ для пространства $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ равносильно равенству $\operatorname{ind}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = 0$. С другой стороны, ясно, что *если* $\operatorname{ind} \mathscr{X} = 0$ *и* $\operatorname{ind} \mathscr{Y} = 0$, *то* $\operatorname{ind}(\mathscr{X} \times \mathscr{Y}) = 0$ (поскольку, если U — замкнутая окрестность точки p в $\mathscr{X}$, а V — замкнутая окрестность точки q в $\mathscr{Y}$, то произведение $U \times V$, обладая открытым дополнением $(\mathscr{X} \setminus U) \times \times \mathscr{Y} \cup \mathscr{X} \times (\mathscr{Y} \setminus V)$, будет замкнутой окрестностью точки (p, q) в $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$). $\square$

Замечание 3. Обозначения наводят на мысль, что наряду с инвариантом dim (и «улучшенным» инвариантом dim′) можно определить другие целочисленные инварианты ind и Ind, также могущие претендовать на роль размерности. Это действительно так, но, к сожалению, эти инварианты совпадают, вообще говоря, только для метризуемых пространств, удовлетворяющих второй аксиоме счетности, и за их пределами расходятся.

Изучение этих — и других аналогичных инвариантов — составляет предмет так называемой теории размерностей.

После всей этой предварительной работы мы уже можем непосредственно приступить к построению примера Тихонова.

Пусть $\mathscr{X} = [0, \omega] \times [0, \Omega]$ — прямое произведение сегментов порядковых чисел $[0, \omega]$ и $[0, \Omega]$. Согласно полученным выше результатам $\mathscr{X}$ является нульмерным ($\dim \mathscr{X} = 0$) хаусдорфовым и компактным пространством. Пусть A — открытое подпространство пространства $\mathscr{X}$, состоящее из всех его точек, за исключением «угловой точки» (ω, Ω). Мы покажем, что $\dim A \geqslant 1$. Поскольку неравенство $\dim A \geqslant 1$ означает, что $\dim A \neq 0$, и поскольку равенство $\dim A=0$ равносильно равенству $\operatorname{Ind} A=0$, для этого нам достаточно доказать, что $\operatorname{Ind} A\neq 0$, т. е. что в подпространстве A существует такое замкнутое множество F и такая его окрестность U, что ни одна окрестность V множества F, содержащаяся в U, не является замкнутым множеством. Мы докажем даже большее, а именно, найдем в A такое замкнутое множество F и такую ее окрестность U, что *для любой содержащейся в U окрестности V множества A ее замыкание $\overline{V}$ не содержится в U*. (Это означает, что между F и $A\setminus U$ в A нет перегородки, т. е. что A не нормально. С другой стороны, будучи компактным и хаусдорфовым, пространство $\mathscr{X}$ нормально. Таким образом, *пространство $\mathscr{X}$ является также примером нормального, но не вполне нормального пространства*).

За F мы примем множество всех точек пространства $\mathscr{X}$, имеющих вид (n, Ω), где $0\leqslant n<\omega$, а за U — множество всех точек, имеющих вид (n, β), где $0\leqslant n<\omega$ и $0\leqslant\beta\leqslant\Omega$. Ясно, что множество U открыто (в A и в $\mathscr{X}$), а множество F замкнуто (в A, но не в $\mathscr{X}$). Пусть V — произвольное открытое (в A, а значит, и в $\mathscr{X}$) множество, содержащее множество F и содержащееся в множестве U. Для любого n, $0\leqslant n<\omega$, множество всех чисел $\beta\leqslant\Omega$, для которых $(n, \beta)\in V$, открыто в $[0, \Omega]$ (почему?) и содержит Ω. Поэтому существует такое число $\alpha_n<\Omega$, что весь полуинтервал $(\alpha_n, \Omega]=(\alpha_n, \Omega)\cup\{\Omega\}$ содержится в этом множестве. Пусть $\alpha=\sup\alpha_n$. Так как $\alpha_n<\Omega$, то $\alpha<\Omega$ (см. выше) и для любого числа $\beta\in(\alpha, \Omega)$ каждая точка (n, β) принадлежит V.

С другой стороны, каждая окрестность W точки (ω, β) в A содержит окрестность вида $[N, \omega]\times(\beta_1, \beta_2)$, где N — некоторое натуральное число $(<\omega)$, а β_1 и β_2 — такие порядковые числа второго класса, что $\beta_1<\beta<\beta_2$. Поэтому окрестность W содержит все точки (n, β) с $n>N$ и потому пересекается с V. Следовательно, $(n, \omega)\in\overline{V}$ и, значит, $\overline{V}\not\subset U$. $\square$

Вернемся теперь к прямым произведениям и перенесем их конструкцию на случай любого (вообще говоря, бесконечного) числа множителей.

Пусть $\{\mathscr{X}_\alpha, \alpha\in\mathrm{A}\}$ — произвольное семейство топологических пространств, и пусть $\mathscr{X}$ — множество всевозможных семейств $\{x_\alpha\}$, где $x_\alpha\in\mathscr{X}_\alpha$.

Для любого конечного множества индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и любых открытых подмножеств $U_{\alpha_1} \subset \mathscr{X}_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \subset \mathscr{X}_{\alpha_n}$ обозначим через $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n})$ подмножество множества $\mathscr{X}$, состоящее из всех точек $\{x_\alpha\}$, для которых

$$x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_1}, \ \ldots, \ x_{\alpha_n} \in U_{\alpha_n}.$$

Ясно, что

$$O(U_{\alpha_1}, \ \ldots, \ U_{\alpha_n}) = O(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap O(U_{\alpha_n}),$$

и, значит, пересечение любых двух множеств вида $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n})$ также является множеством такого же вида. Поэтому множество всех множеств $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n})$ является базой открытых множеств некоторой топологии на множестве $\mathscr{X}$ (открытыми множествами этой топологии являются, таким образом, всевозможные объединения множеств вида $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n})$).

Определение 1. Получающееся топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *прямым* (или *тихоновским*) *произведением* пространств $\mathscr{X}_\alpha$. Обозначается оно символом

$$\prod_{\alpha \in A} \mathscr{X}_\alpha$$

(употребляется также обозначение $\bigtimes_{\alpha \in A} \mathscr{X}_\alpha$). При конечном семействе $\{X_\alpha\}$ мы получаем, очевидно, прямое произведение в смысле определения 5 лекции 8.

Теорема 1. *Прямое произведение любого семейства компактных пространств компактно.*

Эта теорема известна как теорема Тихонова. Чтобы ее доказать, мы переформулируем определение компактности пространства в терминах, удобных для ее доказательства.

Пусть пока $\mathscr{X}$ — произвольное множество.

Определение 2. Множество Φ подмножеств множества $\mathscr{X}$ называется *фильтром*, если

1° любое подмножество множества $\mathscr{X}$, содержащее некоторое подмножество из Φ, принадлежит Φ:

$$A \subset B \subset \mathscr{X}, \ A \in \Phi \Rightarrow B \in \Phi;$$

2° пересечение любых двух подмножеств из Φ принадлежит Φ:

$$A, \ B \in \Phi \Rightarrow A \cap B \in \Phi;$$

3° все $\mathscr{X}$ принадлежит Φ, но пустое множество $\varnothing$ нет:

$$\varnothing \notin \Phi, \quad \mathscr{X} \in \Phi.$$

Пример 1. Для любой точки x_0 множества $\mathscr{X}$ семейство всех подмножеств множества $\mathscr{X}$, содержащих точку x_0, является фильтром.

Пример 2. Если $\mathscr{X}$ — топологическое пространство, то для любой точки $x_0 \in \mathscr{X}$ семейство всех подмножеств A множества $\mathscr{X}$, для которых x_0 является внутренней точкой ($x_0 \in \operatorname{Int} A$), является фильтром.

Пример 3. Если множество $\mathscr{X}$ бесконечно, то все множества, дополнения которых конечны, образуют фильтр.

Пример 4. Если Φ — фильтр и M — подмножество, ему не принадлежащее, то множество Φ_M всех подмножеств $A \subset \mathscr{X}$, для которых $A \cup M \in \Phi$, образует фильтр.

Определение 3. Множество Γ подмножеств множества $\mathscr{X}$ называется *центрированным*, если пересечение любого его конечного подсемейства не пусто.

Ясно, что *если Γ центрировано, то для любого отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ множество $f\Gamma = \{fA;\ A \in \Gamma\}$ также центрировано.*

Из свойств 2 и 3 фильтров немедленно следует, что *любой фильтр является центрируемым множеством.*

Обратно, легко видеть, что *любое центрированное множество Γ содержится в некотором фильтре.* Действительно, ясно, что таким фильтром будет, например, множество $\Phi(\Gamma)$ всех подмножеств множества $\mathscr{X}$, обладающих тем свойством, что каждое из них содержит подмножество, являющееся пересечением некоторого конечного семейства элементов множества Γ. $\square$

Фильтр $\Phi(\Gamma)$ является, очевидно, минимальным фильтром, содержащим центрированное множество Γ. Говорят, что он *порожден* этим множеством.

Напомним, что элемент m частично упорядоченного множества A называется *максимальным*, если из $m \leqslant a$ следует, что $m = a$. Элементы a и b множества A называются *сравнимыми*, если либо $a \leqslant b$, либо $b \leqslant a$. Подмножество C частично упорядоченного множества называется *цепью*, если оно линейно упорядочено, т. е. любые его два элемента сравнимы. Элемент c_0 называется *верхней гранью* цепи C, если $c \leqslant c_0$ для любого элемента $c \in C$. Частично упорядоченное множество A называется *индуктивным*, если любая его цепь обладает хотя бы одной верхней гранью.

Примером частично упорядоченного множества является множество FILTR ($\mathscr{X}$) всех фильтров на множестве $\mathscr{X}$, упорядоченное по включению ($\Phi \leqslant \Psi$, если $\Phi \subset \Psi$).

Максимальные элементы этого множества называются *ультрафильтрами*. Таким образом, фильтр Φ является ультрафильтром, если любой фильтр, его содержащий, совпадает с Φ.

Легко видеть, что *множество Φ подмножеств множества $\mathscr{X}$ тогда и только тогда является ультрафильтром, когда*:

а) *пересечение любых двух множеств из Φ не пусто*;

б) *все множество $\mathscr{X}$ принадлежит Φ*;

в) *из любых двух взаимно дополнительных подмножеств A и $B = \mathscr{X} \setminus A$ множества $\mathscr{X}$ одно (и только одно) принадлежит Φ.*

Действительно, условие **а**—это условие 2° из определения фильтра, а условие **б**—это первая часть условия 3°, вторая часть которого следует из первой и условия **в** (примененного к $A = \mathscr{X}$). Далее, если $A \subset B \subset \mathscr{X}$ и $A \in \Phi$, но $B \notin \Phi$, то в силу условия **в** $\mathscr{X} \setminus B \in \Phi$, что противоречит условию а, так как $(\mathscr{X} \setminus B) \cap A = \varnothing$. Следовательно, множество подмножеств Φ, удовлетворяющее условиям **а**—**в**, является фильтром. Если этот фильтр содержится в фильтре Ψ и существует множество $A \in \Psi$, не принадлежащее Φ, то $B = \mathscr{X} \setminus A$ принадлежит Φ, а значит, и Ψ, что невозможно (ибо $A \cap B = \varnothing$). Поэтому $\Psi = \Phi$ и, значит, Φ является ультрафильтром.

Обратно, если Φ—ультрафильтр, то условия **а** и **б**, очевидно, выполнены, а для доказательства условия **в** достаточно заметить, что при $A \notin \Phi$ фильтр Φ_A (см. пример 4) содержит, очевидно, фильтр Φ. Поэтому в силу максимальности ультрафильтра Φ фильтр Φ_A совпадает с Φ. Но ясно, что фильтр Φ_A содержит множество $B = \mathscr{X} \setminus A$. Следовательно, $B \in \Phi$. □

Отсюда, в частности, непосредственно вытекает, что *каждый фильтр из примера* 1 *является ультрафильтром*. Такие ультрафильтры называются *тривиальными*.

Далее, легко видеть, что *любое множество A, пересекающееся с каждым элементом ультрафильтра Φ, принадлежит Φ*. Действительно, если $A \notin \Phi$, то в ультрафильтре Φ найдется элемент (а именно $\mathscr{X} \setminus A$), не пересекающийся с A. □

Цепями множества FILTR $(\mathscr{X})$ являются такие множества фильтров $\{\Phi_\alpha\}$, что для любых α и β либо $\Phi_\alpha \subset \Phi_\beta$, либо $\Phi_\beta \subset \Phi_\alpha$. При этом легко видеть, что *объединение* Φ *всех фильтров цепи является фильтром* (достаточно заметить, что любые два элемента этого объединения принадлежат некоторому фильтру Φ_α). Поскольку фильтр Φ содержит все фильтры Φ_α, он является их верхней гранью. Мы видим, следовательно, что *множество всех фильтров индуктивно.*

Но согласно известной лемме Цорна (называемой также теоремой Куратовского—Цорна) *любое индуктивное множество A имеет максимальный элемент и, более того, для любого элемента $a_0 \in A$ существует такой максимальный элемент m, что $a_0 \leqslant m$.*

Приведем для полноты доказательство этой леммы. Пусть множество A произвольным образом занумеровано порядковымн числами некоторого интервала $[0, \alpha)$. (Подчеркнем, что эта нумерация никак не связана с ямеющейся в A частичной упорядоченностью.) Ясно, что без ограничения общности, мы можем считать, что данный элемент a_0 имеет номер 0. Рассмотрим в A подмножество C, удовлетворяющее следующим условиям:

а) элемент a_0 принадлежит C;

б) элемеит множества A, имеющий номер ξ, тогда и только тогда принадлежит C, когда он сравним со всеми элементами из A, имеющими меньшие номера.

Ясно, что эти условия однозначно характеризуют подмножество C и что это подмножество является цепью. Пусть m — произвольная верхняя грань множества C (существующая в силу условия индуктивности). Так как элемент m сравним с любым элементом из C, то каждый элемент $a \geqslant m$ также сравним с любым элементом из C и, в частности, со всеми элементами из C, имеющими меньшие номера. Поэтому в силу условия **б** элемент a принадлежит C, и, значит, $a \leqslant m$. Этим доказано, что элемент m максималеи. Для завершения доказательства остается заметить, что по построению $a_0 \leqslant m$.

В силу леммы Цорна, примененной к индуктивному множеству FILTR $(\mathscr{X})$, *любой фильтр на множестве $\mathscr{X}$ содержится в некотором ультрафильтре.*

Это дает нам неограниченный запас нетривиальных ультрафильтров.

Замечание 4. Любопытно, что ни один нетривиальный ультрафильтр нельзя построить явным образом без каких-либо элементов произвола, т. е., другими словами, охарактеризовать его списком свойств так, чтобы он оказался единственным ультрафильтром с этими свойствами. (Доказательство этого утверждения дается в математической логике на основе четкой экспликации всех необходимых логико-математических понятий.)

Пусть теперь $\mathscr{X}$ — топологическое пространство.

Определение 4. Точка $p_0 \in \mathscr{X}$ называется *точкой прикосновения* множества Φ подмножеств топологического пространства $\mathscr{X}$, если каждая окрестность этой точки пересекается с каждым элементом A множества Φ, т. е., иными словами, если $p_0 \in \overline{A}$ для любого $A \in \Phi$.

Таким образом, точки прикосновения множества Φ — это точки пересечения

$$\bigcap_{A \in \Phi} \overline{A} \tag{2}$$

замыканий $\overline{A}$ всех множеств $A \in \Phi$.

Заметим, что *если Φ — фильтр, то множество* (2) *совпадает с пересечением всех замкнутых множеств из* Φ.

Дополнение к множеству (2) — это в точности объединение открытых множеств $\mathscr{X} \setminus \overline{A}$. Следовательно, *множество Φ тогда и только тогда не имеет точек прикосновения, когда множества $\mathscr{X} \setminus \overline{A}$, $A \in \Phi$, покрывают $\mathscr{X}$.*

Определение 5. Если каждая окрестность точки $p_0 \in \mathscr{X}$ содержит некоторый элемент множества подмножеств Φ (и, значит, — в случае, когда Φ является фильтром, — принадлежит Φ), то говорят, что Φ *сходится к точке* p_0.

Легко видеть, что *если множество Φ является ультрафильтром, то оно сходится к каждой своей точке прикосновения.* Действительно, если окрестность U точки p_0 пересекается с каждым элементом ультрафильтра Φ, то U принадлежит Φ. □

Теперь мы можем доказать нужный нам критерий компактности.

Предложение 1. *Следующие свойства топологического пространства $\mathscr{X}$ равносильны:*

1° *Пространство $\mathscr{X}$ компактно.*

2° *Любое центрированное множество его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

3° *Каждый фильтр на $\mathscr{X}$ имеет точки прикосновения.*

4° *Каждый ультрафильтр на $\mathscr{X}$ сходится.*

Доказательство. Достаточно, очевидно, доказать импликации

$$\begin{tikzcd} & & 3^\circ \arrow[dd, Rightarrow] \\ 1^\circ \arrow[r, Leftrightarrow] & 2^\circ \arrow[ur, Rightarrow] & \\ & & 4^\circ \arrow[ul, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Импликации $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$ и $2^\circ \Rightarrow 1^\circ$. Утверждение, что пересечение всех элементов A некоторого множества Γ подмножеств пространства $\mathscr{X}$ пусто, означает, что дополнения $\mathscr{X} \setminus A$ этих элементов покрывают $\mathscr{X}$, а утверждение, что множество Γ центрировано, означает, что никакое конечное семейство дополнений $\mathscr{X} \setminus A$ не покрывает $\mathscr{X}$. Поэтому, если множество замкнутых подмножеств компактного пространства $\mathscr{X}$ имеет пустое пересечение, то оно никак не может быть центрированным, а если пересечение любого центрированного множества замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$ не пусто, то каждое семейство открытых множеств пространства $\mathscr{X}$, ни одно конечное подсемейство которого не покрывает $\mathscr{X}$, само не покрывает $\mathscr{X}$.

Импликация $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Достаточно заметить, что множество Γ всех замкнутых подмножеств, принадлежащих произвольному фильтру Φ, центрировано, и что каждая точка прикосновения фильтра Φ является общей точкой элементов множества Γ.

Импликация $3^\circ \Rightarrow 4^\circ$. Если каждый фильтр имеет точки прикосновения, то, в частности, точка прикосновения имеет и каждый ультрафильтр. С другой стороны, ультрафильтр тогда и только тогда сходится, когда у него есть точки прикосновения.

Импликация $4^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Каждое центрированное множество содержится в некотором ультрафильтре. Поэтому, если этот ультрафильтр сходится, то центрированное множество имеет точку прикосновения (любая точка прикосновения произвольного множества множеств является точкой прикосновения и каждого подмножества этого множества). С другой стороны, если множество множеств состоит из замкнутых множеств, то каждая его точка прикосновения принадлежит пересечению всех его элементов. Таким образом, если в пространстве $\mathscr{X}$ каждый ультрафильтр сходится (имеет точку прикосновения), то любое центрированное множество замкнутых подмножеств пространства $\mathscr{X}$ имеет непустое пересечение. □

Теперь теорема Тихонова доказывается без всякого труда.

Доказательство теоремы 1. Пусть Φ—произвольный ультрафильтр на прямом произведении

$$\mathscr{X} = \prod_{\alpha \in A} \mathscr{X}_\alpha$$

компактных пространств $\mathscr{X}_\alpha$. Рассмотрим образ $\text{пр}_\alpha \Phi$ этого ультрафильтра при канонической проекции $\text{пр}_\alpha\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}_\alpha$, $\{x_\alpha\} \mapsto x_\alpha$. Поскольку Φ является центрированным множеством, его проекция $\text{пр}_\alpha \Phi$ также центрирована. Поэтому центрировано и множество Γ_α, состоящее из замыканий элементов множества $\text{пр}_\alpha \Phi$ (т. е. из множеств $\overline{A}_\alpha$, где $A_\alpha = \text{пр}_\alpha A$, $A \in \Phi$). Следовательно, поскольку пространство $\mathscr{X}_\alpha$ компактно, существует точка $p_\alpha \in \mathscr{X}_\alpha$, принадлежащая всем множествам $\overline{A}_\alpha$ из Γ_α, т. е. такая, что каждая ее окрестность U_α пересекается с каждым множеством A_α.

Для множеств A фильтра Φ это означает, что все они пересекаются с множеством $O(U_\alpha)$, откуда следует,—поскольку Φ является ультрафильтром,—что $O(U_\alpha) \in \Phi$.

Выбрав для любого α одну из точек p_α и получив тем самым некоторую точку $\{p_\alpha\}$ произведения $\mathscr{X}$, рассмотрим произвольную окрестность W этой точки в $\mathscr{X}$. По определению эта окрестность содержит некоторое множество вида $O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n})$, где $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ — окрестности точек $p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n}$ в пространствах $\mathscr{X}_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, \mathscr{X}_{\alpha_n}$ соответственно. Но, как мы только что видели, все множества $O(U_{\alpha_1}), \ldots, O(U_{\alpha_n})$ принадлежит ультрафильтру Φ. Поэтому ультрафильтру Φ принадлежит и их пересечение

$$O(U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}) = O(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap O(U_{\alpha_n}),$$

а значит, и окрестность W.

Таким образом, любая окрестность точки $\{p_\alpha\}$ принадлежит ультрафильтру Φ, и, значит, этот ультрафильтр сходится к $\{p_\alpha\}$.

Тем самым доказано, что в пространстве $\mathscr{X}$ любой ультрафильтр сходится. Следовательно, пространство $\mathscr{X}$ компактно. □