Лекция 13

Доказательство теоремы о локально плоских отображениях. — Погружения и субмерсии. — Подмногообразия гладкого многообразия. — Подпространство, касательное к подмногообразию. — Локальное задание подмногообразия. — Единственность структуры подмногообразия. — Случай вложенных подмногообразий. — Теорема о прообразе регулярного значения. — Решения систем уравнений. — Группа SL (n) как подмногообразие.

Докажем предложение 3 предыдущей лекции.

Пусть сначала

$$(U,\ h)=(U,\ x^1,\ \ldots,\ x^n) \quad \text{и} \quad (V,\ k)=(V,\ y^1,\ \ldots,\ y^m)$$

— произвольные карты многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, обладающие тем свойством, что $p\in U$ и $fU\subset V$, и пусть отображение f записывается в этих картах формулами

$$y^j=f^j(x^1,\ \ldots,\ x^n),\quad j=1,\ \ldots,\ m.$$

По условию прямоугольная матрица, состоящая из чисел $\left(\dfrac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p$, имеет ранг r. Перенумеровав — если нужно — координаты, мы без ограничения общности можем поэтому считать, что в этой матрице отличен от нуля минор

$$\det\left\|\left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p\right\|,\quad i,\ j=1,\ \ldots,\ r, \tag{1}$$

лежащий на пересечении первых r строк и столбцов.

Имея это в виду, рассмотрим в окрестности U точки p функции $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, заданные формулой

$$x^{i'}=\begin{cases} f^i(x^1,\ \ldots,\ x^n), & \text{если } i=1,\ \ldots,\ r,\\ x^i, & \text{если } i=r+1,\ \ldots,\ n.\end{cases} \tag{2}$$

Для этих функций якобиан $\det\left\|\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right\|$, очевидно, равен определителю (1) и, значит, отличен от нуля. Следовательно, согласно предложению 2 лекции 12, в некоторой окрестности U' точки p функции (2) являются локальными координатами.

Приняв теперь за U окрестность U', а за $x^1, \ldots, x^n$ — координаты $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$, мы тем самым получим карты $(U,\ h)$ и $(V,\ k)$, в которых отображение f записывается формулами вида

$$(3)\qquad y^j=\begin{cases} x^j, & \text{если } j=1,\ \dots,\ r,\\ f^j(x^1,\ \dots,\ x^n), & \text{если } j=r+1,\ \dots,\ n.\end{cases}$$

Следовательно, в этих картах якобиева матрица отображения f имеет вид

$$\left\|\begin{matrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0\\ \frac{\partial f^{r+1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^{r+1}}{\partial x^r} & \frac{\partial f^{r+1}}{\partial x^{r+1}} & \dots & \frac{\partial f^{r+1}}{\partial x^n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^r} & \frac{\partial f^m}{\partial x^{r+1}} & \dots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n}\end{matrix}\right\|.$$

Так как, согласно условию, ранг этой матрицы равен r не только в точке p, но и в некоторой окрестности этой точки (которую мы без ограничения общности можем считать совпадающей с U), то все производные

$$\begin{matrix}\frac{\partial f^{r+1}}{\partial x^{r+1}},\ \dots,\ \frac{\partial f^n}{\partial x^n},\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \frac{\partial f^m}{\partial x^{r+1}},\ \dots,\ \frac{\partial f^m}{\partial x^n}\end{matrix}$$

тождественно равны нулю в U. Поскольку окрестность U мы, очевидно, можем считать связной, отсюда следует, что в U (т. е., точнее, в $h(U)$) функции $f^{r+1},\ \dots,\ f^m$ не зависят от $x^{r+1},\ \dots,\ x^n$, т. е. их значения в любой точке $(x^1,\ \dots,\ x^r,\ \dots,\ x^n)\in h(U)$ могут быть записаны в виде

$$f^{r+1}(x^1,\ \dots,\ x^r),\ \dots,\ f^n(x^1,\ \dots,\ x^r).$$

Иными словами, эти функции можно считать функциями на множестве $\text{пр}\,h(U)\subset\mathbb{R}^r$, состоящем из таких точек $(x^1,\ \dots,\ x^r)\in\mathbb{R}^r$, что $(x^1,\ \dots,\ x^r,\ x^{r+1},\ \dots,\ x^n)\in h(U)$ хотя бы при одном выборе чисел $x^{r+1},\ \dots,\ x^n$ (геометрически множество $\text{пр}\,(U)\subset\mathbb{R}^n$ является не чем иным, как *проекцией* множества $h(U)\subset\mathbb{R}^n$ на подпространство $\mathbb{R}^r\subset\mathbb{R}^n$).

С другой стороны, из формул (3) непосредственно следует, что аналогично определяемая проекция $\text{пр}\,k(V)\subset\mathbb{R}^r$

множества $k(V) \subset \mathbb{R}^m$ содержит множество пр $h(U)$. Поэтому на некоторой окрестности точки $q=f(p)$ (а именно, на окрестности $k^{-1}((\text{пр}\, h(U)) \times \mathbb{R}^{m-r})$) определены функции

$$f^{r+1}(y^1, \ldots, y^r), \ldots, f^m(y^1, \ldots, y^r).$$

Мы положим

$$y^{j\prime} = \begin{cases} y^j, & \text{если } j=1, \ldots, r, \\ y^j - f^j(y^1, \ldots, y^r), & \text{если } j=r+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Поскольку

$$\det \left\| \frac{\partial y^{j\prime}}{\partial y^j} \right\| = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & & 1 & \ldots & 0 \\ & ? & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

где знак ? обозначает элементы, нам не интересные, то, согласно предложению 2 лекции 12, функции $y^{1\prime}, \ldots, y^{n\prime}$ являются в некоторой окрестности V' точки q локальными координатами. При этом отображение f будет в картах $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(V', y^{1\prime}, \ldots, y^{n\prime})$ задаваться формулами

$$y^{j\prime} = \begin{cases} x^j, & \text{если } j=1, \ldots, r, \\ 0, & \text{если } j=r+1, \ldots, m. \end{cases}$$

Для завершения доказательства остается обозначить V' снова через V, а $y^{1\prime}, \ldots, y^{n\prime}$ — через $y^1, \ldots, y^n$. □

Определение 1. Гладкое отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гладкого n-мерного многообразия $\mathscr{X}$ в гладкое m-мерное многообразие $\mathscr{Y}$ называется *погружением* (или *иммерсией*) в точке $p \in \mathscr{X}$, если его ранг в этой точке равен n (что, конечно, возможно только при $n \leqslant m$), т. е. если отображение

$$(4) \qquad df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_q\mathscr{Y}, \qquad q=f(p),$$

является мономорфизмом.

Аналогично, отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называется *субмерсией* (или *наложением*) в точке $p \in \mathscr{X}$, если его ранг в этой точке равен m (и, следовательно, $n \geqslant m$), т. е. если отображение (4) является эпиморфизмом.

Таким образом, отображение f является иммерсией или субмерсией, если его ранг принимает максимально возможное (при данных n и m) значение. Поэтому иммерсии и субмерсии называются также *отображениями максимального ранга.*

Согласно предложению 1 лекции 12 отображение тогда и только тогда одновременно является иммерсией и субмерсией (при $n=m$), когда оно этально.

Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, являющееся погружением (субмерсией) в каждой точке $p \in \mathscr{X}$, называется просто *погружением* (соответственно *субмерсией*).

Ясно, что субмерсии и иммерсии, являясь отображениями максимального ранга, локально плоски в p. Поэтому, согласно предложению 3 лекции 7, *для любой субмерсии $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ в точке $p \in \mathscr{X}$ существуют такие карты $(U, x^1, \dots, x^n)$ и $(V, y^1, \dots, y^m)$ многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, что $p \in U$, $fU \subset V$, и отображение f записывается в локальных координатах $x^1, \dots, x^n$ и $y^1, \dots, y^m$ формулами*

$$y^1 = x^1, \quad \dots, \quad y^m = x^m. \tag{5}$$

Наглядно это означает, что в соответствующих координатах любая субмерсия локально представляется проектированием $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, переводящим точку $(x^1, \dots, x^m, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ в точку $(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m$.

Для погружений мы переставим обозначения и будем считать f отображением $\mathscr{Y} \to \mathscr{X}$. Тогда *для любого погружения $f\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ в точке $q \in \mathscr{Y}$ существуют такие карты $(V, y^1, \dots, y^m)$ и $(U, x^1, \dots, x^n)$ многообразий $\mathscr{Y}$ и $\mathscr{X}$, что $q \in V$, $fV \subset U$, и отображение f записывается в локальных координатах $y^1, \dots, y^m$ и $x^1, \dots, x^n$ формулами*

$$x^1 = y^1, \quad \dots, \quad x^m = y^m, \qquad x^{m+1} = 0, \quad \dots, \quad x^n = 0. \tag{6}$$

Наглядно это означает, что в соответствующих координатах любое погружение локально представляется вложением $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, переводящим точку $(y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m$ в точку $(y^1, \dots, y^m, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Определение 2. Гладкое многообразие $\mathscr{Y}$ называется *подмногообразием* гладкого многообразия $\mathscr{X}$, если оно содержится в $\mathscr{Y}$, и соответствующее отображение вложения

$$\iota\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}, \quad \iota(p) = p, \tag{7}$$

является погружением в любой точке $p \in \mathscr{Y}$ (и, в частности, гладким отображением).

Поскольку $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$ определена топология $\mathbb{T}_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}}$, индуцированная топологией $\mathbb{T}_{\mathcal{X}}$ многообразия $\mathcal{X}$. Вообще говоря (см. ниже), эта топология отличается от топологии $\mathbb{T}_{\mathcal{Y}}$ многообразия $\mathcal{Y}$. Можно лишь утверждать, что $\mathbb{T}_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}} \subset \mathbb{T}_{\mathcal{Y}}$ (это включение равносильно непрерывности отображения ι).

Определение 3. В случае, когда ι является гомеоморфизмом на свой образ (т. е. если $\mathbb{T}_{\mathcal{Y}/\mathcal{X}} = \mathbb{T}_{\mathcal{Y}}$), многообразие $\mathcal{Y}$ называется *вложенным подмногообразием*. В противном случае $\mathcal{Y}$ называется *погруженным подмногообразием*. (Впрочем, последний термин употребляется также как синоним термина «подмногообразие» в случае, когда нужно подчеркнуть, что подмногообразие $\mathcal{Y}$, вообще говоря, вложенным не является.)

Погружение (7) является, конечно, инъективным отображением. Обратно, пусть $f: \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ — произвольное погружение, являющееся инъективным отображением, и пусть $f = \iota \circ f'$ — его разложение в композицию биективного отображения $f': \mathcal{Y} \to f(\mathcal{Y})$ и вложения $\iota: f(\mathcal{Y}) \to \mathcal{X}$. Поскольку отображение f' биективно, мы с помощью него можем перенести гладкость с $\mathcal{Y}$ на $\mathcal{Y}' = f(\mathcal{Y})$. Тогда $\mathcal{Y}'$ будет гладким многообразием, f' — диффеоморфным отображением, а $\iota = f \circ (f')^{-1}$ — погружением (как композиция погружения и диффеоморфизма), т. е. $\mathcal{Y}'$ будет подмногообразием многообразия $\mathcal{X}$.

Таким образом, подмногообразия многообразия $\mathcal{X}$ — это в точности образы в $\mathcal{X}$ произвольных погружений $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, являющихся инъективными отображениями. При этом вложенные подмногообразия — это образы погружений, являющихся монеоморфизмами (гомеоморфизмами на свой образ).

Примерами вложенных подмногообразий являются простые регулярные дуги и элементарные поверхности. Соответствующими погружениями являются параметризации. При этом условие регулярности параметризаций в точности означает, что параметризация является погружением.

Так как для любого подмногообразия $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ вложение (7) представляет собой погружение, то для любой точки $p \in \mathcal{Y}$ отображение

$$d\iota_p: \mathbf{T}_p\mathcal{Y} \to \mathbf{T}_p\mathcal{X}$$

является изоморфизмом линейного пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ на линейное подпространство $\operatorname{Im} d\iota_p = (d\iota_p)(\mathbf{T}_p\mathscr{Y})$ пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$. Это подпространство называется *касательным пространством подмногообразия $\mathscr{Y}$ в точке p*. Обычно оно отождествляется с $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ (посредством изоморфизма $d\iota_p$).

Некоторая специфика возникает в случае, когда $\mathscr{X}$ является аффинным пространством $\mathscr{A}$, а потому для любой точки $p \in \mathscr{X}$ (и, в частности, для любой точки $p \in \mathscr{Y}$) линейное пространство $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ отождествляется с ассоциированным линеалом $\mathscr{V}^0$. В этом случае принято подпространство $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ отождествлять с линейным подмногообразием $p + \mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ аффинного пространства $\mathscr{A}$ (т. е. — в наглядной интерпретации — считать его векторы отложенными от точки p). Ср. определение 3 лекции 3.

Будучи погружением, отображение (7) может быть записано в локальных координатах формулами (6). Это означает, что для любой точки p подмногообразия $\mathscr{Y}$ существует такая карта $(U, x^1, \ldots, x^n)$, $p \in U$, многообразия $\mathscr{X}$, что, во-первых, на некотором (открытом в $\mathscr{Y}$) множестве $V \subset U \cap \mathscr{Y}$ ограничения

$$y^1 = x^1|_V, \ \ldots, \ y^m = x^m|_V$$

первых m координат $x^1, \ldots, x^m$ являются локальными координатами на V и, во-вторых, точка $q \in U$ тогда и только тогда принадлежит V, когда

$$x^{m+1}(q) = 0, \ \ldots, \ x^n(q) = 0. \tag{8}$$

Такие координаты $x^1, \ldots, x^n$ мы будем называть *согласованными* с подмногообразием $\mathscr{Y}$.

Координаты $y^1, \ldots, y^m$ определяют в $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p, \tag{9}$$

а координаты $x^1, \ldots, x^n$ — в $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p. \tag{10}$$

При этом, так как вложение $\iota\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ записывается в этих координатах функциями $y^1 = x^1, \ldots, y^m = x^m$, то его дифференциал $d\iota_p$ будет переводить базис (9) в первые m векторов базиса (10). В силу отождествления $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ с $\operatorname{Im} d\iota_p$ это означает, что

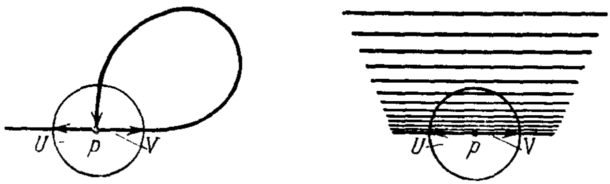
$$\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial y^m}\right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p,$$

т. е. *векторы* $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$ *составляют базис подпространства* $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ *пространства* $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$.

Если подмногообразие $\mathscr{Y}$ вложено в $\mathscr{X}$, то без ограничения общности можно считать, что

(11) $$V = U \cap \mathscr{Y}.$$

Действительно, так как V открыто в $\mathscr{Y}$, а топология в $\mathscr{Y}$ индуцирована топологией $\mathscr{X}$, что в $\mathscr{X}$ существует такое открытое множество W, что $V = W \cap \mathscr{Y}$. Заменив U на



Две типичные ситуации, в которых нельзя добиться выполнения равенства $V = U \cap \mathscr{Y}$

$U \cap W$, мы добьемся, не ограничивая общности, выполнения равенства (11). □

Равенство (11) означает, что точка $q \in U$ тогда и только тогда принадлежит $\mathscr{Y}$, когда для нее имеют место равенства (8). Другими словами, *локально* (т. е. в окрестности U) многообразие $\mathscr{Y}$ задается $n-m$ уравнениями

(12) $$x^{m+1} = 0, \ \ldots, \ x^n = 0.$$

В общем случае для невложенного (погруженного) подмногообразия $\mathscr{Y}$ достичь выполнения равенства (11), вообще говоря, нельзя, и связь между V и $U \cap \mathscr{Y}$ усложняется.

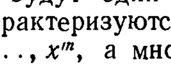
Так как функции $x^{m+1}, \ldots, x^n$ непрерывны и, значит, условия (8) выделяют в U замкнутое подмножество, то множество V замкнуто в U (по отношению к топологии, индуцированной в U топологией $\mathbb{T}_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}$). Следовательно, V замкнуто и в $U \cap \mathscr{Y}$ (по отношению к топологии, индуцированной топологией $\mathbb{T}_{\mathscr{Y}/\mathscr{X}}$, а потому и по отношению к топологии индуцированной топологией $\mathbb{T}_{\mathscr{Y}}$). С другой стороны, по условию множество V открыто в $\mathscr{Y}$, а значит, и в $U \cap \mathcal{Y}$ (по отношению к топологии, индуцированной топологией $\mathbb{T}_{\mathcal{Y}}$). Таким образом, множество V открыто-замкнуто в $U \cap \mathcal{Y}$ (по отношению к топологии, индуцированной топологией $\mathbb{T}_{\mathcal{Y}}$). Следовательно, *если координатная окрестность V связна, то она является компонентой множества $U \cap \mathcal{Y}$, содержащей точку p.*

[Напомним, что любая точка гладкого многообразия обладает фундаментальной системой связных координатных окрестностей—например гомеоморфных открытым шарам евклидова пространства соответствующей размерности.]

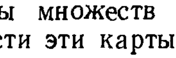
Предположим теперь, что на подмножестве $\mathcal{Y}$ гладкого многообразия $\mathcal{X}$ заданы две гладкости, по отношению к которым оно является подмногообразием многообразия $\mathcal{X}$ и которые определяют на $\mathcal{Y}$ *одну и ту же топологию*. Тогда для обеих гладкостей карты вида $(V, y^1, \ldots, y^m)$, обладающие описанными выше свойствами, будут одни и те же (поскольку функции $y^1, \ldots, y^m$ характеризуются как ограничения локальных координат $x^1, \ldots, x^m$, а множества V—как компоненты множеств $U \cap \mathcal{Y}$). С другой стороны, в каждой гладкости эти карты составляют, очевидно, податлас максимального атласа. Поэтому обе гладкости совпадают.

Таким образом, *при данной топологии на подмножестве $\mathcal{Y}$ гладкого многообразия $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$ может существовать не более одной структуры гладкого многообразия, по отношению к которой $\mathcal{Y}$ является подмногообразием многообразия $\mathcal{X}$.*

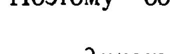
Конечно, варьируя топологию, мы можем получить на $\mathcal{Y}$ много различных структур подмногообразия. Например, любое подмножество $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ мы можем снабдить дискретной топологией, превратив его тем самым в нульмерное подмногообразие.



Б



А



В

Более интересный пример мы получим, рассмотрев на плоскости множество, изображенное на рис. А («восьмерку»). Оно не может быть в индуцированной топологии подмногообразием плоскости из-за особой точки в центре. Однако оно же в более слабой топологии, условно изображенной на рис. Б, будет погруженным многообразием, диффеоморфным прямой $\mathbb{R}$. Оно будет погруженным подмногообразием, диффеоморфным прямой $\mathbb{R}$, и в другой топологии, условно изображенной на рис. В. Соответствующие вложения будут неэквивалентными регулярными кривыми без двойных точек, имеющими один и тот же носитель.

Применительно к топологии на $\mathscr{Y}$, индуцированной топологией многообразия $\mathscr{X}$, мы получаем, в частности, что *на подмножестве $\mathscr{Y}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ может существовать не более одной структуры гладкого многообразия, по отношению к которой $\mathscr{Y}$ является вложенным подмногообразием*. Поэтому вполне законно говорить, что вложенным подмногообразием является подмножество $\mathscr{Y}$.

Чтобы определить, является ли данное подмножество $\mathscr{Y}$ вложенным подмногообразием, следует

1° Рассмотреть всевозможные пары вида $(V, y^1, \ldots, y^m)$, где V — пересечение $U \cap \mathscr{Y}$ с $\mathscr{Y}$ носителя U некоторой карты $(U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathscr{X}$, а $y^1, \ldots, y^m$ — ограничения $x^1|_V, \ldots, x^m|_V$ на V локальных координат $x^1, \ldots, x^n$.

2° Отобрать из этих пар пары $(V, y^1, \ldots, y^m)$, являющиеся картами на $\mathscr{Y}$, т. е. такие, что функции $y^1, \ldots, y^m$ задают биективное отображение множества $V = U \cap \mathscr{Y}$ на некоторое открытое множество $V \subset \mathbb{R}^m$.

Тогда, *если из отобранных карт можно составить атлас на $\mathscr{Y}$, то $\mathscr{Y}$ будет вложенным подмногообразием*. Действительно, ясно, что этот атлас задает на $\mathscr{Y}$ гладкость, по отношению к которой $\mathscr{Y}$ является подмногообразием и которая согласована с индуцированной топологией. [Заметим, что, вообще говоря, максимальный атлас многообразия $\mathscr{Y}$ может содержать только часть отобранных карт.] $\square$

Применим это общее утверждение к множеству $\mathscr{Y} = f^{-1}(q_0)$, являющемуся полным прообразом некоторой точки $q_0 \in \mathscr{Z}$ при гладком отображении $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$.

Определение 4. Точка $q_0 \in \mathscr{Z}$ называется *регулярным значением* отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$, если f является субмерсией в каждой точке $p \in \mathscr{Y}$.

Предложение 1 (теорема о прообразе регулярного значения). *Прообраз $\mathscr{Y} = f^{-1}(q_0)$ произвольного регулярного значения q_0 (когда он не пуст) является* *вложенным подмногообразием многообразия* $\mathscr{X}$. *Размерность этого подмногообразия равна* $n-r$, *где* $r=\dim \mathscr{Z}$ (*а* $n=\dim \mathscr{X}$).

Доказательство. Для любой точки $p \in \mathscr{Y}$ в многообразии $\mathscr{Z}$ существует такая карта $(U, x^1, \ldots, x^n) = (U, h)$, а в многообразии $\mathscr{Z}$ — такая карта $(W, z^1, \ldots, z^r)$, что $p \in U$, $fU \subset W$, и в этих картах отображение записывается формулами

$$z^1 = x^{m+1}, \ \ldots, \ z^r = x^n, \tag{13}$$

где $m=n-r$. При этом без ограничения общности мы можем считать, что в точке q_0 все координаты $z^1, \ldots, z^r$ равны нулю и, значит, что точка $u \in U$ тогда и только тогда принадлежит множеству $\mathscr{Y}$ (т. е., точнее, — пересечению $V = U \cap \mathscr{Y}$), когда

$$x^{m+1}(u) = 0, \ \ldots, \ x^n(u) = 0.$$

Отсюда следует, что если отображение $k\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, заданное формулой

$$k(u) = (y^1(u), \ \ldots, \ y^m(u)), \qquad u \in U,$$

где

$$y^1 = x^1|_V, \ \ldots, \ y^m = x^m|_V,$$

рассматривать в силу естественного вложения

$$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x^1, \ldots, x^m) \longmapsto (x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0)$$

как отображение в $\mathbb{R}^n$, то оно будет не чем иным, как ограничением $h|_V$ на V отображения $h\colon U \longrightarrow h(U)$. Поэтому множество $k(V)$, являясь пересечением $\mathbb{R}^m \cap h(U)$, будет открыто в $\mathbb{R}^m$, а отображение $k\colon V \longrightarrow k(V)$ будет биективно. Другими словами, пара $(V, k) = (V, y^1, \ldots, y^m)$ будет картой в $\mathscr{Y}$.

Пусть теперь $(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ — другая карта многообразия $\mathscr{X}$, обладающая по отношению к отображению f аналогичными свойствами, и пусть $(V', y^{1'}, \ldots, y^{m'})$ — соответствующая карта в $\mathscr{Y}$. Так как в пересечении $U \cap U'$ координаты $x^1, \ldots, x^i$ и $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ связаны формулами вида

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^i), \quad i' = 1', \ldots, n',$$

где

$$\det \left\| \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \right\| \neq 0 \text{ всюду на } U \cap U', \tag{14}$$

то в пересечении $V \cap V' = U \cap U' \cap \mathcal{Y}$ координаты $y^1, \ldots, y^m$ и $y^{1'}, \ldots, y^{m'}$ будут связаны формулами

(15) $$y^{j'} = x^{j'}(y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0), \qquad j' = 1, \ldots, m.$$

Кроме того, так как в U' множество $\mathcal{Y}$ определяется уравнениями

$$x^{m+1'} = 0, \ \ldots, \ x^{n'} = 0,$$

то в $V \cap V' \neq \varnothing$ должны иметь место также и соотношения

$$x^{k'}(y^1, \ldots, y^m, 0, \ldots, 0) = 0, \quad k' = m+1, \ldots, n.$$

Отсюда следует, что в каждой точке из $V \cap V'$ для частных производных $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l}$, $l = 1, \ldots, m$, будут иметь место равенства

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} = \begin{cases} \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^l}, & \text{если } i' = 1, \ldots, m, \\ 0, & \text{если } i' = m+1, \ldots, n, \end{cases}$$

и, значит, якобиан (14) будет делиться на якобиан

(16) $$\det \left\| \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^l} \right\|, \qquad \begin{matrix} i' = 1', \ldots, m', \\ l = 1, \ldots, m. \end{matrix}$$

Следовательно, якобиан (16) отличен от нуля, и, значит, формулы (15) задают диффеоморфизм соответствующих множеств.

Этим доказано, что любые две карты вида $(V, y^1, \ldots, y^m)$ на $\mathcal{Y}$ согласованы. Следовательно, — поскольку они, очевидно, покрывают $\mathcal{Y}$, — эти карты составляют атлас и, значит, $\mathcal{Y}$ является вложенным многообразием. □

Из формул (13), задающих отображение f в локальных координатах, непосредственно следует, что дифференциал

$$df_p \colon \mathbf{T}_p\mathcal{X} \to \mathbf{T}_{q_0}\mathcal{Z}$$

этого отображения в точке $p \in \mathcal{Y}$ действует на векторах базиса пространства $\mathbf{T}_p\mathcal{X}$ по формулам

$$df_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \begin{cases} 0, & \text{если } i = 1, \ldots, m, \\ \left(\frac{\partial}{\partial z^{i-m}}\right)_{q_0}, & \text{если } i = m+1, \ldots, n. \end{cases}$$

Значит, *векторы*,

(17) $$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^m}\right)_p$$

порождают ядро $\operatorname{Ker} df_p$ *отображения* df_p, *а векторы*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{m+1}}\right)_p, \ \ldots, \ \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \tag{18}$$

порождают подпространство, изоморфно отображающееся на касательное пространство $\mathbf{T}_{q_0}\mathscr{Z}$ *многообразия* $\mathscr{Z}$.

Таким образом,

$$\mathbf{T}_p\mathscr{X} = \operatorname{Ker} df_p \oplus \hat{\mathbf{T}}_{q_0}\mathscr{Z},$$

где $\hat{\mathbf{T}}_{q_0}\mathscr{Z}$ — подпространство, натянутое на векторы (18).

С другой стороны, так как $y^1 = x^1|_V, \ \ldots, \ y^m = x^m|_V$, то векторы (17) порождают подпространство $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$. Следовательно, *для любой точки* $p \in \mathscr{Y}$ *ядро* $\operatorname{Ker} df_p$ *отображения* df_p *совпадает с касательным пространством* $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ *подмногообразия* $\mathscr{Y}$:

$$\mathbf{T}_p\mathscr{Y} = \operatorname{Ker} df_p, \tag{19}$$

и потому

$$\mathbf{T}_p\mathscr{X} = \mathbf{T}_p\mathscr{Y} \oplus \hat{\mathbf{T}}_{q_0}\mathscr{Z}. \tag{20}$$

Подчеркнем, что это разложение имеет место для любой точки $p \in \mathscr{Y}$.

Замечание 1. Следует иметь в виду, что отнюдь не любое вложенное подмногообразие $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ является прообразом регулярного значения при некотором отображении $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}$ (см. ниже задачу 1).

Согласно формуле (20), для того чтобы вложенное подмногообразие $\mathscr{Y} \subset \mathscr{Z}$ было прообразом регулярного значения, необходимо (и как можно показать, достаточно), чтобы для любой точки $p \in \mathscr{Z}$ имело место разложение вида

$$\mathbf{T}_p\mathscr{X} = \mathbf{T}_p\mathscr{Y} \oplus N_p,$$

где N_p — подпространство, для которого задано — *при всех* p — изоморфное отображение $N_p \to \mathbb{R}^{n-m}$, гладко зависящее (в понятном смысле) от точки p.

Пусть $f^1, \ \ldots, \ f^r$ — гладкие функции на гладком многообразии $\mathscr{X}$, а $a^1, \ \ldots, \ a^r$ — вещественные числа. Точка $p \in \mathscr{X}$ называется *решением* системы уравнений

$$f^1 = a^1, \ \ldots, \ f^r = a^r, \tag{21}$$

если $f^i(p) = a^i$ для любого $i = 1, \ \ldots, \ r$.

Пусть $\mathscr{Y}$ — множество всех решений системы (21), Говорят, что уравнения (21) *функционально независимы*, если для любой точки $p \in \mathscr{Y}$ ковекторы

$$df^1_p, \ \ldots, \ df^r_p \in \mathbf{T}^*_p\mathscr{X}$$

линейно независимы, и, значит, уравнения

$$df^1_p = 0, \ \ldots, \ df^r_p = 0 \tag{22}$$

определяют в $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ линейное подпространство размерности $m = n - r$.

Предложение 2. *Для каждой системы* (21) *функционально независимых уравнений множество* $\mathscr{Y}$ *ее решений является вложенным подмногообразием многообразия* $\mathscr{X}$ *размерности* $m = n - r$.

Для каждой точки $p \in \mathscr{Y}$ *подпространство* $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ *является подпространством решений системы линейных уравнений* (22).

Доказательство. Функции $f^1, \ldots, f^r$ определяют (по формуле $f(p) = (f^1(p), \ \ldots, \ f^r(p))$) гладкое отображение $f \colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}^r$, для которого множество $\mathscr{Y}$ является прообразом $f^{-1}(a)$ точки $a = (a^1, \ \ldots, \ a^r) \in \mathbb{R}^r$. При этом функциональная независимость уравнений (21) означает, очевидно, что точка a является регулярным значением отображения f. Поэтому первое утверждение предложения 2 является всего лишь переформулировкой предложения 1 для случая, когда $\mathscr{Z} = \mathbb{R}^r$.

Аналогично, поскольку пространство решений уравнений (22) является не чем иным, как ядром отображения df_p, второе утверждение является переформулировкой равенства (19). □

Следствие 1. *Пусть* f — *гладкая функция на гладком многообразии* $\mathscr{X}$, *и пусть* $\mathscr{Y}$ — *множество всех точек* $p \in \mathscr{Y}$, *для которых* $f(p) = a$, *где* $a \in \mathbb{R}$ — *фиксированное число. Если* $df_p \neq 0$ *для каждой точки* $p \in \mathscr{Y}$, *то* $\mathscr{Y}$ *представляет собой вложенное подмногообразие размерности* $n - 1$, *касательным пространством которого в произвольной точке* $p \in \mathscr{Y}$ *является гиперплоскость* $df_p = 0$. □

Для функции $f = f(x, y)$ на $\mathbb{R}^2$ условие $df_p \neq 0$ означает, что либо $\dfrac{\partial f}{\partial x} \neq 0$, либо $\dfrac{\partial f}{\partial y} \neq 0$. Поэтому условие, что подмножество на плоскости с уравнением $f(x, y) = 0$ является вложенным одномерным многообразием, в точности означает, что оно не имеет особых точек (см. лекцию 1).

Замечание 2. Как показывает теорема Уитни из лекции 1 освободиться от условия $df_p \neq 0$ в следствии 1, вообще говоря, нельзя. Тем не менее оно отнюдь не необходимо для того, чтобы множество $\mathcal{Y}$ было вложенным (и не обязательно $(n-1)$-мерным) подмногообразием. Например, в $\mathbb{R}^3$ уравнение

$$x^2+y^2=0$$

определяет прямую (вложенное подмногообразие), но во всех точках этой прямой дифференциал df_p функции $f = x^2+y^2$ тождественно равен нулю.

Кроме того, согласно замечанию 1, отнюдь не любое подмногообразие можно задать системой функционально независимых уравнений.

Задача 1. Покажите, что на проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ не существует гладкой функции f, множеством нулей которой была бы проективная прямая $\mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2$.

Тем не менее на практике тот факт, что то или иное подмножество гладкого многообразия является вложенным подмногообразием, устанавливается, как правило, с помощью предложения 2 (или его следствия 1).

Пример 1. Определитель $\det A$ квадратной матрицы $A = \|a_{ij}\|$ является многочленом от a_{ij}, имеющим по каждому переменному степень 1. При этом легко видеть, что

$$\frac{\partial \det A}{\partial a_{ij}} = A_{ij}, \tag{23}$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. (Достаточно заметить, что по формуле разложения определителя по элементам столбца $\det A = A_{ij}a_{ij} + A'_{ij}$, где A'_{ij} не зависит от a_{ij}.) Так как при $\det A = 1$ обязательно $A_{ij} \neq 0$ хотя бы для одного элемента a_{ij}, отсюда следует, что для уравнения

$$\det A = 1$$

(на многообразии GL(n)) условия следствия 1 предложения 2 выполнены. Следовательно, *группа* SL(n) *является вложенным подмногообразием размерности* n^2-1 *группы* GL(n).

Задача 2. Покажите, что гладкость на группе SL(n) как на подмногообразии многообразия GL(n) совпадает с ее гладкостью, как матричной группы Ли (см. лекцию 5).

Так как группа $\mathrm{GL}(n)$ является открытым подмногообразием линейного пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, то для любой матрицы $A = \mathrm{GL}(n)$ касательное пространство $\mathbf{T}_A\mathrm{GL}(n)$ к $\mathrm{GL}(n)$ в A естественным образом отождествляется с $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$. В этом отождествлении базисному вектору $\left(\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right)_A$ пространства $\mathbf{T}_A\mathrm{GL}(n)$ отвечает матричная единица $E_{ij}\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, и, значит, ковектору $(da_{ij})_A$ отвечает ковектор $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, сопоставляющей матрице $B=\|b_{ij}\|$ ее элемент b_{ij}.

В силу формулы (23) отсюда следует, что дифференциал df_A функции $f\colon A\mapsto\det A$, рассматриваемый как ковектор пространства $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, действует по формуле

$$df_A(B)=\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}b_{ij},\qquad B=\|b_{ij}\|\in\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}),$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов матрицы A. В частности, при $A=E$ (когда $A_{ij}=\delta_{ij}$) мы получаем, что

$$df_E(B)=\sum_{i=1}^{n}b_{ii}=\mathrm{Tr}\,B,$$

и, значит, что $\mathrm{Ker}\,df_E=\mathfrak{sl}(n)$.

Поскольку $\mathrm{Ker}\,df_E=\mathbf{T}_E\mathrm{SL}(n)$ этим доказано, что *касательным пространством подгруппы* $\mathrm{SL}(n)$ *в точке* E *является ее алгебра Ли* $\mathfrak{sl}(n)$.

З а м е ч а н и е 3. В следующем семестре мы покажем (см. лекцию IV.10), что любая матричная группа Ли $\mathcal{G}$ представляет собой вложенное подмногообразие многообразия $\mathrm{GL}(n)$, касательным пространством которого в точке E является ее алгебра Ли $\mathfrak{g}$.