Лекция 12

Векторы, касательные к гладкому многообразию.— Производные голоморфных функций.— Касательные векторы комплексно аналитических многообразий.— Дифференциал гладкого отображения.—Цепное правило.—Градиент гладкой функции.— Теорема об этальных отображениях.— Теорема о замене локальных координат.— Локально плоские отображения.

Введем понятие вектора, касательного к произвольному гладкому многообразию $\mathscr{X}$.

Чтобы понять, как это можно сделать, рассмотрим частный случай многообразия $\mathbb{R}^n$, когда мы уже знаем, что такое вектор.

В произвольных координатах $x^1, \ldots, x^n$ (быть может, даже криволинейных) вектор $\boldsymbol{a}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^n$ в каждой точке $p_0 \in \mathbb{R}^n$ задается n числами $(a^1, \ldots, a^n)$ (вектором линейного пространства $\mathbb{R}^n$). Как преобразуются эти числа при переходе к другим координатам $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$? (Из линейной алгебры мы знаем ответ только в случае, когда новые координаты линейно выражаются через старые; теперь же мы имеем в виду самое общее преобразование координат, задаваемое произвольными гладкими функциями $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$, $i' = 1, \ldots, n$.) Чтобы дать ответ на этот вопрос, рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ произвольную гладкую кривую

$$x^i = x^i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

проходящую при $t = t_0$ через точку p_0 и имеющую в этой точке касательный вектор $\boldsymbol{a}$, т. е. такую, что $a^i = \dot{x}^i(t_0)$ для любого $i = 1, \ldots, n$ (точкой мы обозначаем дифференцирование по t). В координатах $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ эта кривая будет задаваться функциями $x^{i'}(t) = x^{i'}(x^1(t), \ldots, x^n(t))$, $i' = 1', \ldots, n'$, а касательный вектор (т. е. тот же вектор $\boldsymbol{a}$) будет иметь компоненты $a^{i'} = \dot{x}^{i'}(t_0)$. Но по правилу дифференцирования сложной функции

$$\dot{x}^{i'}(t) = \frac{\partial x^{i'}(x^1(t), \ldots, x^n(t))}{\partial x^i} \dot{x}^i(t)$$

(как всегда по i происходит суммирование), и, значит,

$$(1) \qquad a^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0 a^i,$$

где $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0=\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_{p_0}$ — значения частных производных $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ в точке p_0 с координатами $x^1(t_0), \ldots, x^n(t_0)$.

Пусть теперь $\mathscr{X}$ — произвольное гладкое (класса C^r, $r \geqslant 1$) многообразие размерности n. Для любой точки $p_0 \in \mathscr{X}$ символом $\mathbf{A}(p_0)$ будем обозначать множество всех карт (U, h) этого многообразия, для которых $p_0 \in U$ (о таких картах говорят, что они *центрированы в* p_0). Только что произведенное вычисление мотивирует следующее определение:

Определение 1. *Касательным вектором к многообразию* $\mathscr{X}$ (или просто *вектором многообразия* $\mathscr{X}$) в точке $p_0 \in \mathscr{X}$ называется такое отображение

(2) $$A\colon \mathbf{A}(p_0) \to \mathbb{R}^n,$$

что для произвольных карт $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(U', h')=(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ из $\mathbf{A}(p_0)$ векторы $A(U, h)=(a^1, \ldots, a^n)$ и $A(U', h')=(a^{1'}, \ldots, a^{n'})$ линеала $\mathbb{R}^n$ связаны формулой (1), т. е. формулой

(3) $$A(U', h')=\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0 A(U, h),$$

где $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$ — линейный оператор $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ с матрицей $\left\|\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0\right\|$.

Компоненты $a^1, \ldots, a^n$ вектора $A(U, h) \in \mathbb{R}^n$ называются *координатами вектора* A *в карте* (U, h) (или *в локальных координатах* $x^1, \ldots, x^n$). Для упрощения формул равенство $A(U, h)=(a^1, \ldots, a^n)$ обычно записывают следующим образом:

$$A=(a^1, \ldots, a^n) \text{ в } (U, h).$$

В случае, когда карта (U, h) фиксирована, указание «в (U, h)» как правило, опускается.

Множество всех векторов многообразия $\mathscr{X}$ в точке p_0 обозначается символом $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ и называется *касательным пространством* многообразия $\mathscr{X}$ в точке p_0. Оно является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ относительно линейных операций, определенных формулами

$$(A+B)(U, h)=A(U, h)+B(U, h),$$
$$(\lambda A)(U, h)=\lambda A(U, h),$$

где A, $B \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, а $(U, h) \in \mathbf{A}(p)$. [Включения $A+B \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ и $\lambda A \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ обеспечиваются линейностью операторов $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$.]

Таким образом, по определению, если $A = (a^1, \ldots, a^n)$ и $B = (b^1, \ldots, b^n)$ в (U, h), то $A + B = (a^1 + b^1, \ldots, a^n + b^n)$ и $\lambda A = (\lambda a^1, \ldots, \lambda a^n)$ в (U, h). Поэтому для любой карты (U, h) соответствие

$$A \longmapsto A(U, h)$$

определяет линейное отображение

$$\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X} \longrightarrow \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Легко видеть, что *отображение* (4) *является изоморфизмом.* Действительно, если $A(U, h) = 0$, то ввиду формулы (3) $A(U', h') = 0$ и для каждой карты $(U', h') \in \mathbf{A}(p_0)$, т. е. $A = 0$. Это означает, что отображение (4) мономорфно, С другой стороны, положив для любого вектора $\boldsymbol{a} = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ и любой карты $(U', h') \in \mathbf{A}(p_0)$

$$A(U', h') = \left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0 \boldsymbol{a},$$

мы получим отображение A: $\mathbf{A}(p_0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, обладающее тем свойством, что $A(U, h) = \boldsymbol{a}$. Поэтому для доказательства того, что отображение (4) является эпиморфизмом (и, значит, изоморфизмом), достаточно показать, что $A \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, т. е. что

$$A(U'', h'') = \left(\frac{\partial h''}{\partial h'}\right)_0 A(U', h')$$

для любых двух карт (U', h'), $(U'', h'') \in \mathbf{A}(p_0)$. Но по определению

$$A(U'', h'') = \left(\frac{\partial h''}{\partial h}\right)_0 \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad A(U', h') = \left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0 \boldsymbol{a},$$

а по цепному правилу дифференцирования сложной функции

$$\left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^i}\right)_0 = \left(\frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{i'}}\right)_0 \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_0,$$

т. е. $\left(\frac{\partial h''}{\partial h}\right)_0 = \left(\frac{\partial h''}{\partial h'}\right)_0 \left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$. Следовательно,

$$A(U'', h'') = \left(\frac{\partial h''}{\partial h}\right)_0 \boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial h''}{\partial h'}\right)_0 A(U', h'). \ \square$$

Таким образом, $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ *является линейным пространством размерности* n:

$$\dim \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X} = \dim \mathscr{X}.$$

Векторы, переходящие при изоморфизме (4) в стандартный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства $\mathbb{R}^n$, обозначаются символами

$$(5) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{p_0}, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{p_0}.$$

Они составляют базис пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, причем координаты вектора $A \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ относительно этого базиса — это в точности его координаты в карте (U, h): если $A = (a^1, \ldots, a^n)$ в (U, h), то

$$(6) \qquad A = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}$$

и наоборот.

В случае, когда $\mathscr{X}$ является пространством $\mathbb{R}^n$, среди всех изоморфизмов (4) есть один избранный, отвечающий карте $(\mathbb{R}^n, \mathrm{id})$, и мы можем посредством этого изоморфизма отождествить пространство $\mathbf{T}_{p_0}\mathbb{R}^n$ с пространством $\mathbb{R}^n$. Таким образом,

$$(7) \qquad \mathbf{T}_{p_0}\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$$

для любой точки $p_0 \in \mathbb{R}^n$, что полностью согласуется с тем, с чего мы начали.

Поскольку для каждой точки p_0 любого открытого подмногообразия U произвольного многообразия $\mathscr{X}$ пространство $\mathbf{T}_{p_0}U$ естественным образом отождествляется с $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$:

$$\mathbf{T}_{p_0}U = \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X},$$

мы получаем, в частности, что

$$(8) \qquad \mathbf{T}_{p_0}U = \mathbb{R}^n$$

для любой точки $p_0 \in U$ произвольного открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$.

Этими отождествлениями мы будем постоянно пользоваться, не всегда явно их указывая.

Более общим образом, если $\mathscr{X}$ является линейным пространством $\mathscr{V}$ (или открытым множеством в $\mathscr{V}$), то среди изоморфизмов (4) выделяются изоморфизмы, отвечающие картам вида $(\mathscr{V}, h)$, где h — координатный изоморфизм

$\mathcal{V} \to \mathbb{R}^n$, отвечающий некоторому базису $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathcal{V}$. Поскольку для двух таких изоморфизмов h и h' линейный оператор $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$, $p_0 \in \mathcal{V}$, совпадает, очевидно, с оператором $h' \circ h^{-1}$ (и, в частности, не зависит от p_0), композиция $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X} \to \mathcal{V}$ изоморфизма (4), отвечающего карте $(\mathcal{V}, h)$, и изоморфизма $h^{-1}: \mathbb{R}^n \to \mathcal{V}$ — одна и та же для всех h. Таким образом, $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{V}$ *естественным образом отождествляется с* $\mathcal{V}$:

$$\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{V} = \mathcal{V} \text{ для любого } p_0 \in \mathcal{V}.$$

Заметим, что в этом отождествлении базису (5) отвечает базис $e_1, \ldots, e_n$.

Если же $\mathcal{X}$ является аффинным пространством $\mathcal{A}$, то для любой точки $p_0 \in \mathcal{A}$ касательное пространство $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{A}$ аналогичным образом отождествляется с ассоциированным линеалом $\mathcal{V}$ (и, значит, снова одно и то же для всех p_0). Впрочем, здесь удобно насильственно ввести зависимость от p_0 и отождествлять $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{A}$ с пространством $\mathcal{A}$, в котором в качестве начала отсчета выбрана точка p_0, т. е., иными словами, считать все векторы из $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{A}$ отложенными от точки p_0.

В случае, когда $\mathcal{X}$ является элементарной поверхностью в аффинном пространстве $\mathcal{A}$, касательное пространство $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ естественным образом отождествляется с введенным в лекции 3 касательным пространством (являющимся подпространством ассоциированного линеала $\mathcal{V}$). Именно, если u, v — локальные координаты на $\mathcal{X}$, отвечающие некоторой параметризации $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$ поверхности $\mathcal{X}$, то соответствующие базисные векторы $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{p_0}$, $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{p_0}$ пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ отождествляются с векторами $\boldsymbol{r}_{u_0}$, $\boldsymbol{r}_{v_0}$ пространства $\mathcal{V}$. Поскольку при замене координат векторы $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_{p_0}$, $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_{p_0}$ преобразуются по тем же формулам, что и векторы $\boldsymbol{r}_{u_0}$, $\boldsymbol{r}_{v_0}$, это отождествление пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathcal{X}$ с подпространством пространства $\mathcal{V}$ не зависит от выбора параметризации $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(u, v)$.

Понятие касательного пространства немедленно переносится на случай комплексно аналитических многообразий (см. лекцию 11). Чтобы элегантно осуществить этот перенос, нужны некоторые обозначения из комплексного анализа, которые мы в первую очередь и напомним.

Для произвольной комплексной функции $w(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ комплексной переменной $z=x+iy$ мы положим

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-i\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \tag{9}$$

и

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

[Основанием для этих обозначений является формула

$$dw=\frac{\partial w}{\partial z}dz+\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}d\bar{z},$$

где $dz=dx+i\,dy$ и $d\bar{z}=dx-i\,dy$.]

Уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

характеризующие голоморфные функции, записываются теперь в виде одного равенства

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=0.$$

[Таким образом, голоморфные функции можно интерпретировать как функции, «не зависящие от $\bar{z}$»! На этом основании произвольные функции от z записываются иногда в виде $w=w(z, \bar{z})$, а запись $w=w(z)$ употребляется лишь для голоморфных функций.]

Заметим, что если функция $w=w(z)$ голоморфна, то в силу соотношений Коши — Римана

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},$$

т. е. *для голоморфной функции $w=w(z)$ производная $\frac{\partial w}{\partial z}$ по z совпадает с обычной производной $\frac{\partial w}{\partial x}$ по x*. Аналогично,

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Отсюда для любых голоморфных функций $w=w(z)$ и $\zeta=\zeta(w)$ следует, что стандартная формула

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}=\frac{\partial \zeta}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \zeta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

для производной сложной функции $\zeta=\zeta(w(z))$ может быть переписана в следующем виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z}=\frac{\partial \zeta}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Это означает, что *для производных* (9) *голоморфных функций справедливо обычное цепное правило.*

Для комплексных функций $w(z)=w(z^1, \ldots, z^n)$ от n комплексных переменных аналогичным образом определяются частные производные $\frac{\partial w}{\partial z^j}$ и $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}^j}$, $1 \leqslant j \leqslant n$, и функция w тогда и только тогда голоморфна, когда

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}^1}=0, \ldots, \frac{\partial w}{\partial \bar{z}^n}=0.$$

Каждое отображение w: $U \to \mathbb{C}^m$, где $U \subset \mathbb{C}^n$, задается m комплексными функциями

(10) $\quad w^1=w^1(z), \ldots, w^m=w^m(z), \quad z=(z^1, \ldots, z^n) \in U,$

n комплексных переменных $z^1, \ldots, z^n$, определенными на U. Отождествив $\mathbb{C}^n$ с $\mathbb{R}^{2n}=\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ посредством соответствия

$$z=(z^1, \ldots, z^n) \Leftrightarrow (x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n)=(x, y)$$

и $\mathbb{C}^m$ с $\mathbb{R}^{2m}=\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^m$ посредством соответствия

$$w=(w^1, \ldots, w^m) \Leftrightarrow (u^1, \ldots, u^m, v^1, \ldots, v^m)=(u, v),$$

где

$$\begin{aligned} x^1&=\operatorname{Re} z^1, \ldots, x^n=\operatorname{Re} z^n, \qquad u^1=\operatorname{Re} w^1, \ldots, u^m=\operatorname{Re} w^m,\\ y^1&=\operatorname{Im} z^1, \ldots, y^n=\operatorname{Im} z^n, \qquad v^1=\operatorname{Im} w^1, \ldots, v^m=\operatorname{Im} w^m, \end{aligned}$$

мы можем рассматривать w как отображение из $U \subset \mathbb{R}^{2n}$ в $\mathbb{R}^{2m}$, задаваемое $2m$ вещественными функциями

$$u^j=u^j(x, y), \quad v^j=v^j(x, y), \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Если это отображение гладко, то его *якобиева матрица* (матрица частных производных) имеет поэтому вид

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{Vmatrix},$$

где

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\left\| \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \right\|, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\left\| \frac{\partial u^j}{\partial y^k} \right\|, \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\left\| \frac{\partial v^j}{\partial x^k} \right\|, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=\left\| \frac{\partial v^j}{\partial y^k} \right\|.$$

Поэтому

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} \frac{E_n}{2} & \frac{E_n}{2} \\ \frac{E_n}{2} & -\frac{E_n}{2} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial w}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} E_m & iE_m \\ E_m & -iE_m \end{Vmatrix},$$

где E_n и E_m — единичные матрицы порядка n и m соответственно, а

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}=\left\|\frac{\partial w^j}{\partial z^k}\right\|, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{z}}}=\left\|\frac{\partial w^j}{\partial \bar{z}^k}\right\|,$$

В случае, когда *отображение w голоморфно* $\left(\text{т. е. голоморфны функции (10), и, значит, } \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{z}}}=0\right)$, отсюда следует, что

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\frac{E_n}{2} & \frac{E_n}{2}\\ \frac{E_n}{2i} & -\frac{E_n}{2i}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} & 0\\ 0 & \overline{\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}}\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}E_m & iE_m\\ E_m & -iE_m\end{matrix}\right\|. \tag{11}$$

При $n=m$ отсюда, в частности, вытекает, что *якобиан D_w голоморфного отображения w: $U \to \mathbb{C}^n$ выражается формулой*

$$D_w=\left|\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}\right|^2,$$

и, следовательно, положителен.

Кроме того, поскольку

$$\left\|\begin{matrix}E & iE\\ E & -iE\end{matrix}\right\|\cdot\left\|\begin{matrix}\frac{E}{2} & \frac{E}{2}\\ \frac{E}{2i} & -\frac{E}{2i}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}E & 0\\ 0 & E\end{matrix}\right\|,$$

отсюда также вытекает (для любых n и m), что при композиции отображений их матрицы

$$\left\|\begin{matrix}\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}} & \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{z}}}\\ \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial \bar{\mathbf{z}}} & \frac{\partial \bar{\mathbf{w}}}{\partial \mathbf{z}}\end{matrix}\right\|$$

перемножаются (ибо это верно для якобиевых матриц).

Для голоморфных отображений отсюда следует, что *при композиции голоморфных отображений их матрицы $\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{z}}$ перемножаются*: если $w^k=w^k(\mathbf{z})$ и $\zeta^l=\zeta^l(\mathbf{w})$, то

$$\frac{\partial \zeta^l}{\partial z^j}=\frac{\partial \zeta^l}{\partial w^k}\cdot\frac{\partial w^k}{\partial z^j}$$

(ц е п н о е п р а в и л о д л я г о л о м о р ф н ы х о т о б р а ж е н и й).

Мы видим, таким образом, что *для голоморфных функций производные* (9) *подчиняются тем же формальным правилам, что и обычные частные производные гладких вещественных функций.*

Пусть теперь $\mathscr{X}$ — комплексно аналитическое многообразие, и пусть $p_0 \in \mathscr{X}$. Пусть, далее, $\mathbf{A}(p_0)$ — множество всех комплексных карт (U, h) многообразия $\mathscr{X}$, для которых $p_0 \in U$. По определению для любых карт $(U, h) = (U, z^1, \ldots, z^n)$, $(U', h') = (U', z^{1'}, \ldots, z^{n'})$ из $\mathbf{A}(p_0)$ отображение $h' \circ h^{-1}$ задается голоморфными функциями

$$(12) \quad z^{1'} = z^{1'}(\boldsymbol{z}), \ \ldots, \ z^{n'} = z^{n'}(\boldsymbol{z}), \text{ где } \boldsymbol{z} = (z^1, \ldots, z^n).$$

Пусть $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$ — линейный оператор $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с матрицей

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)_0 = \left\| \left(\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^j}\right)_0 \right\|, \quad j, j' = 1, \ldots, n,$$

где $\left(\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^j}\right)_0$ — значения производных $\frac{\partial z^{j'}}{\partial z^j}$ функций (12) в точке p_0. По аналогии с определением 1 мы будем называть *касательным вектором* к многообразию $\mathscr{X}$ в точке p_0 такое отображение

$$(13) \qquad C: \mathbf{A}(p_0) \to \mathbb{C}^n,$$

что для любых карт (U, h) и (U', h') из $\mathbf{A}(p_0)$

$$(14) \qquad C(U', h') = \left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0 C(U, h).$$

Все такие векторы составляют линейное пространство $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ над полем $\mathbb{C}$ размерности $n = \dim_{\mathbb{C}} \mathscr{X}$, причем для любой карты (U, h) из $\mathbf{A}(p_0)$ отображение

$$(15) \qquad \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X} \to \mathbb{C}^n, \quad C \mapsto C(U, h),$$

является изоморфизмом. Векторы, переходящие при изоморфизме (15) в стандартный базис пространства $\mathbb{C}^n$, обозначаются символами

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_{p_0}, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial z^n}\right)_{p_0}.$$

Они составляют базис пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, обладающий тем свойством, что равенство $C(U, h) = (c^1, \ldots, c^n)$ равносильно равенству $C = c^j \left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_{p_0}$.

Интересно сравнить комплексное n-мерное пространство $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ с вещественным $2n$-мерным пространством $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$, где $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ — овеществление многообразия $\mathscr{X}$ (см. лекцию 11).

Для любой комплексной карты (U, h) отображение h, рассматриваемое как отображение в $\mathbb{R}^{2n}$, мы обозначим через $h_{\mathbb{R}}$, а множество всех карт вида $(U, h_{\mathbb{R}})$, где

$(U, h) \in \mathbf{A}(p_0)$, — через $\mathbf{A}(p_0)_{\mathbb{R}}$. По определению множество $\mathbf{A}(p_0)_{\mathbb{R}}$ содержится в множестве $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}(p_0)$ всех карт многообразия $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ в точке p_0, причем, хотя $\mathbf{A}(p_0)_{\mathbb{R}} \neq \mathbf{A}_{\mathbb{R}}(p_0)$, но операция ограничения отображений $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}(p_0) \to \mathbb{R}^{2n}$ на $\mathbf{A}(p_0)_{\mathbb{R}}$ позволяет, очевидно, отождествить каждый касательный вектор $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}(p_0) \to \mathbb{R}^{2n}$ многообразия $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ в точке p_0 с отображениями

$$A\colon \mathbf{A}(p_0)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{2n}, \tag{16}$$

удовлетворяющими для любых карт (U, h) и (U', h') из $\mathbf{A}(p_0)$ соотношению

$$A(U', h'_{\mathbb{R}}) = \left(\frac{\partial h'_{\mathbb{R}}}{\partial h_{\mathbb{R}}}\right)_0 A(U, h_{\mathbb{R}}). \tag{17}$$

С другой стороны, каждый касательный вектор (13) многообразия $\mathscr{X}$ в точке p_0 мы в силу отождествления $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ можем рассматривать как отображение $C_{\mathbb{R}}$: $\mathbf{A}(p_0)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^{2n}$. При этом для любых карт (U, h) и (U', h') из $\mathbf{A}(p_0)$ будет иметь место равенство

$$C_{\mathbb{R}}(U', h'_{\mathbb{R}}) = \left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0^{\mathbb{R}} C_{\mathbb{R}}(U, h), \tag{18}$$

где $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0^{\mathbb{R}}$ — оператор $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$, рассматриваемый как оператор $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$.

Но ясно, что если некоторый линейный оператор $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ задается (в стандартном базисе) матрицей $C = A + iB$, то тот же оператор, но рассматриваемый как оператор $\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$, будет задаваться матрицей

$$\begin{Vmatrix} A & -B \\ B & A \end{Vmatrix}.$$

Поскольку матрицей оператора $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0$ служит матрица

$$\left(\frac{\partial z'}{\partial z}\right)_0 = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_0 + i\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_0,$$

отсюда следует, что оператор $\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0^{\mathbb{R}}$ задается матрицей

$$\begin{Vmatrix} \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_0 & -\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)_0 \end{Vmatrix},$$

совпадающей в силу соотношений Коши—Римана с матрицей

$$\begin{Vmatrix} \left(\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial x'}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial y'}{\partial x}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial y'}{\partial y}\right)_0 \end{Vmatrix}$$

оператора $\left(\dfrac{\partial h'_{\mathbb{R}}}{\partial h_{\mathbb{R}}}\right)_0$. Это показывает, что

$$\left(\frac{\partial h'}{\partial h}\right)_0^{\mathbb{R}} = \left(\frac{\partial h'_{\mathbb{R}}}{\partial h_{\mathbb{R}}}\right)_0,$$

и, значит, формула (18) совпадает с формулой (17) (при $A = C_{\mathbb{R}}$). Следовательно, $C_{\mathbb{R}}$ является касательным вектором многообразия $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ в точке p_0.

Построенное отображение

$$\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X} \to \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}_{\mathbb{R}}, \quad C \mapsto C_{\mathbb{R}},$$

очевидно, биективно и сохраняет суммы и произведения на вещественные числа. Иными словами, оно является изоморфизмом пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, рассматриваемого в силу вложения $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, на пространство $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$. В обозначениях, введенных в лекции II.25, это означает, что *имеет место естественное отождествление*

$$(\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X})_{\mathbb{R}} = \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}_{\mathbb{R}}. \tag{19}$$

В этом смысле многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$ имеют одни и те же касательные векторы.

Согласно сказанному в лекции II.25 базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_{p_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z^n}\right)_{p_0}$$

пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$, отвечающий карте (U, h) из $\mathbf{A}(p_0)$, порождает базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_{p_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z^n}\right)_{p_0}, \; J\left(\frac{\partial}{\partial z^1}\right)_{p_0}, \ldots, J\left(\frac{\partial}{\partial z^n}\right)_{p_0} \tag{20}$$

пространства $(\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X})_{\mathbb{R}}$, где J — оператор комплексной структуры (умножения на i). Легко видеть, что *в силу отождествления* (19) *базис* (20) *совпадает с базисом*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{p_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{p_0}, \left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_{p_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_{p_0}$$

пространства $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}_{\mathbb{R}}$, *отвечающим карте* $(U, h_{\mathbb{R}})$.

В дальнейшем комплексно аналитические многообразия мы рассматривать больше не будем. Перенесение — когда оно возможно — результатов, доказанных для гладких многообразий, на случай комплексно аналитических многообразий мы тем самым полностью оставим инициативе читателя.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два гладких многообразия (размерностей соответственно n и m), и пусть $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — произвольное гладкое отображение.

Пусть, далее, p — произвольная точка многообразия $\mathscr{X}$, $q = f(p)$ — ее образ в многообразии $\mathscr{Y}$, а

$$(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n) \quad \text{и} \quad (V, k) = (V, y^1, \ldots, y^m)$$

— такие карты многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно, что $p \in U$ и $fU \subset V$.

Тогда, как мы уже знаем (см. лекцию 7), отображение f записывается в картах (U, h) и (V, k) формулами вида

$$y^j = f^j(x^1, \ldots, x^n), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

где f^j — некоторые гладкие функции.

Матрица

$$\left\| \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)_p \right\|, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m, \tag{21}$$

размера $n \times m$, элементами которой являются значения $\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)_p$ частных производных функций f^j по x^i в точке p (т. е., точнее, в точке $h(p) \in \mathbb{R}^n$), называется *якобиевой матрицей* отображения f в картах (U, h) и (V, k).

Эта матрица задает линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, переводящее вектор $(a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{R}^n$ в вектор $(b^1, \ldots, b^m) \in \mathbb{R}^m$, где

$$b^j = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i} \right)_p a^i, \qquad j = 1, \ldots, m. \tag{22}$$

Координатные изоморфизмы $A \mapsto A(U, h)$ и $A \mapsto A(V, k)$ позволяют это отображение интерпретировать как линейное отображение $\mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_q\mathscr{Y}$ касательных пространств.

Определение 2. Построенное отображение $\mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_q\mathscr{Y}$ называется *дифференциалом гладкого отображения* f в точке p. Мы будем обозначать его символом $(df)_p$ или просто df_p.

Для элементарных поверхностей эта конструкция нам уже известна из лекции 3.

Таким образом, если $A=(a^1, \ldots, a^n)$ в карте (U, h), то $df_p(A)=(b^1, \ldots, b^m)$ в карте (V, k), где b^j, $j=1, \ldots, m$, — числа (22). На языке линейной алгебры это означает, что *отображение* df_p *является не чем иным, как линейным отображением* $\mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_q\mathscr{Y}$, *имеющим в базисах* $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$ *и* $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_q$ *матрицу* (21).

Конечно, необходимо проверить **корректность** этого определения, т. е. независимость отображения df_p от выбора карт (U, h) и (V, k).

Пусть $(U', h')=(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ и $(V', k')=$ $=(V', y^{1'}, \ldots, y^{n'})$ — другие карты многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, обладающие тем свойством, что $p\in U'$ и $q\in V'$, и пусть $d'f_p$ — отображение df_p, построенное с помощью этих карт. Тогда, если $A=(a^{1'}, \ldots, a^{n'})$ в (U', h'), то $d'f_p(A)=$ $=(b^{1'}, \ldots, b^{m'})$, где $b^{j'}=\left(\frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}\right)_p a^{i'}$ и $\left(\frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}\right)_p$ — значения в точке p частных производных по $x^{i'}$ функций $f^{j'}$, выражающих в картах (U', h') и (V', k') отображение f.

Пусть, далее,

$$x^i=x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) \quad \text{и} \quad y^{j'}=y^{j'}(y^1, \ldots, y^m)$$

— выражения локальных координат x^i и $y^{j'}$ через локальные координаты $x^{i'}$ и y^j.

Для упрощения формул мы положим

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n) \text{ (и аналогично } \boldsymbol{x}'=(x^{1'}, \ldots, x^{n'})),$$
$$\boldsymbol{y}=(y^1, \ldots, y^m) \text{ (и аналогично } \boldsymbol{y}'=(y^{1'}, \ldots, y^{m'})).$$

Соответственно этому вместо $x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ мы будем писать $x^i(\boldsymbol{x}')$, а вместо $(x^1(\boldsymbol{x}), \ldots, x^n(\boldsymbol{x}))$ будем писать $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}')$. Аналогичный смысл будут иметь обозначения $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}')$.

В этих обозначениях связь между функциями f^j и $f^{j'}$ будет выражаться формулой

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}'))),$$

откуда по правилу дифференцирования сложной функции следует, что

$$\left(\frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}\right)_p=\left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}\right)_q\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_p.$$

Поскольку

$$a^i=\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_p a^{i'} \quad \text{и} \quad b^j=\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p a^i,$$

отсюда вытекает, что

$$b^{j'}=\left(\frac{\partial f^{j'}}{\partial x^{i'}}\right)_p a^{i'}=\left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}\right)_q\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)_p a^{i'}=$$

$$=\left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}\right)_q\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p a^i=\left(\frac{\partial y^{j'}}{\partial y^j}\right)_q b^j,$$

т. е. числа $b^{j'}$ и b^j являются координатами (в картах (V', k') и (V, k)) одного и того же касательного вектора. Следовательно, $d'f_p(A)=df_p(A)$ для любого вектора $A\in\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ и значит, $d'f_p=df_p$. □

Ср. соответствующие рассуждения в лекции 3.

Заметим, что отображение df_p зависит только от локального поведения отображения f в окрестности точки p, т. е. *если для отображений $f, g\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ существует такая окрестность U точки p, что $f=g$ на U, то $df_p=dg_p$.*

В случае, когда $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ являются открытыми подмногообразиями пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ (и потому пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ и $\mathbf{T}_q\mathscr{Y}$ естественным образом отождествляются с этими пространствами), отображение $df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_q\mathscr{Y}$ совпадает, очевидно, с главной линейной частью $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ отображения f (т. е. является его дифференциалом в смысле элементарного анализа).

Пусть $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ и $g\colon \mathscr{Y}\to\mathscr{Z}$ — гладкие отображения. Если $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$, $(V, k)=(V, y^1, \ldots, y^m)$ и $(W, l)=(W, z^1, \ldots, z^s)$ — такие карты многообразий $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{Z}$, что $fU\subset V$ и $gV=W$, и если $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ и $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$ — функции, задающие в этих картах отображения f и g (мы пользуемся введенными выше сокращенными обозначениями), то гладкое отображение $g\circ f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Z}$ будет, очевидно, задаваться в картах (U, h) и (W, l) функцией $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}))$ Поэтому в силу формулы дифференцирования сложной функции для любой точки $p\in U$ будут иметь место равенства

$$\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\right)_p=\left(\frac{\partial z^k}{\partial y^j}\right)_q\left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i}\right)_p, \quad q=f(p),$$

означающие, что линейное отображение $d(g\circ f)_p$ является композицией линейных отображений df_p и dg_q:

$$d(g\circ f)_p=dg_q\circ df_p. \tag{23}$$

Эта формула называется **цепным правилом**.

Особенный интерес имеют два случая, когда $\mathcal{Y}=\mathbb{R}$ или $m=n$.

В случае, когда $\mathcal{Y}$ является осью $\mathbb{R}$ (и, значит, отображение f — гладкой функцией на $\mathcal{X}$), дифференциал df_p обычно называется *градиентом* функции f.

В силу отождествления (7) градиент является линейным отображением $\mathbf{T}_p\mathcal{X}\to\mathbb{R}$, т. е. ковектором пространства $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$ (вектором сопряженного пространства $\mathbf{T}_p^*\mathcal{X}$, которое, кстати сказать, обычно называется *кокасательным пространством* многообразия $\mathcal{X}$ в точке p). По определению ковектор df_p на любом векторе $A\in\mathbf{T}_p\mathcal{X}$ принимает значение

$$df_p(A)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p a^i. \tag{24}$$

Это значение называется *производной функции f по вектору A* и обозначается символом Af. Таким образом,

$$Af=df_p(A)$$

и

$$Af=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)a^i, \quad \text{если} \quad A=(a^1, \ldots, a^n) \ \text{в} \ (U, x^1, \ldots, x^n).$$

В частности, $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p$ для любого $i=1, \ldots, n$, что и объясняет выбор обозначений для векторов базиса (5).

Формула (24) означает, что в базисе пространства $\mathbf{T}_p^*\mathcal{X}$, сопряженном к базису (5) пространства $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$, ковектор df_p имеет координаты $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p$. Поэтому, во-первых, этот базис состоит из ковекторов

$$dx_p^1, \ldots, dx_p^n$$

(ясно, что ковектор df_p определен и для функций f, заданных лишь в некоторой окрестности точки p) и, во-вторых,

$$df_p=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)_p dx^1{}_p+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)_p dx_p^n=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p dx_p^i.$$

Замечание 1. Обратим внимание на то, что *градиент является ковектором*. Известное из курса анализа представление о градиенте гладкой функции на $\mathbb{R}^n$ как о векторе (см. ниже лекцию 24), основано на неявно подразумеваемом отождествлении векторов и ковекторов посредством стандартной евклидовой структуры на $\mathbb{R}^n$.

Пусть теперь $n=m$.

Определение 3. Гладкое отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ многообразий одной и той же размерности называется *этальным в точке* $p\in\mathscr{X}$ (или *локальным диффеоморфизмом*), если на некоторой окрестности U этой точки оно является диффеоморфизмом этой окрестности на окрестность $V=fU$ точки $q=f(p)$.

Конечно, любой диффеоморфизм $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ будет этальным отображением (в каждой точке $p\in\mathscr{X}$). Обратно, согласно теореме анализа о дифференцируемости обратной функции, *каждое этальное биективное отображение* $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *является диффеоморфизмом*, причем, как показывают простые примеры (см. замечание 1 в лекции 6), условие биективности здесь, вообще говоря, необходимо (т. е. из этальности оно не вытекает).

Из формулы (12) (примененной к диффеоморфизму $f|_U\colon U\to V$ и к обратному диффеоморфизму $g\colon V\to U$) немедленно следует (поскольку дифференциалом тождественного отображения служит, очевидно, тождественное отображение), что *дифференциал* $df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_q\mathscr{Y}$ *произвольного этального в точке* p *отображения* $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *является изоморфизмом* (обратимым линейным отображением). Оказывается, что и обратно, *если дифференциал* $df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbf{T}_q\mathscr{Y}$ *гладкого отображения* $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *в точке* $p\in\mathscr{X}$ *является изоморфизмом, то отображение* f *этально в точке* p. Действительно, утверждение, что отображение df_p является изоморфизмом, означает (при заданных картах (U, h) и (V, k) с $p\in U$ и $fU\subset V$), что определитель матрицы (9) отличен от нуля. Поскольку этот определитель является не чем иным, как якобианом $D\varphi$ гладкого отображения $\varphi=k\circ f\circ h^{-1}\colon h(U)\to f(V)$, отсюда следует — в силу теоремы об обратном отображении (см. лекцию 6), — что на некоторой окрестности W' точки $h(p)\in h(U)$ в $h(U)$ отображение φ является диффеоморфизмом. Поэтому отображение f будет диффеоморфизмом на окрестности $U'=h^{-1}W'$ точки p в $\mathscr{X}$, и значит, будет этально в p. $\square$

Тем самым нами доказано следующее предложение, известное как **теорема об этальных отображениях**:

Предложение 1. *Гладкое отображение* $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ *тогда и только тогда этально в точке* $p\in\mathscr{X}$, *когда его* *дифференциал*

$$df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_q\mathscr{Y}, \quad q = f(p),$$

является изоморфизмом. □

Если этальное в точке p отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ является диффеоморфизмом на носителе U карты (U, h), то пара $(V, k) = (fU, h\circ(f|_U)^{-1})$ будет, очевидно, картой в $\mathscr{Y}$. При этом отвечающее отображению f отображение φ: $h(U) \to k(V)$ будет тождественным отображением, т. е. в соответствующих локальных координатах $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$ отображение f будет задаваться формулами вида

$$y^i = x^i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{25}$$

Таким образом, *если отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ этально в точке $p \in \mathscr{X}$, то в многообразиях $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ существуют локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $y^1, \ldots, y^n$, обладающие тем свойством, что в них отображение f записывается формулами* (25) (т. е. является отображением по равенству координат).

Предложение 1 является, по существу, лишь иной переформулировкой теоремы об обратных отображениях. Интересно, что последняя теорема допускает и принципиально другое воплощение.

Пусть $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная карта гладкого многообразия $\mathscr{X}$ центрированная в точке $p_0 \in \mathscr{X}$ (т. е. такая, что $p_0 \in U$), и пусть

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \quad i' = 1', \ldots, n', \tag{26}$$

— гладкие функции, заданные в некоторой окрестности $U' \subset U$ точки p_0.

Напомним (см. лекцию 6), что символ $x^{i'}$ в формуле (26) имеет двоякое значение: слева он обозначает функцию на U', а справа — функцию на окрестности $h(U')$ точки $\boldsymbol{x}_0 = h(p_0)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. В соответствии с этим якобиан

$$\det\left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\|, \qquad \begin{matrix} i = 1, \ldots, n, \\ i' = 1', \ldots, n', \end{matrix} \tag{27}$$

функций (26) мы также можем рассматривать либо как функцию на U', либо как функцию на $h(U')$. В каком из этих двух смыслов он понимается, каждый раз должно быть ясно из контекста.

Если функции (26) являются локальными координатами в окрестности U', то в любой точке этой окрестности и, в частности, в точке p_0 якобиан (27) отличен от нуля. Обратное утверждение имеет место в следующей формулировке:

Предложение 2. *Если якобиан* (27) *отличен от нуля в точке* p_0, *то в некоторой окрестности* $U'' \subset U'$ *этой точки функции* (26) *являются локальными координатами.*

Доказательство. Функции (26), рассматриваемые как функции на открытом множестве $h(U')$ пространства $\mathbb{R}^n$, определяют некоторое отображение φ множества $h(U')$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Если их якобиан (27) отличен от нуля в точке $x_0 = h(p_0)$ этого множества, то по теореме об обратном отображении существует окрестность V' точки x_0 (содержащаяся в открытом множестве $h(U')$), на которой отображение φ является диффеоморфизмом на некоторое открытое множество из $\mathbb{R}^n$. Тогда пара (U'', h''), где

$$U'' = h^{-1}V, \quad h'' = (\varphi|_{V'}) \circ (h|_{U''}),$$

будет картой на $\mathscr{X}$, связанной с картой (U, h) функциями перехода (26). Следовательно, функции (26),— но рассматриваемые уже как функции на U'',— будут локальными координатами, соответствующими координатному отображению h''. □

Предложение 2 известно как теорема о замене локальных координат.

Вернемся теперь к произвольным гладким отображениям $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, где $\dim \mathscr{X} = n$ и $\dim \mathscr{Y} = m$.

Определение 4. *Рангом* гладкого отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ в точке $p \in \mathscr{X}$ называется ранг r линейного отображения $df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_q\mathscr{Y}$, $q = f(p)$, т. е. ранг якобиевой матрицы (21) отображения f в точке p.

Ясно, что

$$0 \leqslant r \leqslant \min(n, m).$$

Так как при малом изменении элементов матрицы ее ранг может только увеличиться, то ранг отображения f в произвольной точке достаточно малой окрестности точки p не менее его ранга в точке p_0. Однако он вполне может быть больше.

Определение 5. Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называется *локально плоским* в точке $p \in \mathscr{X}$, если существует окрестность U точки p, на которой ранг отображения f постоянен (равен рангу r в точке p).

Предложение 3. *Если отображение* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *локально плоско в точке* $p \in \mathscr{X}$, *то в многообразиях* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *существуют такие карты* $(U, x^1, \ldots, x^n)$ *и* $(V, y^1, \ldots, y^m)$, *что* $p \in U$, $fU \subset V$, *и отображение* f *записывается в локальных координатах* $x^1, \ldots, x^n$ *и* $y^1, \ldots, y^m$ *формулами*

$$(28) \qquad y^j = \begin{cases} x^j, & \text{если } j = 1, \ldots, r, \\ 0, & \text{если } j = r+1, \ldots, m. \end{cases}$$

(Заметим, что координаты $x^{r+1}, \ldots, x^n$ в формулах (28) не участвуют.)

Наглядно предложение 3 утверждает, что вблизи точки p локально плоское в p отображение устроено как проектирование $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r \subset \mathbb{R}^m$ пространства $\mathbb{R}^n$ вдоль последних $n-r$ координатных осей на координатное подпространство $\mathbb{R}^r$ пространства $\mathbb{R}^m$, состоящее из точек, у которых $m-r$ последних координат равны нулю.

Мы докажем предложение 3 в следующей лекции.