Лекция 11

Гладкость на аффинном пространстве.— Многообразие матриц данного ранга.— Многообразия Штифеля.— Ряды матриц.— Экспоненциал матрицы.— Логарифм матрицы.— Ортогональные и J-ортогональные матрицы.— Матричные группы Ли.— Группы J-ортогональных матриц.— Унитарные и J-унитарные матрицы.— Комплексные матричные группы Ли.— Комплексно аналитические многообразия.— Линейно связные пространства.— Связные пространства.— Совпадение связности и линейной связности для многообразий.— Гладкие и кусочно гладкие пути.— Связные многообразия, не удовлетворяющие второй аксиоме счетности.

Возвращаясь к гладким (класса C^∞) многообразиям, дополним приведенный в лекции 6 список их примеров. Эти примеры не только иллюстрируют общую теорию, но и являются истоком важных теорем, которые, к сожалению, почти полностью остаются за рамками этого курса.

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольное n-мерное аффинное пространство над полем $\mathbb{R}$. Каждый репер $Oe_1\ldots e_n$ этого пространства определяет координатный изоморфизм $h\colon \mathcal{A}\to\mathbb{R}^n$ (переводящий точку M с $\overrightarrow{OM}=x^1e_1+\ldots+x^ne_n$ в точку $(x^1, \ldots, x^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$), и, значит,— карту $(\mathcal{A}, h)$.

Эта карта составляет одноэлементный атлас на $\mathcal{A}$ и, следовательно, задает на $\mathcal{A}$ некоторую гладкость (ср. пример 1 лекции 1). Для любого другого репера $O'e_1'\ldots e_n'$ соответствующая карта $(\mathcal{A}, h')$ связана с картой $(\mathcal{A}, h)$ отображением перехода $h'\circ h^{-1}$, являющимся аффинным (и, значит, диффеоморфным класса C^ω) отображением $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, и поэтому согласована с картой $(\mathcal{A}, h)$. Это означает, что гладкость, задаваемая картой $(\mathcal{A}, h)$, не зависит от выбора репера $Oe_1\ldots e_n$. Мы будем называть ее *стандартной гладкостью* на $\mathcal{A}$. Она, очевидно, согласована с топологией на $\mathcal{A}$.

Поскольку каждое линейное пространство автоматически является аффинным пространством, все это применимо, в частности, к произвольному линейному пространству; например, к mn-мерному линейному пространству $\mathbb{R}(m, n)$ всех вещественных прямоугольных матриц размера $m\times n$. Таким образом, $\mathbb{R}(m, n)$ *является mn-мерным гладким (класса C^ω) многообразием.* Чтобы получить карту, покрывающую это многообразие, нужно элементы каждой матрицы A из $\mathbb{R}(m, n)$ выписать в строчку в произвольном, одном и том же для всех матриц порядке.

Группа $\mathrm{GL}(n)$ всех невырожденных матриц порядка n выделяется в линейном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}(n, n)$ всех квадратных матриц A порядка n условием $\det A \neq 0$. Так как определитель матрицы, будучи многочленом от ее элементов, непрерывно от них зависит (функция $\det$: $A \longrightarrow \det A$ непрерывна на $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$), то группа $\mathrm{GL}(n)$ является открытым множеством гладкого многообразия $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и потому на ней определена индуцированная гладкость. Таким образом, *группа* $\mathrm{GL}(n)$ *представляет собой гладкое* (*класса* C^ω) *многообразие*. Размерность этого многообразия равна n^2.

Чтобы получить менее тривиальный пример гладкого многообразия, введем в рассмотрение подмножество $\mathbb{R}(m, n; k)$ пространства $\mathbb{R}(m, n)$, состоящее из матриц ранга k, где $0 \leqslant k \leqslant \min(m, n)$. Являясь подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}(m, n)$, это множество представляет собой топологическое пространство (по отношению к индуцированной топологии).

Оказывается, что в *множество* $\mathbb{R}(m, n; k)$ *можно естественным образом ввести согласованную с топологией гладкость, относительно которой оно будет гладким многообразием размерности* $k(m+n-k)$.

Рассмотрим с этой целью подмножество $U \subset \mathbb{R}(m, n; k)$, состоящее из всех $m \times n$-матриц вида

$$(1) \qquad \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix},$$

где A — невырожденная $k \times k$-матрица (т. е. матрица из $\mathrm{GL}(k)$), а матрицы B, C и D, имеющие соответственно размеры $(m-k) \times k$, $k \times (n-k)$ и $(m-k) \times (n-k)$, произвольны.

Выбрав и зафиксировав определенный порядок выписывания элементов матриц A, B и C в одну строчку, мы получим отображение h множества U на некоторое подмножество U_0 пространства $\mathbb{R}^N$, где

$$N = k^2 + (m-k)k + k(n-k) = k(m+n-k).$$

Так как матрица (1) имеет тот же ранг, что и матрица

$$\begin{Vmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A & B \\ C & D \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{Vmatrix}$$

(ибо первый сомножитель слева невырожден), а последняя матрица имеет ранг k тогда и только тогда, когда $D-CA^{-1}B=0$, то матрица (1) однозначно определяется матрицами A, B, C, где A — невырожденная матрица, а на матрицы B и C не накладывается, вообще говоря, никаких условий. Это означает, что множество U, а значит, и множество U_0 открыты (в $\mathbb{R}(m, n; k)$ и $\mathbb{R}^N$ соответственно), а отображение $h\colon U \to U_0$ биективно. Следовательно, пара (U, h) является картой в $\mathbb{R}(m, n; k)$.

Обратное отображение $h^{-1}\colon U_0 \to U$ состоит в восстановлении матриц A, B, C по данному вектору-строке и в заполнении правого нижнего угла матрицы (1) матрицей

$$D=CA^{-1}B.$$

Пусть теперь $\alpha\colon \mathbb{R}(m, n; k) \to \mathbb{R}(m, n; k)$ — биективное отображение множества $\mathbb{R}(m, n; k)$ на себя, задающееся некоторой перестановкой строк или столбцов (имеется всего $m!n!$ таких отображений), и пусть

$$U_\alpha=\alpha U \quad \text{и} \quad h_\alpha=h\circ\alpha^{-1}.$$

Тогда пара (U_α, h_α) также будет картой в $\mathbb{R}(m, n; k)$.

Поскольку любая $m\times n$-матрица ранга k перестановками строк и столбцов может быть переведена в матрицу вида (1), *множества* U_α *покрывают множество* $\mathbb{R}(m, n; k)$.

Пусть $U_\alpha\cap U_\beta \neq \varnothing$. Множество

$$\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta)=U\cap(\alpha^{-1}\circ\beta)\,U$$

состоит из матриц (1), которые после перестановки $\alpha^{-1}\circ\beta$ не выходят из U, т. е. минор порядка k которых, переходящий при $\alpha^{-1}\circ\beta$ в левый верхний минор, отличен от нуля. Этот минор представляет собой некоторую рациональную (ибо $D=CA^{-1}B$) и, следовательно, непрерывную (в ее области определения) функцию от элементов матриц A, B, C. Поэтому в $U_0=h(U)$ множество, на котором эта функция отлична от нуля, т. е. множество

$$h(\alpha^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta))=h_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta),$$

открыто.

Отображение

$$(2)\quad h_\beta\circ h_\alpha^{-1}=h\circ(\beta^{-1}\circ\alpha)\circ h^{-1}\colon h_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\to h_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$$

точку из $h_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\subset U_0$, отвечающую матрице (1) (а точнее, матрицам A, B и C), переводит сначала в матрицу (1), т. е. в матрицу

$$\begin{Vmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{Vmatrix},$$

затем подвергает эту матрицу некоторой перестановке строк и столбцов и, наконец, выписывает в одну строчку все элементы, оказавшиеся на месте матриц A, B и C. Это показывает, что отображение (2) задается рациональными функциями координат. Эти функции определены на $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ и, значит, гладки на $h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$. Это доказывает, что *любые две карты вида* (U_α, h_α) *согласованы друг с другом.*

Следовательно, все эти карты составляют некоторый атлас. Гладкость, определенная этим атласом (очевидно, согласованная с топологией в $\mathbb{R}(m, n; k)$), и является гладкостью, которую мы имели в виду построить. $\square$

Заметим, что при $m=n=k$ атлас составляет уже одна карта (U, h), и это в точности атлас, задающий указанную выше гладкость на $\mathrm{GL}(n)$.

Пусть $\mathscr{V}$ — произвольное n-мерное линейное пространство над полем вещественных чисел. Называя *m-реперами* в $\mathscr{V}$, где $0 \leqslant m \leqslant n$, линейно независимые семейства векторов из $\mathscr{V}$, состоящие из m векторов, рассмотрим множество $V(m, \mathscr{V})$ всех m-реперов в $\mathscr{V}$. Выбрав в $\mathscr{V}$ произвольный базис (n-репер), мы можем сопоставить каждому m-реперу $m \times n$-матрицу, столбцы которой состоят из координат векторов этого репера в данном базисе. Ясно, что тем самым получится некоторое биективное отображение $V(m, \mathscr{V}) \to \mathbb{R}(m, n; m)$. Перенося с помощью этого отображения гладкость из $\mathbb{R}(m, n; m)$ в $V(m, \mathscr{V})$, мы получим на $V(m, \mathscr{V})$ структуру гладкого многообразия, которая, очевидно, не зависит от выбора базиса в $\mathscr{V}$.

Это многообразие называется *многообразием Штифеля* линейного пространства $\mathscr{V}$. При $\mathscr{V} = \mathbb{R}^n$ оно обозначается через $V(m, n)$.

Задача 1. Покажите, что множество $G(m, \mathscr{V})$ всех m-мерных подпространств n-мерного линейного пространства $\mathscr{V}$ является $m(n-m)$-мерным гладким многообразием. (Это многообразие называется *многообразием Грассмана*; ср. лекцию II.9.)

Для изучения более сложных гладких многообразий, состоящих из матриц, нам понадобятся некоторые сведения из общей теории матриц.

На линейном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ всех квадратных матриц $A = \left\| a_i^j \right\|$ порядка n можно ввести много различных норм, т. е. таких функций $A \longmapsto |A|$ со значениями в поле $\mathbb{R}$, что

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|, \quad |kA| = |k| \cdot |A|$$

и

$$|A| > 0 \text{ при } A \neq 0$$

для любых матриц A, B и любого числа k. Нам будет удобна норма, определенная формулой

$$|A| = n \cdot \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \left| a_i^j \right|.$$

Эта норма обладает тем приятным свойством, что для *любых матриц* $A = \left\| a_j^i \right\|$ *и* $B = \left\| b_j^i \right\|$ *имеет место неравенство*

$$|AB| \leqslant |A| \cdot |B|.$$

Действительно, по определению умножения матриц элементы c_j^i матрицы AB выражаются формулой $c_j^i \;\; a_k^i b_j^k$, т. е. формулой

$$c_j^i = \sum_{k=1}^{n} a_k^i b_j^k, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Поэтому

$$|AB| = n \cdot \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \left| c_j^i \right| \leqslant n \cdot \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \sum_{k=1}^{n} \left| a_k^i \right| \cdot \left| b_j^k \right| \leqslant$$

$$\leqslant n \cdot \underbrace{\left(\frac{|A|}{n} \cdot \frac{|B|}{n} + \ldots + \frac{|A|}{n} \cdot \frac{|B|}{n} \right)}_{n \text{ раз}} = |A| \cdot |B|. \quad \square$$

Кроме того, для этой нормы

$$\left| A^{\mathsf{T}} \right| = |A|.$$

В соответствии с общими определениями анализа мы будем говорить, что последовательность $\{A(m)\}$ матриц $A(m) = \left\| a_j^i(m) \right\|$ *сходится* к матрице $A = \left\| a_j^i \right\|$ (и будем писать $A(m) \longrightarrow A$ при $m \longrightarrow \infty$), если

$$|A(m) - A| \longrightarrow 0$$

при $m \longrightarrow \infty$ или, что, очевидно, равносильно, если $a_j^i(m) \longrightarrow a_j^i$ для любых $i, j = 1, \ldots, m$.

О бесконечном матричном ряде

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_m + \ldots \tag{3}$$

мы будем говорить, что он *сходится* к матрице A, если к A сходится последовательность $\{A(m)\}$ его *частичных сумм*

$$A(m) = A_0 + \ldots + A_m.$$

Известный критерий сходимости Коши непосредственно переносится на матричные ряды, т. е. *ряд* (3) *тогда и только тогда сходится, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* $M_0 > 0$, *что для любого* $m > M_0$ *и каждого* $p \geq 0$

$$|A_m + A_{m+1} + \ldots + A_{m+p}| < \varepsilon.$$

Ряд (3) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд

$$|A_0| + |A_1| + \ldots + |A_m| + \ldots$$

Поскольку

$$|A_m + A_{m+1} + \ldots + A_{m+p}| \leqslant |A_m| + |A_{m+1}| + \ldots + |A_{m+p}|,$$

из критерия сходимости Коши непосредственно следует, что *каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Примером абсолютно сходящегося ряда служит ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!} = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots + \frac{A^m}{m!} + \ldots$$

Этот ряд сходится (абсолютно) для любой матрицы A. Его сумма называется *экспоненциалом* этой матрицы и обозначается символом e^A (или $\exp A$).

Ясно, что операция перехода к матрице e^A коммутирует с операцией $A \longmapsto A^\top$ транспонирования матриц, т. е.

(4) $$(e^A)^\top = e^{A^\top} \text{ для любой матрицы } A.$$

Кроме того,

(5) $$C^{-1}e^AC = e^{C^{-1}AC}$$

для любой невырожденной матрицы C (ибо $C^{-1}A^mC = (C^{-1}AC)^m$ для каждого m).

Если матрица A является верхнетреугольной матрицей с диагональными элементами $a_1, \ldots, a_n$, то каждая матрица A^m также верхнетреугольна, а ее диагональные элементы равны m-м степеням $a_1^m, \ldots, a_n^m$ диагональных элементов матрицы A. Поэтому верхнетреугольна и матрица e^A, а ее диагональными элементами являются числа $e^{a_1}, \ldots, e^{a_n}$. Для определителя матрицы e^A отсюда следует формула

(6) $$\det e^A = e^{\operatorname{Tr} A},$$

где $\operatorname{Tr} A$ — след матрицы A (сумма ее диагональных элементов). Но из курса линейной алгебры мы знаем (см. формулу (4) лекции II.15), что для каждой невырожденной матрицы

(7) $$\operatorname{Tr}(C^{-1}AC) = \operatorname{Tr} A$$

и что (см. предложение 2 лекции II.17) любая матрица имеет вид $C^{-1}AC$, где A — некоторая верхнетреугольная матрица (вообще говоря, с комплексными элементами). Поэтому в силу формулы (5) *формула* (6) *справедлива для любой матрицы* A.

В частности, мы видим, что *определитель каждой матрицы вида* e^A *положителен*, так что, в частности, *матрица* e^A *невырождена* (принадлежит группе GL (n)).

Равенство

$$e^A e^B = e^{A+B} \tag{8}$$

для произвольных матриц A и B, вообще говоря, неверно. Однако *оно верно, если матрицы A и B перестановочны*, потому что в этом случае сохраняет свою силу выкладка, доказывающая формулу (8) для чисел. [По формуле бинома для любого $m \geqslant 0$

$$\frac{(A+B)^m}{m!} = \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!} \frac{B^{m-k}}{(m-k)!},$$

и поэтому для любого $M > 0$

$$\sum_{m=0}^{2M} \frac{(A+B)^m}{m!} = \left(\sum_{m=0}^{M} \frac{A^m}{m!}\right)\left(\sum_{m=0}^{M} \frac{B^m}{m!}\right) + R_M,$$

где R_M — сумма членов вида

$$\frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^l}{l!},$$

распространенная на все пары (k, l), для которых $k+l \leqslant 2M$ и одно из чисел k и l больше M. Но так как число таких пар равно $M(M+1)$, а

$$\left|\frac{A^k}{k!} \cdot \frac{B^l}{l!}\right| \leqslant \frac{|A|^k}{k!} \frac{|B|^l}{l!} < \frac{\max(|A|, |B|)^{2M}}{M!},$$

то

$$|R_M| \leqslant M(M+1) \frac{\max(|A|, |B|)^{2M}}{M!}.$$

Следовательно, $|R_M| \longrightarrow 0$ при $M \longrightarrow \infty$, что и доказывает формулу (8).]

В частности, мы видим, что $e^A e^{-A} = e^0 = E$, т. е.

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}. \tag{9}$$

(Заметим, что это заново доказывает включение $e^A \in$ GL (n).)

Аналогично функции exp могут быть определены и другие матричные функции от A. Рассмотрим, например, ряд

$$(A-E) - \frac{(A-E)^2}{2} + \ldots + (-1)^{m+1} \frac{(A-E)^m}{m} + \ldots, \tag{10}$$

являющийся матричным аналогом известного логарифмического ряда. Поскольку логарифмический ряд абсолютно сходится при $|z-1|<1$, *ряд* (10) *абсолютно сходится при* $|A-E|<1$. Его сумма обозначается символом $\ln A$ и называется *логарифмом матрицы* A.

Подчеркнем, что, таким образом, *логарифм* $\ln A$ *определен только при* $|A-E|<1$.

Вообще говоря, $\ln(AB)\neq\ln A+\ln B$, но *если матрицы* A *и* B *перестановочны* (а матрицы $\ln A$, $\ln B$ и $\ln(AB)$ определены), *то*

$$\ln(AB)=\ln A+\ln B. \tag{11}$$

Доказательство аналогично доказательству формулы (6).

Если A — число (матрица порядка 1), то как известно, $e^{\ln A}=A$. Поэтому, подставив ряд для $\ln A$ вместо A в ряд для e^A, мы после раскрытия скобок и приведения подобных членов получим A (дайте прямое доказательство этого утверждения), причем эта выкладка будет законна для любых A, для которых ряд $\ln A$ сходится. Поскольку эта выкладка (вместе с обоснованием ее законности) полностью сохраняется для матриц любого порядка, мы видим, следовательно, что

$$e^{\ln A}=A \tag{12}$$

для любой матрицы A *с* $|A-E|<1$. (В частности, для любой такой матрицы $\det A>0$.)

По аналогичным соображениям должно иметь место и равенство

$$\ln e^A=A, \tag{13}$$

причем, поскольку для чисел соответствующая выкладка с рядами законна лишь при $|z|<\ln 2$ (почему?), то *равенство* (13) *имеет место при* $|A|<\ln 2$. (Заметим, что если $|A|<\ln 2$, то $|e^A-E|\leqslant\leqslant e^{|A|}-1<1$.)

Из формул (12) и (13) следует, что *матричные функции* exp *и* ln *задают взаимно обратные биективные отображения между окрестностью единичной матрицы* E, *состоящей из матриц* A *вида* e^B, *где* $|B|<\ln 2$, *и окрестностью нулевой матрицы* 0, *состоящей из матриц* B, *для которых* $|B|<\ln 2$.

При этом, поскольку элементы матриц e^A и $\ln A$ являются, очевидно, гладкими (вещественно аналитическими) функциями элементов матрицы A, *эти отображения являются диффеоморфизмами.*

Задача 2. Выведите из формулы (8) формулу (11). [Указание. Докажите, что при $|A|<\ln 2$ и $|B|<\ln 2$ из перестановочности матриц e^A и e^B вытекает перестановочность матриц A и B.]

Вытекает ли из формулы (11) формула (8)?

Замечание 1. Хотя нас в основном — пока явно не оговорено противное — интересуют лишь *вещественные матрицы* (состоящие из вещественных чисел), но иногда нам придется привлекать и матрицы с комплексными элементами (см., например, выше доказательство формулы (6)). Стоит поэтому заметить, что сказанное выше о матрицах e^A и $\ln A$ в одинаковой мере справедливо как для вещественных, так и для комплексных матриц.

Напомним (см. лекцию I.13), что вещественная матрица A называется *ортогональной*, если транспонированная матрица $A^\top$ ей обратна, т. е. если $A^\top A = E$.

Все ортогональные матрицы порядка n образуют группу, которая обозначается символом $\mathrm{O}(n)$.

Вообще, если J — произвольная невырожденная матрица порядка n, то матрица A порядка n, для которой

$$A^\top J A = J, \tag{14}$$

называется *J-ортогональной матрицей*. (Таким образом, E-ортогональные матрицы — это в точности матрицы ортогональные.) Все J-ортогональные матрицы образуют группу, которая обозначается символом $\mathrm{O}_J(n)$.

Из формулы (14) следует, что определитель J-ортогональной матрицы A равен ± 1. J-ортогональная матрица A с $\det A = 1$ называется *собственной* (или *унимодулярной*).

Все собственные J-ортогональные матрицы образуют подгруппу $\mathrm{SO}_J(n)$ группы $\mathrm{O}_J(n)$ (при $J = E$ — подгруппу $\mathrm{SO}(n)$).

Если для J-ортогональной матрицы A имеет место неравенство $|A - E| < 1$ и потому существует матрица $B = \ln A$, то

$$e^{JBJ^{-1}} = Je^BJ^{-1} = JAJ^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top = (e^{-B})^\top = e^{-B^\top}.$$

Следовательно, если $|B| < \ln 2$ (и потому $|JBJ^{-1}| < \ln 2$ и $|-B^\top| = |B| < \ln 2$), то $JBJ^{-1} = -B^\top$, т. е.

$$B^\top J = -JB. \tag{15}$$

Обратно, если (15) выполнено, то

$$(e^B)^\top = e^{B^\top} = e^{-JBJ^{-1}} = Je^{-B}J^{-1} = J(e^B)^{-1}J^{-1},$$

и, значит, матрица $A = e^B$ является J-ортогональной матрицей.

Матрицы, удовлетворяющие условию (15), называются *J-кососимметрическими*. (При $J = E$ — это обычные кососимметрические матрицы.)

Поскольку соотношение (15) линейно по B, *все J-кососимметрические матрицы (данного порядка n) составляют* *линейное подпространство пространства* $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. Это подпространство обозначается символом $\mathfrak{so}_J(n)$ (а при $J=E$ символом $\mathfrak{so}(n)$).

Рассмотрим ситуацию в общем виде.

Пусть $\mathcal{G}$ — группа, состоящая из вещественных матриц порядка n (подгруппа группы $\mathrm{GL}(n)=\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$).

Определение 1. Группа $\mathcal{G}$ называется *матричной группой Ли*, если в линейном пространстве $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ существует такое линейное подпространство $\mathfrak{g}$, что

1° Для любой матрицы $B\in\mathfrak{g}$ матрица e^B принадлежит группе $\mathcal{G}$.

2° Если $e^B\in\mathcal{G}$ и $|B|<\ln 2$, то $B\in\mathfrak{g}$.

Линейное пространство $\mathfrak{g}$ называется *алгеброй Ли* группы $\mathcal{G}$. (Это название объясняется тем, что она является алгеброй в общеалгебраическом смысле относительно операции $[B_1, B_2]=B_1B_2-B_2B_1$; см. ниже замечание 1 лекции 16.)

Таким образом, согласно проделанным выше вычислениям *для любой невырожденной матрицы J группа $\mathrm{O}_J(n)$ является матричной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{so}_J(n)$.*

Матричной группой Ли является, конечно, и вся группа $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (для нее $\mathfrak{g}=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$; заметим, кстати, что на этом основании линейное пространство $\mathrm{Mat}_n\mathbb{R}$ обозначается также символом $\mathfrak{gl}(n)$). Матричной группой Ли является и подгруппа $\mathrm{GL}^+(n)$ группы $\mathrm{GL}(n)$, состоящая из матриц с положительным определителем (для этой подгруппы также $\mathfrak{g}=\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$).

Из формулы (6) немедленно вытекает, что для группы $\mathrm{SL}(n)=\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ всех унимодулярных матриц свойствами 1° и 2° обладает (n^2-1)-мерное подпространство $\mathfrak{sl}(n)$ всех матриц B, для которых $\mathrm{Tr}\,B=0$ (физики называют такие матрицы *бесследными*). Таким образом, *группа $\mathrm{SL}(n)$ является матричной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(n)$.*

Значение матричных групп Ли в теории гладких многообразий определяется следующим предложением:

Предложение 1. *Каждая матричная группа Ли $\mathcal{G}$ обладает естественной структурой гладкого многообразия.*

Размерность этого многообразия равна размерности алгебры $\mathfrak{g}$.

Доказательство. Пусть U_0 — окрестность нулевой матрицы 0 в линеале $\mathfrak{g}$, состоящая из всех матриц $B\in\mathfrak{g}$, для которых $|B|<\ln 2$, и пусть $U=\exp U_0$. Тогда U открыто в $\mathcal{G}$ (почему?) и отображение $\ln\colon A\to\ln A$ является биективным (и даже гомеоморфным) отображением $U \to U_0$.

Выбрав определенный способ выписывания элементов матриц из $\mathfrak{g}$ в строку, и отождествив тем самым алгебру $\mathfrak{g}$ с пространством $\mathbb{R}^N$, где $N = \dim \mathfrak{g}$, мы можем рассматривать U_0 как подмножество пространства $\mathbb{R}^N$. Ясно, что это подмножество открыто в $\mathbb{R}^N$ и, значит, пара $(U, \ln)$ является картой в $\mathfrak{g}$.

Заметим, что $E \in U$.

Для любой матрицы C из $\mathcal{G}$ введем в рассмотрение множество $CU \subset \mathcal{G}$, состоящее из всех матриц из $\mathcal{G}$ вида CA, где $A \in U$, и отображение

$$h_C\colon CU \to U_0$$

этого множества на множество $U_0 \subset \mathbb{R}^N$, определенное формулой

$$h_C(CA) = \ln A, \qquad A \in U.$$

Ясно, что отображение h_C биективно, т. е. что пара (CU, h_C) является картой в $\mathcal{G}$. Так как $C = CE \in CU$, то все карты вида (CU, h_C) покрывают $\mathcal{G}$. С другой стороны, для любых двух матриц C_1, $C_2 \in \mathfrak{g}$ отображение

$$h_{C_2} \circ h_{C_1}^{-1}\colon h_{C_1}(C_1U \cap C_2U) \to h_{C_2}(C_1U \cap C_2U)$$

задается формулой

$$(h_{C_2} \circ h_{C_1}^{-1})(B) = \ln(C_2^{-1}C_1e^B),$$

причем множество $h_{C_1}(C_1U \cap C_2U)$ состоит из всех матриц $B \in U_2$, для которых $C_2^{-1}C_1e^B \in U$.

Поэтому множество $h_{C_1}(C_1U \cap C_2U)$ открыто, а отображение $h_{C_2} \circ h_{C_1}^{-1}$ гладко. Следовательно, карты (C_1U, h_{C_1}) и (C_2U, h_{C_2}) согласованы.

Мы видим, таким образом, что карты вида (CU, h_C) составляют атлас на $\mathcal{G}$ и, значит, задают на $\mathcal{G}$ структуру гладкого многообразия (очевидно, размерности N).

Тем самым предложение 1 полностью доказано. $\square$

В дальнейшем мы всегда будем считать, что каждая матричная группа Ли $\mathcal{G}$ снабжена построенной гладкостью.

Будучи подмножеством линейного пространства $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$, группа $\mathcal{G}$ наследует из $\operatorname{Mat}_n(\mathbb{R})$ его топологию.

Ясно, что в этой топологии все карты (CU, h_C) удовлетворяют условиям предложения 2 лекции 7, и, следовательно, *гладкость в группе $\mathcal{G}$ согласована с ее топологией*.

Таким образом, в частности, мы видим, что *группа* $\mathrm{SL}(n)$ *является гладким многообразием размерности* n^2-1.

Аналогично, *для любой невырожденной матрицы J порядка n группа $\mathrm{O}_J(n)$ всех J-ортогональных матриц порядка n является гладким многообразием.*

Размерность этого многообразия (равная размерности алгебры Ли $\mathfrak{so}_J(n)$) зависит, вообще говоря, от J.

Например, при $J=E$ алгебра $\mathfrak{so}_E(n)=\mathfrak{so}(n)$ состоит из всех кососимметрических матриц $B=\|b_j^i\|$ порядка n. Поскольку в n^2-мерном линеале $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ всех матриц порядка n кососимметрические матрицы выделяются $n(n+1)/2$ независимыми условиями

$$b_j^i=-b_i^j, \text{ где } i,\ j=1,\ \ldots,\ n \text{ и } i\leqslant j,$$

то

$$\dim \mathfrak{so}(n)=n^2-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}.$$

Таким образом, *размерность группы Ли* $\mathrm{O}(n)$ *равна* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Другой важный пример получается в случае, когда число n четно ($n=2m$) и матрица J имеет вид

$$J=\begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}, \tag{16}$$

где 0 и E — нулевая и единичная матрицы порядка m. В этом случае условие J-кососимметричности матрицы

$$A=\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{Vmatrix} \tag{17}$$

порядка n (где A_1, A_2, A_3, A_4 — матрицы порядка m) равносильно трем соотношениям

$$A_1^\top=-A_4,\quad A_2^\top=A_2,\quad A_3^\top=A_3, \tag{18}$$

означающим, что матрицы A_2 и A_3 симметричны и что матрица A_4 выражается через матрицу A_1 (не подчиненную никаким условиям). Поэтому размерность пространства J-кососимметрических матриц (обозначаемого в этом случае символом $\mathfrak{sp}(m;\ \mathbb{R})$) равна

$$m^2+2\cdot\frac{m(m+1)}{2}=m(2m+1)=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Матрицы, J-ортогональные по отношению к матрице (16), называются *симплектическими матрицами*, а их группа $O_J(n)$ (обычно обозначаемая символом $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$) называется *симплектической группой*. Согласно произведенному вычислению *группа* $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$ *является гладким многообразием размерности* $m(2m+1)$.

Матрицы четного порядка $n=2m$, одновременно ортогональные и симплектические, составляют *ортогональную симплектическую группу* $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R}) \cap O(2m)$. Эта группа является матричной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}(m; \mathbb{R}) \cap$ $\cap\, \mathfrak{so}(2m)$.

Ясно, что матрица (17) тогда и только тогда кососимметрична, когда $A_1^\top = -A_1$, $A_2^\top = -A_3$ и $A_4^\top = -A_4$. Вместе с условиями (18) это дает, что *матрица* (17) *тогда и только тогда принадлежит алгебре Ли* $\mathfrak{sp}(m; \mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}(2m)$, *когда*

$$A_1^\top = -A_1, \quad A_2^\top = A_2 \quad \text{и} \quad A_3 = -A_2, \quad A_4 = A_1.$$

Поэтому

$$\dim(\mathfrak{sp}(m; \mathbb{R}) \cap \mathfrak{so}(2m)) = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} = m^2,$$

и, значит, *группа* $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R}) \cap O(2m)$ *является гладким многообразием размерности* m^2.

Пусть $n=p+q$, и пусть

$$J = \begin{Vmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{Vmatrix},$$

где E_p и E_q — единичные матрицы порядка p и q соответственно.

Матрицы, J-ортогональные по отношению к этой матрице J, называются (см. лекцию II.12а) *псевдоортогональными матрицами типа* (p, q), а их группа $O_J(n)$ обозначается символом $O(p, q)$. (Таким образом, $O(n, 0) =$ $= O(0, n) = O(n)$.) Ясно, что *группа* $O(p, q)$ *является гладким многообразием размерности* $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (не зависящей от p и q).

Комплексным аналогом J-ортогональных матриц являются *J-унитарные матрицы* с комплексными элементами, удовлетворяющие соотношению

$$\bar{A}^\top J A = J \tag{19}$$

(при $J=E$ — это обычные унитарные матрицы; см. лекцию II.22), а комплексным аналогом J-кососимметрических матриц — *J-косоэрмитовы матрицы*, удовлетворяющие соотношению

$$\overline{B}^{\top}J=-JB$$

(при $J=E$ — это обычные косоэрмитовы матрицы; см. лекцию II.20).

Все J-унитарные матрицы составляют группу $\mathrm{U}_J(n)$ (при $J=E$ группу $\mathrm{U}(n)$), а J-косоэрмитовы матрицы — линеал $\mathfrak{u}_J(n)$ (при $J=E$ — линеал $\mathfrak{u}(n)$).

[Отметим, что линеал $\mathfrak{u}_J(n)$ хотя и состоит из комплексных матриц, но выдерживает умножение только на вещественные числа (после умножения на i косоэрмитовая матрица становится эрмитовой), т. е. $\mathfrak{u}_J(n)$ *является линейным пространством над полем* $\mathbb{R}$. При $J=E$ его размерность равна, как нетрудно подсчитать, n^2. (Условие косоэрмитовости матриц не накладывает никаких ограничений на $\frac{n(n-1)}{2}$ комплексных чисел выше главной диагонали и требует, чтобы n чисел на главной диагонали были чисто мнимыми).]

Задача 3. Покажите, что для любой J-косоэрмитовой матрицы B матрица e^B является J-унитарной матрицей и что для J-унитарной матрицы $A=e^B$ с $|B|<\ln 2$ матрица B необходимо J-косоэрмитова.

В порядке непосредственного обобщения определения мы будем применять термин «матричная группа Ли» и к группам $\mathcal{G}$, состоящим из комплексных матриц, для которых существует линеал $\mathfrak{g}\subset\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ (*над полем* $\mathbb{R}$), обладающий свойствами 1°, 2° из определения 1. В силу этого соглашения мы можем, таким образом, сказать, что *$\mathrm{U}_J(n)$ является матричной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}_J(n)$*. Поскольку предложение 1, очевидно, полностью сохраняет свою силу и для таких матричных групп Ли, мы видим, следовательно, что *группа $\mathrm{U}_J(n)$ является гладким многообразием*. При $J=E$ размерность этого многообразия равна n^2.

Задача 4. Покажите, что соответствие

$$\begin{Vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{Vmatrix} \longmapsto A_1+iA_2$$

является диффеоморфным (и одновременно изоморфным) отображением ортогональной симплектической группы $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{R})\cap\mathrm{O}(2m)$ на группу $\mathrm{U}(m)$.

Из соотношения (19) следует, что для любой J-унитарной матрицы A имеет место равенство

$$|\det A| = 1.$$

Унитарные матрицы A, для которых

$$\det A = 1$$

(*унимодулярные унитарные матрицы*), образуют подгруппу $\mathrm{SU}(n)$ группы $\mathrm{U}(n)$. Эта группа является матричной группой Ли с алгеброй Ли, состоящей из всех бесследных косоэрмитовых матриц порядка n (эта алгебра обозначается обычно символом $\mathfrak{su}(n)$). Так как, очевидно, $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$, то, следовательно, *группа* $\mathrm{SU}(n)$ *является гладким многообразием размерности* $n^2 - 1$.

Другой интересной подгруппой группы $\mathrm{U}(n)$ является (при $n = 2m$ четном) *унитарная симплектическая группа* $\mathrm{Sp}(m)$, состоящая из унитарных матриц порядка $n = 2m$, удовлетворяющих условию симплектичности (которое, конечно, имеет смысл и для комплексных матриц). Эта группа является матричной группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{sp}(m)$, состоящей из косоэрмитовых матриц (17), удовлетворяющих соотношениям (18). Но условие косоэрмитовости для матрицы (17) сводится к соотношениям

$$\bar{A}_1 = -A_1, \quad \bar{A}_4^\top = -A_4, \quad \bar{A}_2^\top = -A_3,$$

и эти соотношения вместе с соотношениями (18) дают, что

$$A_4 = \bar{A}_1, \quad A_3 = -\bar{A}_2,$$

где A_1 — косоэрмитова матрица (зависящая от m^2 вещественных параметров), а A_2 — симметрическая матрица (зависящая — ввиду ее комплексности — от $m(m+1)$ вещественных параметров). Это показывает, что $\dim \mathfrak{sp}(m) = m^2 + m(m+1) = m(2m+1)$ и, следовательно, что *группа* $\mathrm{Sp}(m)$ *является гладким многообразием размерности* $m(2m+1)$.

Обратим внимание, что $\dim \mathrm{Sp}(m) = \dim \mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$. Тем не менее *многообразия* $\mathrm{Sp}(m)$ *и* $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$ *недиффеоморфны* (хотя бы потому, что одно из них компактно, а другое нет).

Как уже было замечено, условие симплектичности (и — более общо — условие J-ортогональности) имеет смысл и для комплексных матриц. Так возникает *группа* $\mathrm{O}_J(n; \mathbb{C})$ *комплексных J-ортогональных матриц порядка* n (и, в частности, *группа* $\mathrm{O}(n;\ \mathbb{C})$ *комплексных ортогональных матриц порядка* n и *группа* $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{C})$ *комплексных симплектических матриц порядка* $n=2m$). Эта группа удовлетворяет условиям определения 1 с тем лишь отличием, что соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ состоит из комплексных матриц и является линеалом над полем $\mathbb{C}$. Такие группы мы будем называть *комплексными матричными группами Ли*.

Поскольку любой линеал над полем $\mathbb{C}$ автоматически является линеалом и над полем $\mathbb{R}$ (вдвое большей размерности), любая комплексная матричная группа будет матричной группой Ли (в указанном выше обобщенном смысле) и, значит, будет гладким многообразием. В частности, мы видим, что *все группы вида* $\mathrm{O}_J(n;\ \mathbb{C})$ (и, в частности, группы $\mathrm{O}(n;\ \mathbb{C})$ и $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{C})$) *являются гладкими многообразиями*. При этом $\dim \mathrm{O}(n;\ \mathbb{C})=n(n-1)$, а $\dim \mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{C})=2m(2m+1)$.

Заметим, что, таким образом,

$$\mathrm{Sp}(m)=\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{C})\cap \mathrm{U}(2m)$$

(аналогичное пересечение $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{R})\cap U(2m)$ является не чем иным, как ортогональной симплектической группой $\mathrm{Sp}(m;\ \mathbb{R})\cap \mathrm{O}(2m)$).

Пример групп $\mathrm{O}_J(n;\ \mathbb{C})$ наводит на мысль рассмотреть в общем виде многообразия, обладающие картами $(U,\ h)$, для которых множество $h(U)$ является открытым множеством пространства $\mathbb{C}^n$ (такие карты называются *комплексными*).

Две комплексные карты $(U,\ h)$ и $(V,\ k)$ называются *комплексно согласованными*, если либо $U\cap V=\varnothing$, либо множества $h(U\cap V)$ и $k(U\cap V)$ открыты в $\mathbb{C}^n$ и отображение

$$k\circ h^{-1}\colon\ h(U\cap V)\to k(U\cap V)$$

является *комплексно аналитическим диффеоморфизмом*, т. е. и оно, и обратное к нему отображение $h\circ k^{-1}$ выражаются комплексно аналитическими (в другой терминологии — *голоморфными*) функциями (в окрестности любой точки $\boldsymbol{z}_0=(z_0^1,\ \ldots,\ z_0^n)\in h(U\cap V)\subset\mathbb{C}^n$, разлагающимися в ряд по степеням разностей $z^1-z_0^1,\ \ldots,\ z^n-z_0^n$).

Множество $\mathscr{X}$, снабженное атласом из комплексно согласованных комплексных карт, называется *комплексно аналитическим многообразием*. Число n называется его *комплексной размерностью* и обозначается символом $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{X}$.

«Комплексный» аналог предложения 1 утверждает, что *любая комплексная матричная группа Ли является комплексно аналитическим многообразием.* Доказательство дословно совпадает с доказательством предложения 1.

[Подчеркнем, что группа $\mathrm{U}(n)$ не является комплексной матричной группой Ли; ввести на $\mathrm{U}(n)$ структуру комплексно аналитического многообразия, вообще говоря, нельзя.]

Так как пространство $\mathbb{C}^n$ естественным образом отождествляется с пространством $\mathbb{R}^{2n}$ (достаточно каждую комплексную координату z^k, $k=1, \ldots, n$, заменить ее вещественной и мнимой частями), и так как для любой комплексно аналитической функции от $z^1, \ldots, z^n$ ее вещественная и мнимая части являются (докажите!) вещественно аналитическими функциями от

$$x^1 = \operatorname{Re} z^1, \ \ldots, \ x^n = \operatorname{Re} z^n, \quad y^1 = \operatorname{Im} z^1, \ \ldots, \ y^n = \operatorname{Im} z^n,$$

то каждое комплексно аналитическое многообразие $\mathscr{X}$ автоматически является гладким (вещественно аналитическим) многообразием удвоенной размерности.

Это многообразие называется *овеществлением* многообразия $\mathscr{X}$ и обозначается символом $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$.

Теперь нам надо на несколько минут вернуться к общей топологии.

Определение 2. *Путем* в топологическом пространстве $\mathscr{X}$ называется произвольное непрерывное отображение $u\colon I \to \mathscr{X}$ в $\mathscr{X}$ отрезка $I = [0, 1]$. Точка $u(0)$ называется *начальной точкой* пути u (короче, *началом*), а точка $u(1)$ — его *концевой точкой* (короче, *концом*). Говорят также, что путь *u соединяет* в $\mathscr{X}$ точку $p_0 = u(0)$ с точкой $p_1 = u(1)$.

Деформации базисов n-мерного линейного пространства $\mathscr{V}$ (см. определение 2 лекции I.6) являются не чем иным, как путями в многообразии Штифеля $V(n, \mathscr{V}) = \mathrm{GL}(n)$, а псевдоортонормированные деформации базисов псевдоевклидова пространства типа (p, q) (см. определение 2 лекции II.12) — не чем иным, как путями в группе $\mathrm{O}(p, q)$.

Легко видеть (ср. предложение 1 лекции I.6), что отношение «быть соединенным путем» является отношением эквивалентности на $\mathscr{X}$, т. е. оно рефлексивно (каждая точка $p_0 \in \mathscr{X}$ соединяется сама с собой *постоянным путем*

$u\colon I \to \mathscr{X}$, определенным формулой $u(t)=p_0$, $t \in I$), симметрично (если путь $u\colon I \to \mathscr{X}$ соединяет точку p_0 с точкой p_1, то *обратный путь* $u^{-1}\colon I \to \mathscr{X}$, определенный формулой $u^{-1}(t)=u(1-t)$, $t \in I$, будет соединять p_1 с p_0) и транзитивно (если путь $u\colon I \to \mathscr{X}$ соединяет точку p_0 с точкой p_1, а путь $v\colon I \to \mathscr{X}$ — точку p_1 с точкой p_2, то путь $w\colon I \to \mathscr{X}$, определенный формулой

$$w(t)=\begin{cases} u(2t), & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ v(2t-1), & \text{если } 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \tag{20}$$

— и называемый, кстати сказать, *произведением* uv путей u и v,— будет соединять точку p_0 с точкой p_2; докажите, что формула (20) определяет непрерывное отображение).

Определение 3. Классы по этому отношению эквивалентности называются *компонентами линейной связности* топологического пространства $\mathscr{X}$. Пространство $\mathscr{X}$, имеющее только одну компоненту линейной связности, т. е. такое, что любые две его точки можно соединить путем, называется *линейно связным*.

Ориентации линейного пространства в смысле определения 3 лекции I. 6 и ориентации псевдоевклидова пространства в смысле определения 2 лекции II. 12б являются не чем иным, как компонентами линейной связности групп $\mathrm{GL}(n)$ и $\mathrm{O}(p, q)$ соответственно. Таким образом, мы видим, что *группы* $\mathrm{GL}(n)$ *и* $\mathrm{O}(n)$ *имеют по две компоненты линейной связности, а группа* $\mathrm{O}(p, q)$ *при* $0<p<n$ — *четыре*. Компонентой группы $\mathrm{GL}(n)$, содержащей единицу этой группы (или, как кратко говорят, *компонентой единицы*), является группа $\mathrm{GL}^+(n)$, компонентой единицы группы $\mathrm{O}(n)$ — группа $\mathrm{SO}(n)$, а компонентой единицы группы $\mathrm{O}(p, q)$ при $0<p<n$ — группа $\mathrm{O}_+^\uparrow(p, q)$ (см. лекцию II. 12б).

Группа $\mathrm{U}(n)$ линейно связна (см. лекцию II.22).

Задача 5. Докажите, что группы $\mathrm{Sp}(m; \mathbb{R})$, $\mathrm{SU}(n)$ и $\mathrm{Sp}(m)$ линейно связны.

Существует другое понятие связности, иногда более удобное (и которым мы уже пользовались в лекции 1 в связи с понятием простой линии).

Напомним (см. лекцию 8), что подмножество A топологического пространства $\mathscr{X}$ называется *замкнутым*, если его дополнение $\mathscr{X} \setminus A$ открыто. Подмножество одновременно открытое и замкнутое называется *открыто-замкнутым*.

Ясно, что пустое множество $\varnothing$ и все пространство $\mathscr{X}$ открыто-замкнуты. Они называются *тривиальными открыто-замкнутыми подмножествами*. Примером нетривиального открыто-замкнутого подмножества является подгруппа $SO(n)$ группы $O(n)$.

Определение 4. Топологическое пространство называется *связным*, если в нем нет нетривиальных открыто-замкнутых подмножеств. Подмножество топологического пространства называется *связным*, если оно связно в индуцированной топологии.

Наглядно связность пространства означает, что оно состоит из одного-единственного куска.

Задача 6. Докажите, что длинная полупрямая Александрова (см. замечание 1 лекции 10) является связным топологическим пространством.

Определение 5. Связное подмножество A топологического пространства $\mathscr{X}$ называется его *компонентой* (или, более распространенно, *компонентой связности*), если оно максимально, т. е. если каждое связное подмножество, содержащее A, совпадает с A.

Из курса анализа известно, что любой *отрезок* $[a, b]$ *оси* $\mathbb{R}$ *является связным пространством*. [Приведем для полноты доказательство. Пусть отрезок $[a, b]$ несвязен, т. е. пусть существует непустое открыто-замкнутое множество $C \subset [a, b]$, отличное от всего $[a, b]$. Переходя, если нужно, к дополнению (которое также открыто-замкнуто), мы без ограничения общности можем считать, что $a \in C$. Пусть T — множество всех точек $t \in [a, b]$, для которых $[a, t) \in C$. Так как из $[a, t) \in C$ следует, что $[a, t] \subset C$ (ибо C замкнуто), то $T \subset C$. Так как C открыто в $[a, b]$ (и $a \in C$), то существует такое $\varepsilon > 0$, что $[a, a+\varepsilon) \subset C$, т. е. $a+\varepsilon \in T$. Следовательно, множество T не пусто и его верхняя грань $t_0 = \sup T$ строго больше a. Пусть $a < t < t_0$. По определению верхней грани существует такое число $t_1 \in T$, что $t < t_1$. Тогда $[a, t) \subset [a, t_1) \subset C$ и, значит, $t \in T$. Этим доказано, что $[a, t_0) \subset C$, т. е. что $t_0 \in T \subset C$. Но если $t_0 \in C$ и $t_0 < b$, то, поскольку C открыто в $[a, b]$, существует такое $\varepsilon > 0$, что $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \subset C$. Поэтому $[a, t_0 + \varepsilon) \subset C$ и, значит, $t_0 + \varepsilon \in T$. Поскольку это противоречит равенству $t_0 = \sup T$, неравенство $t_0 < b$ невозможно. Следовательно, $t_0 = b$ и, значит, вопреки условию, $C = [a, b]$. $\square$]

В частности, *отрезок I связен*.

Отсюда легко следует, что *любое линейно связное пространство $\mathscr{X}$ связно*. Действительно, если C — произвольное открыто-замкнутое множество в $\mathscr{X}$, то для каждого пути u: $I \to \mathscr{X}$ множество $u^{-1}C$ всех точек $t \in [0, 1]$, для которых $u(t) \in C$, открыто-замкнуто в I. Поэтому ввиду связности отрезка I либо $u^{-1}C = \varnothing$, либо $u^{-1}C = I$. Если $C \neq \varnothing$, то мы можем исключить первый случай, выбрав начало пути u в C, а если $C \neq \mathscr{X}$, то мы можем исключить и второй случай, выбрав конец пути u вне C. Таким образом, если в $\mathscr{X}$ существует непустое открыто-замкнутое множество C, отличное от $\mathscr{X}$, то никакую точку из C нельзя соединить путем ни с одной точкой вне C. Поэтому $\mathscr{X}$ не линейно связно. $\square$

Теперь ясно, что *каждая компонента линейной связности содержится в некоторой (очевидно, единственной) компоненте связности*.

Далее, легко видеть, что *замыкание $\bar{A}$ произвольного связного подмножества A связно*. Действительно, если непустое подмножество C открыто-замкнуто в $\bar{A}$, то его пересечение $C \cap A$ с A не пусто (почему?) и открыто-замкнуто в A. Поэтому $C \cap A = A$ и, значит, $A \subset C$. Так как C замкнуто не только в $\bar{A}$, но и в $\mathscr{X}$, то, следовательно, $\bar{A} \subset C$ и, значит, $\bar{A} = C$. $\square$

В частности, отсюда следует, что *любая компонента пространства $\mathscr{X}$ замкнута*.

Аналогично доказывается, что *если пересечение $\bigcap A_\alpha$ семейства $\{A_\alpha\}$ связных множеств не пусто, то их объединение $\bigcup A_\alpha$ связно*. Действительно, если C открыто-замкнуто в $\bigcup A_\alpha$ и $C \cap A_\alpha \neq \varnothing$, то $C \cap A_\alpha = A_\alpha$, и потому $A_\alpha \subset C$. Но если $A_{\alpha_0} \subset C$ хотя бы для одного индекса α_0, то $\bigcap A_\alpha \subset C$, и, значит, $C \cap A_\alpha \neq \varnothing$ для всех α. Поэтому либо $A_\alpha \subset C$ для всех α, либо $C \cap A_\alpha = \varnothing$ также для всех α. В первом случае $C = \bigcup A_\alpha$, а во втором $C = \varnothing$. $\square$

Отсюда вытекает, что *для любой точки $p \in \mathscr{X}$ компонента пространства $\mathscr{X}$, содержащая точку p, является объединением всех содержащих точку p связных подмножеств этого пространства* и что *компоненты пространства $\mathscr{X}$ попарно не пересекаются*. Поэтому, если *пространство $\mathscr{X}$ имеет конечное число компонент, то каждая компонента открыта в $\mathscr{X}$* (и, значит, является открыто-замкнутым множеством).

Резюмируя, мы, таким образом, получаем, что *произвольное топологическое пространство $\mathscr{X}$ является объединением попарно непересекающихся компонент, каждая из которых является замкнутым (а в случае, когда компонент конечное число и открытым) связным подмножеством пространства $\mathscr{X}$.*

Пространство $\mathscr{X}$ тогда и только тогда связно, когда оно имеет только одну компоненту.

Пространство $\mathscr{X}$ называется *вполне несвязным*, если каждая его компонента состоит только из одной точки. Ясно, что *хаусдорфово пространство $\mathscr{X}$, для которого* $\operatorname{ind}\mathscr{X}=0$ (*см. лекцию* 10), *вполне несвязно.*

С другой стороны, существуют примеры (довольно сложные) вполне несвязных хаусдорфовых пространств (даже метрических и удовлетворяющих второй аксиоме счетности) произвольной положительной размерности. Все эти пространства заведомо не компактны, поскольку можно доказать (попытайтесь сделать это!), что *вполне несвязное хаусдорфово компактное пространство $\mathscr{X}$ нульмерно* ($\operatorname{ind}\mathscr{X}=\dim\mathscr{X}=0$).

В отличие от компонент связности, компоненты линейной связности, вообще говоря, не открыты и не замкнуты. Однако если *пространство $\mathscr{X}$ локально линейно связно* (любая его точка обладает фундаментальной системой окрестностей, каждая из которых линейно связна), *то каждая компонента линейной связности C пространства $\mathscr{X}$ открыта и замкнута.* Действительно, если U — линейно связная окрестность произвольной точки $p\in\overline{C}$, то, поскольку пересечение $U\cap C$ не пусто, объединение $C\cup U$ линейно связно и, значит,— в силу максимальности компоненты C — совпадает с C. Таким образом, $U\subset C$ и, значит, $p\in\operatorname{Int}C$. Этим доказано, что $\overline{C}\subset\operatorname{Int}C$, и, значит, что $\overline{C}=\operatorname{Int}C=C$. Следовательно, компонента C открыто-замкнута. □

Отсюда непосредственно вытекает, что *компоненты линейной связности локально линейно связного пространства совпадают с его компонентами связности* (и, кроме того, что *в локально линейно связном пространстве все компоненты — независимо от их числа — открыто-замкнуты*).

В частности, локально линейно связное пространство тогда и только тогда связно, когда оно линейно связно.

Так как каждая точка любого топологического (и, в частности, любого гладкого) многообразия обладает фундаментальной системой окрестностей, гомеоморфных открытому шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$, и так как шар $\mathring{\mathbb{B}}^n$, очевидно, линейно связен, то *произвольное топологическое многообразие локально линейно связно.*

Поэтому для топологических многообразий компоненты совпадают с компонентами линейной связности и являются открыто-замкнутыми множествами. (В частности, *любая компонента многообразия сама является многообразием.*)

Мы видим, что линейно связные многообразия — это в точности связные многообразия. На этом основании термин «линейно связные» к многообразиям обычно не применяется и заменяется термином «связные».

Путь u: $I \to \mathscr{X}$ в гладком многообразии $\mathscr{X}$ называется *гладким*, если он является ограничением на I некоторого гладкого отображения u': $(-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathscr{X}$, где $\varepsilon > 0$. (Напомним, что интервал $(-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ является гладким многообразием.) Если отображение u' гладко всюду, за исключением конечного числа точек, путь u называется *кусочно гладким.*

Ясно, что если открытое множество $U \subset \mathscr{X}$ диффеоморфно связному открытому множеству в $\mathbb{R}^n$ (например, шару), то любые две его точки можно соединить в U гладким путем. Очевидным образом отсюда следует — ввиду компактности отрезка I,— что *любые две точки связного гладкого многообразия можно соединить кусочно гладким путем.*

Задача 7. Докажите, что любые две точки связного гладкого многообразия можно соединить даже гладким путем.

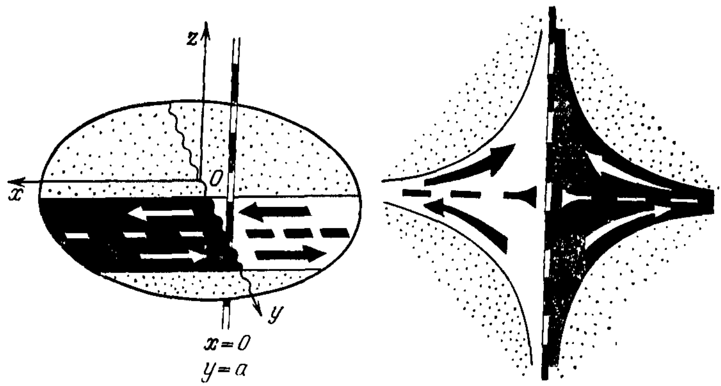
Все построенные в этой лекции примеры связных гладких многообразий удовлетворяют второй аксиоме счетности. Однако существуют связные гладкие многообразия и не удовлетворяющие этой аксиоме. Таким многообразием является, скажем, длинная полупрямая Александрова (см. выше задачу 7). Приведем более элементарный пример, не использующий порядковых чисел (этот пример принадлежит Калаби и Розенлихту).

Пусть $\mathscr{X}$ — подмножество пространства $\mathbb{R}^3$, состоящее из точек (x, y, z), для которых либо $x=0$, либо $z=0$ (объединение координатных плоскостей Oyz и Oxy), а U_a,

$a \in \mathbb{R}$,— его подмножество, состоящее из точек (x, y, z), для которых либо $x \neq 0$, либо $y = a$ (объединение плоскости Oxy с удаленной осью ординат $x = 0$ и прямой $x = 0$, $y = a$). Пусть, далее, $h_a\colon U_a \to \mathbb{R}^2$ — отображение множества U_a на плоскость $\mathbb{R}^2$ с координатами (u_a, v_a), задаваемое формулами

$$u_a = x, \quad v_a = \begin{cases} \dfrac{y-a}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ z, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Это отображение, очевидно, биективно (обратное отображение переводит точку $(u_a, v_a) \in \mathbb{R}^2$ в точку $(u_a, a + u_a v_a, v_a) \in U_a$) и, значит, пара (U_a, h_a) является картой на $\mathscr{X}$. Для



любых двух таких карт (U_a, h_a) и (U_b, h_b) множество $U_a \cap U_b$ является плоскостью Oxy с удаленной осью ординат $x = 0$, множества $h_a(U_a \cap U_b)$ и $h_b(U_a \cap U_b)$ представляют собой плоскость $\mathbb{R}^2$ с удаленной осью ординат $u = 0$, а отображение

$$h_b \circ h_a^{-1}\colon h_a(U_a \cap U_b) \to h_b(U_a \cap U_b)$$

задается формулами

$$u_b = u_a, \quad v_b = v_a + \frac{a-b}{u_a},$$

и, следовательно, вещественно аналитично. Это означает, что карты (U_a, h_a), $a \in \mathbb{R}$, вещественно аналитически согласованы и, значит, определяют на $\mathscr{X}$ структуру гладкого двумерного многообразия класса C^ω.

Задача 8. Покажите, что построенное гладкое многообразие хаусдорфово, связно и не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Конечно, этот пример легко обобщается на большие размерности. Кроме того, если заменить $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$, то та же конструкция даст нам пример двумерного связного комплексно аналитического многообразия, не удовлетворяющего второй аксиоме счетности.

Интересно, что при $n=1$ подобный пример невозможен, поскольку, как показал венгерский математик Радо, *каждая комплексная кривая* (хаусдорфово связное одномерное комплексно аналитическое многообразие) *удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Замечание 2. Сравнение определений немедленно показывает, что комплексные кривые суть не что иное, как известные из курса теории функций комплексного переменного абстрактные римановы поверхности.