Лекция 14

Теорема вложения. — Еще о компактных множествах. — Функции Урысона. — Доказательство теоремы вложения. — Многообразия, удовлетворяющие второй аксиоме счетности. — Разреженные и тощие множества. — Нуль-множества.

Простейшим — и наиболее наглядным — классом многообразий являются многообразия, диффеоморфные для некоторого $N > 0$ вложенным подмногообразиям пространства $\mathbb{R}^N$, или, как мы будем для упрощения формулировок говорить, многообразия, *вложимые* в $\mathbb{R}^N$.

Ясно, что любое подпространство хаусдорфова топологического пространства, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, также хаусдорфово и удовлетворяет этой аксиоме. Поэтому *любое вложимое в* $\mathbb{R}^N$ *многообразие хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности*. Оказывается, что это необходимое условие также и достаточно:

Теорема 1. *Для любого гладкого хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, существует такое N, что многообразие $\mathscr{X}$ вложимо в* $\mathbb{R}^N$.

Что можно сказать о N?

Предложение 1. *Если гладкое многообразие размерности n вложимо в $\mathbb{R}^N$, где $N > 2n+1$, то оно вложимо и в* $\mathbb{R}^{N-1}$.

Следствие (теорема вложения Уитни). *Любое гладкое хаусдорфово многообразие $\mathscr{X}$ размерности n, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, вложимо в* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Мы докажем теорему 1 только в предположении, что *многообразие $\mathscr{X}$ компактно.* [Заметим, что компактное многообразие удовлетворяет (докажите!) второй аксиоме счетности.] Общий случай требует дополнительных технических ухищрений, на которые у нас нет времени.

Замечание 1. Теорема 1 верна для многообразий произвольного класса C^r, $r \geqslant 1$, но наше доказательство не будет проходить для многообразий класса C^1, а также класса C^ω (вещественно аналитических), которые требуют совсем других, значительно более сложных соображений.

Мы начнем с нескольких простых замечаний о компактных множествах.

Легко видеть, что *непрерывный образ компактного множества компактен*, т. е. для любого непрерывного отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и любого компактного подмножества $C \subset \mathscr{X}$ множество $fC \subset \mathscr{Y}$ компактно. Действительно, если открытые множества U_α покрывают fC, то открытые множества $f^{-1}U_\alpha$ покрывают C, и если множества $f^{-1}U_{\alpha_1}, \ldots, f^{-1}U_{\alpha_n}$ покрывают C, то множества $U_{\alpha_1}, \ldots$ $\ldots, U_{\alpha_n}$ покрывают fC. $\square$

Вообще говоря, компактное подмножество может быть и незамкнутым, но если пространство хаусдорфово, то это невозможно, т. е. *в хаусдорфовом пространстве $\mathscr{X}$ любое компактное подмножество C замкнуто*. Действительно, в силу хаусдорфовости пространства $\mathscr{X}$ для любой точки $c \in C$ и любой точки $p \in \mathscr{X} \setminus C$ существуют такие окрестности $U_p(c)$ и $V_c(p)$ точек c и p соответственно, что $U_p(c) \cap V_C(p) = \varnothing$. Так как для каждой точки $p \in \mathscr{X} \setminus C$ все окрестности вида $U_p(c)$, $c \in C$, покрывают множество C, то в силу компактности этого множества существует такая конечная система точек $c_1, \ldots, c_k \in C$, что

$$C \subset U_p(c_1) \cup \ldots \cup U_p(c_k).$$

Но тогда пересечение

$$V = V_{c_1}(p) \cap \ldots \cap V_{c_k}(p) \tag{1}$$

будет окрестностью точки p, не пересекающейся с C, т. е. содержащейся в $\mathscr{X} \setminus C$. Этим доказано, что любая точка p множества $\mathscr{X} \setminus C$ является его внутренней точкой, т. е. множество $\mathscr{X} \setminus C$ открыто. Следовательно, множество C замкнуто. $\square$

Отсюда следует, что *если пространство $\mathscr{X}$ компактно, а пространство $\mathscr{Y}$ хаусдорфово, то каждое непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ замкнуто* (для любого замкнутого множества $C \subset \mathscr{X}$ множество $fC \subset \mathscr{Y}$ замкнуто). Действительно, если множество C замкнуто, то в силу компактности пространства $\mathscr{X}$ оно компактно. Поэтому множество fC компактно и, значит, — в силу хаусдорфовости пространства $\mathscr{Y}$ — замкнуто. $\square$

Особо важен частный случай, когда отображение f биективно. Поскольку в этом случае замкнутость отображения f означает непрерывность обратного отображения $f^{-1}\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$, мы видим, что *непрерывное биективное отображение компактного пространства на хаусдорфово является гомеоморфизмом.*

Если же непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ компактного пространства $\mathscr{X}$ в хаусдорфово пространство $\mathscr{Y}$ лишь инъективно, то оно является монеоморфизмом (гомеоморфизмом на свой образ $f(\mathscr{Y})$, который в этом случае замкнут в $\mathscr{Y}$).

Поэтому, в частности, *каждое компактное подмногообразие хаусдорфова многообразия является вложенным подмногообразием.*

Пусть теперь $\mathscr{X}$ — произвольное гладкое многообразие, а W и V — такие его открытые подмножества, что

$$\overline{W} \subset V. \tag{2}$$

Определение 1. *Функцией Урысона* пары (V, W) мы будем называть такую гладкую функцию $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}$, что

а) $0 \leqslant \varphi(p) \leqslant 1$ для любой точки $p \in \mathscr{X}$;

б) $\varphi(p) = 1$ тогда и только тогда, когда $p \in \overline{W}$;

в) если $p \in \mathscr{X} \setminus V$, то $\varphi(p) = 0$.

Можно показать, что если многообразие $\mathscr{X}$ хаусдорфово и удовлетворяет второй аксиоме счетности, то *функция Урысона существует для любой пары* (V, W) *открытых множеств, удовлетворяющих условию* (2). Однако это утверждение нам не нужно, и поэтому мы удовлетворимся доказательством следующего, более слабого результата.

Предложение 2. *Если гладкое многообразие $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то для любой его точки p_0 и любой окрестности U этой точки найдутся такие открытые множества W и V, что*

$$p_0 \in W, \quad \overline{W} \subset V, \quad \overline{V} \subset U$$

и для пары (V, W) существует функция Урысона.

Доказательство. Ясно, что без ограничения общности окрестность U можно считать координатной окрестностью точки p_0. По определению это означает, что существует диффеоморфизм h множества U на некоторое открытое множество $h(U) \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $x_0 = h(p_0)$. Так как $x_0 \in h(U)$, а множество $h(U)$ открыто, то существует такое $r > 0$, что каждая точка $x \in \mathbb{R}^n$, для которой $|x - x_0| < r$ (т. е. каждая точка шара $\mathbb{B}^n_r(x_0)$), принадлежит $h(U)$.

Заменив диффеоморфизм h на его композицию с некоторым преобразованием подобия пространства $\mathbb{R}^n$, мы без ограничения общности можем поэтому считать, что $x_0 = 0$ и $r = 3$, т. е. что $\mathring{\mathbb{B}}^n_3 \subset h(U)$, где (см. лекцию 1) $\mathring{\mathbb{B}}^n_3$ —

открытый шар пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса 3 с центром в точке $\mathbf{0}$.

Тогда для любого $r<3$ в многообразии $\mathscr{X}$ будет определено множество $h^{-1}(\mathbb{B}_r^n)$. Так как шар $\mathbb{B}_r^n$ компактен, а отображение h^{-1} является гомеоморфизмом, то это множество также компактно и, следовательно, поскольку по условию многообразие $\mathscr{X}$ хаусдорфово, — замкнуто.

С другой стороны, множество $h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_r^n)$ открыто (в U, а потому и в $\mathscr{X}$) и его замыкание $\overline{h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_r^n)}$ содержит, очевидно, множество $h^{-1}(\mathbb{B}_r^n)$. Поэтому

$$\overline{h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_r^n)}=h^{-1}(\mathbb{B}_r^n).$$

Положив

$$W=h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_1^n) \quad \text{и} \quad V=h^{-1}(\mathring{\mathbb{B}}_2^n),$$

мы немедленно получим отсюда, что

$$\overline{W}\subset V \quad \text{и} \quad \overline{V}\subset U.$$

При этом $p_0\in W$ и

$$h(\overline{W})=\mathbb{B}_1^n \quad \text{и} \quad h(\overline{V})=\mathbb{B}_2^n.$$

Вспомним теперь, что, согласно следствию 2 леммы 1 лекции 1, на пространстве $\mathbb{R}^n$ существует такая гладкая функция $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, что $0\leqslant f\leqslant 1$ на $\mathbb{R}^n$ и

$$f(\boldsymbol{x})=\begin{cases} 1 \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{x}\in\mathbb{B}_1^n, \\ 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \boldsymbol{x}\notin\mathring{\mathbb{B}}_2^n. \end{cases}$$

Имея все это в виду, мы определим функцию $\varphi\colon \mathscr{X}\to$ $\to\mathbb{R}$ формулой

$$\varphi(p)=\begin{cases} f(h(p)), & \text{если } p\in U, \\ 0, & \text{если } p\notin U. \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, что эта функция обладает свойствами **а**, **б** и **в** из определения 1. Поэтому нужно лишь доказать, что функция (3) гладка.

По построению функция (3) гладка на U и на $\mathscr{X}\setminus\overline{V}$ (на последнем множестве она равна нулю). При этом открытые множества U и $\mathscr{X}\setminus\overline{V}$ покрывают $\mathscr{X}$. С другой стороны, ясно, что если некоторая функция $\varphi\colon \mathscr{X}\to\mathbb{R}$ гладка на любом элементе U_α открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия $\mathscr{X}$, то она гладка на всем $\mathscr{X}$. Поэтому, в частности, функция (3) гладка на $\mathscr{X}$. $\square$

Теперь мы уже может доказать теорему 1.

Доказательство теоремы 1 (для компактного $\mathscr{X}$). Выбрав для каждой точки $p_0 \in \mathscr{X}$ координатную окрестность U и применив предложение 2, рассмотрим предусмотренное этим предложением множество W. Построенные для всех точек $p_0 \in \mathscr{X}$ эти множества составляют открытое покрытие многообразия $\mathscr{X}$. Поэтому, поскольку многообразие по условию $\mathscr{X}$ компактно, в этом покрытии можно выбрать конечное подпокрытие. Обозначив множества W, составляющие это подпокрытие, символами $W_1, \ldots, W_m$, рассмотрим соответствующие множества

$$V_1, \ldots, V_m, \quad U_1, \ldots, U_m,$$

координатные отображения

$$h_1 \colon U_1 \to \mathbb{R}^n, \ \ldots, \ h_m \colon U_m \to \mathbb{R}^n$$

и функции

$$\varphi_1 \colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}, \ \ldots, \ \varphi_m \colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}$$

из предложения 2.

Эти множества, отображения и функции обладают следующими свойствами:

1° Для любого $i = 1, \ldots, m$ имеют место вложения

$$\overline{W}_i \subset V_i, \quad \overline{V}_i \subset U_i.$$

2° Семейства

$$\begin{gathered}\{(W_1, h_1), \ \ldots, \ (W_m, h_m)\}, \\ \{(V_1, h_1), \ \ldots, \ (V_m, h_m)\}, \\ \{(U_1, h_1), \ \ldots, \ (U_m, h_m)\}\end{gathered}$$

являются атласами многообразия $\mathscr{X}$. (Конечно, в первых двух случаях имеются в виду соответствующие ограничения отображений $h_1, \ldots, h_m$.)

3° Каждая функция φ_i, $i = 1, \ldots, m$, является функцией Урысона пары (V_i, W_i).

Записывая векторы пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ в виде пар $(\boldsymbol{x}, x)$, где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \mathbb{R}$, мы определим отображения

$$f_i \colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}^{n+1}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

формулами

$$f_i(p) = \begin{cases} (\varphi_i(p)\, h_i(p), \ \varphi_i(p)), & \text{если } p \in U_i, \\ (0, \ 0), & \text{если } p \notin U_i. \end{cases}$$

Ясно, что отображение f_i гладко на U_i и равно нулю вне $\overline{V}_i$. Поэтому оно гладко на всем многообразии $\mathscr{X}$. Кроме того, $f_i(p)=(h_i(p), 1)$ для любой точки $p\in W_i$, откуда непосредственно следует (поскольку отображение h_i является диффеоморфизмом), что в каждой точке $p\in W_i$ отображение f_i является погружением.

Рассмотрим теперь пространство $\mathbb{R}^N$, где $N=m(n+1)$. Записывая векторы этого пространства в виде $(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m)$, где $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_m\in\mathbb{R}^{n+1}$, мы определим отображение

$$f\colon \mathscr{X}\to\mathbb{R}^N,$$

полагая для любой точки $p\in\mathscr{X}$

$$f(p)=(f_1(p), \ldots, f_m(p)).$$

Ясно, что отображение f гладко.

Пусть p и q — такие точки многообразия $\mathscr{X}$, что $f(p)=f(q)$. Тогда $f_i(p)=f_i(q)$ для любого $i=1, \ldots, m$, и в частности, $\varphi_i(p)=\varphi_i(q)$. С другой стороны, так как карты (W_i, h_i) составляют атлас, то существует такое i_0, что $p\in W_{i_0}$ и, значит, $\varphi_{i_0}(p)=1$ (а $f_{i_0}(p)=(h_{i_0}(p), 1)$). Следовательно, $\varphi_{i_0}(q)=1$, что в силу свойства б функций φ_i возможно только при $q\in\overline{W}_i$. Поэтому $f_{i_0}(q)=(h_{i_0}(q), 1)$ и, значит, $h_{i_0}(p)=h_{i_0}(q)$. Поскольку отображенне h_{i_0} ннъективно, этим доказано, что $p=q$. Таким образом, если $f(p)=f(q)$, то $p=q$, т. е. *отображение f инъективно*. Поскольку многообразие $\mathscr{X}$ компактно, отображение f является, следовательно, монеоморфизмом.

Рассмотрим теперь дифференциал df_p отображения f в произвольной точке $p\in\mathscr{X}$. В силу отождествления $\mathbf{T}_{f(p)}\mathbb{R}^N=\mathbb{R}^N$ мы можем считать, что

$$df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X}\to\mathbb{R}^N.$$

Но тогда этот дифференциал будет, очевидно, так же составлен из дифференциалов отображений f_i, как само отображение f составлено из отображений f_i, т. е. для любого вектора $A\in\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ будет иметь место формула

$$(df)_p A=((df_1)_p A, \ldots, (df_m)_p A).$$

Но если, как и выше, $p\in W_{i_0}$ (и, значит, в точке p отображение f_{i_0} является погружением), то для любого отличного от нуля вектора $A\in\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ вектор $(df_{i_0})_p A\in\mathbb{R}^{n+1}$ отличен от нуля. Поэтому отличен от нуля и вектор

$(df)_p A \in \mathbb{R}^N$. Это означает, что *отображение* f *является погружением* (в любой точке $p \in \mathscr{X}$).

Итак, отображение f представляет собой погружение, являющееся монеоморфизмом. Следовательно, его образ $f\mathscr{X}$ является вложенным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$, диффеоморфным многообразию $\mathscr{X}$. □

Чтобы доказать теорему вложения Уитни (для компактных многообразий), нам осталось теперь доказать лишь предложение 1. Для этого мы должны начать сравнительно издалека.

Выше мы уже заметили, что любое компактное многообразие (которое покрывается конечным семейством координатных окрестностей) удовлетворяет второй аксиоме счетности. Более общим образом *второй аксиоме счетности удовлетворяет любое многообразие, покрываемое счетной системой координатных окрестностей.* Действительно, будучи гомеоморфной открытому множеству пространства $\mathbb{R}^n$, каждая координатная окрестность удовлетворяет второй аксиоме счетности, а с другой стороны, ясно, что любое пространство, обладающее счетным покрытием, все элементы которого удовлетворяют (в индуцированной топологии) второй аксиоме счетности, само удовлетворяет этой аксиоме. □

Обратно, легко видеть, что *в любом гладком многообразии* $\mathscr{X}$, *удовлетворяющем второй аксиоме счетности, существует счетная база, состоящая из координатных окрестностей.* Действительно, пусть $\{O_\alpha\}$ — произвольная счетная база многообразия $\mathscr{X}$. Тогда для любой точки $p \in \mathscr{X}$ и любой координатной окрестности U, содержащей точку p в базе $\{O_\alpha\}$, существует такой элемент $O_{\alpha(p,\,U)}$, что $p \in O_{\alpha(p,\,U)} \subset U$. Пусть O — произвольное открытое подмножество многообразия $\mathscr{X}$. Выбрав для любой точки $p \in O$ такую координатную окрестность U_p, что $p \in U_p \subset O$, рассмотрим множества

$$O_p = O_{\alpha(p,\,U_p)}.$$

Так как $p \in O_p \subset U_p \subset O$ и p пробегает все точки из O, то $\bigcup\limits_p O_p = O$.

Следовательно, все множества вида $O_{\alpha(p,\,U)}$ (являющиеся в силу включения $O_{\alpha(p,\,U)} \subset U$ координатными окрестностями) составляют базу многообразия $\mathscr{X}$. Для завершения доказательства остается заметить, что эта база является частью счетной базы $\{O_\alpha\}$ и потому сама счетна. □

Из анализа известно, что многие ситуации существенно упрощаются, когда мы ограничиваемся точками «общего положения» и позволяем себе пренебрегать «достаточно малыми» множествами. Существует по крайней мере два различных подхода к определению «достаточно малых» множеств гладких многообразий: «топологический» и «метрический».

Первый подход основывается на следующем общем определении:

Определение 2. Подмножество топологического пространства $\mathscr{X}$ называется *разреженным* (или *нигде не плотным*), если его замыкание не имеет внутренних точек.

Подмножество, являющееся объединением конечного или счетного числа разреженных множеств, называется *тощим*.

Замечание 2. Термин «тощее множество» введен Бурбаки. Ранее тощие множества назывались «множествами первой категории». Это название по многим причинам очень неудачно, и им пользоваться не следует.

Вообще говоря, тощее множество может быть довольно «массивным»; например, оно может совпадать со всем пространством $\mathscr{X}$ (примером служит поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел и вообще любое счетное топологическое пространство, не имеющее изолированных точек).

Определение 3. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *бэровским пространством*, если любое его тощее подмножество не имеет внутренних точек.

Таким образом, в бэровском пространстве тощие множества действительно «тощие».

Однако, являются ли гладкие многообразия бэровскими пространствами? Оказывается, что ответ утвердительный (по крайней мере для хаусдорфовых многообразий), но доказательство соответствующей теоремы требует определенных приготовлений, на что у нас нет времени. Поэтому мы предпочтем другой — «метрический» подход, а доказательство бэровости хаусдорфовых многообразий представим в серии задач.

Определение 4. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *регулярным*, если для любого открытого множества $U \subset \mathscr{X}$ и любой точки $p \in U$ существует такое открытое множество V, что $p \in V$ и $\overline{V} \subset U$.

Определение 5. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *локально компактным*, если каждая его точка p обладает окрестностью O, замыкание $\overline{O}$ которой компактно.

Задача 1. Докажите, что *хаусдорфово локально компактное пространство $\mathscr{X}$ регулярно.* [Указание. Согласно предложению 3 лекции 9 компактное подпространство $\overline{O\cap U}$ нормально. Поэтому в $\overline{O\cap U}$ существует такая окрестность V точки p, что $\overline{V}\subset O\cap U$.]

Задача 2. Пусть $\{A_n,\ n\geqslant 1\}$ — семейство разреженных подмножеств локально компактного хаусдорфова (и, следовательно, регулярного) пространства $\mathscr{X}$, и пусть U — произвольная окрестность некоторой точки $p\in\mathscr{X}$. Покажите, что существует такая последовательность непустых открытых множеств U_n, $n\geqslant 0$, что:

а) множество $\overline{U}_0$ компактно и содержится в U;

б) для любого $n\geqslant 1$ имеют место соотношения

$$\overline{U}_n\subset U_{n-1},\quad U_n\cap A_n=\varnothing.$$

[Указание. Так как множество A разрежено, то в открытом множестве U_{n-1} существует такое непустое открытое множество V_n, что $V_n\cap A_{n-1}=\varnothing$, а так как пространство $\mathscr{X}$ регулярно, то существует такое непустое открытое множество U_n, что $\overline{U}_n\subset V_n$.]

Задача 3. Выведите отсюда, что *окрестность U содержит точку, не принадлежащую объединению A множеств A_n*. [Указание. Последовательность $\{\overline{U}_n\}$ является центрированным семейством замкнутых множеств компактного пространства $\overline{U}_0$, и потому пересечение всех множеств $\overline{U}_n$ не пусто.]

Утверждение задачи 3 в точности означает, что *любое хаусдорфово локально компактное пространство является бэровским пространством.* Следовательно, поскольку любое хаусдорфово многообразие, очевидно, локально компактно, бэровским пространством будет и каждое хаусдорфово многообразие.

Напомним, что подмножество A евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ называется *множеством меры нуль* (или, короче, *нуль-множеством*), если для любого $\varepsilon>0$ существует такое конечное или счетное семейство открытых шаров пространства $\mathbb{R}^n$, покрывающих A, что сумма их (n-мерных!) объемов меньше ε.

В этом определении шары можно заменить параллелепипедами (или даже кубами) со сторонами, параллельными осям координат, т. е. подмножествами пространства $\mathbb{R}^n$, точки $x=(x^1, \ldots, x^n)$ которых характеризуются неравенствами вида

$$a^i < x^i < b^i, \quad i=1, \ldots, n.$$

Нам понадобятся следующие три свойства нуль-множеств, известных из курса анализа:

1° *Объединение* $A = \bigcup\limits_i A_i$ *конечного или счетного семейства* $\{A_i\}$ *нуль-множеств является нуль-множеством.*

2° *Для любого гладкого отображения* $f\colon U \longrightarrow V$, *где* U *и* V — *открытые подмножества пространства* $\mathbb{R}^n$, *и любого нуль-множества* $A \subset U$ *множество* fA *является нуль-множеством.*

3° *Никакое нуль-множество не имеет внутренних точек.*

Для доказательства свойства 1° достаточно заметить, что, покрыв для каждого $i \geqslant 1$ множество A_i шарами, сумма объемов которых меньше $\varepsilon/2^i$, мы получим покрытие множества A шарами, сумма объемов которых меньше ε.

Для доказательства свойства 2° мы в первую очередь заметим, что в силу свойства 1° его достаточио доказать лишь в дополнительном предположении, что существует такой замкнутый куб $Q \subset U$, что A содержится в его внутреиности $\mathring{Q}$. С другой стороны, из формулы Лагранжа, примененной к функциям $f^1, \ldots, f^n$, задающим отображение f, непосредственно следует, что для любых двух точек x, $y \in Q$ имеет место формула

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M \cdot |x-y|,$$

где M — некоторая константа (максимум абсолютных величин первых производных функций $f^1, \ldots, f^n$ в кубе Q). Поэтому любой шар радиуса r, содержащийся в кубе Q, отображение f переводит в множество, содержащееся в шаре радиуса Mr и, значит, имеющее объем больший не более чем в M^n раз . Следовательно, покрыв множество A шарами общего объема $< \varepsilon/M^n$, мы получим покрытие множества fA шарами общего объема $< \varepsilon$.

Для доказательства свойства 3° достаточно установить, что если конечное семейство $\{Q_1, \ldots, Q_m\}$ кубов пространства $\mathbb{R}^n$ со сторонами, параллельиыми осям координат, покрывает куб Q, то сумма объемов кубов $Q_1, \ldots, Q_m$ не меньше объема куба Q (и, значит, ограиичена снизу положительной константой, ие зависящей от покрытия). Пусть $a_1, \ldots, a_m$ и a — длины сторои кубов $Q_1, \ldots, Q_m$ и Q, а $N_1, \ldots, N_m$ и N — число точек простраиства $\mathbb{R}^n$ с целыми координатами, содержащимися в кубах $Q_1, \ldots, Q_m$ и Q соответственно, Так как кубы $Q_1, \ldots, Q_m$ покрывают куб Q, то

$$N < N_1 + \ldots + N_m.$$

С другой стороны, ясно, что

$$[(a-1)^+]^n \leqslant N \leqslant (a+1)^n,$$

и аналогично

$$[(a_k-1)^+]^n \leqslant N_k \leqslant (a_k+1)^n$$

для любого $k=1, \ldots, m$, где

$$x^+ = \max(x, 0).$$

Поэтому

$$[(a-1)^+]^n \leqslant \sum_{k=1}^{m} (a_k+1)^n.$$

Применив это неравенство к гомотетичным кубам $\lambda Q_1, \ldots, \lambda Q_m$ и λQ, где $\lambda > 0$, мы при достаточно большом λ получим неравенство

$$(\lambda a-1)^n \leqslant \sum_{k=1}^{m} (\lambda a_k+1)^n.$$

Следовательно,

$$\left(a-\frac{1}{\lambda}\right)^n \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left(a_k+\frac{1}{\lambda}\right)^n,$$

откуда при $\lambda \longrightarrow +\infty$ вытекает требуемое неравенство для объемов

$$a^n \leqslant \sum_{k=1}^{m} a_k^n.$$

Удивительно, что столь наглядный факт требует столь изощренного доказательства!

Нам понадобится также еще одно, более глубокое свойство нуль-множеств.

Для любого подмножества $A \subset \mathbb{R}^n$ его *срезом по* $x^n = t$ мы будем называть подмножество A_t пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, состоящее из таких точек $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, что точка $(\boldsymbol{x}, t) = (x^1, \ldots, x^{n-1}, t)$ принадлежит A.

Теорема Фубини. *Пусть C — такое компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, что для любого $t \in \mathbb{R}$ его срез C_t по $x_n = t$ является нуль-множеством (пространства $\mathbb{R}^{n-1}$). Тогда само множество C также является нуль-множеством.*

Хотя эта теорема безусловно известна из курса анализа, мы — для полноты изложения — все же приведем здесь ее полное доказательство.

Покрытие отрезка $[0, 1]$ открытыми интервалами мы назовем *допустимым*, если объединение этих интервалов содержится в интервале $(-1, 2)$.

Лемма 1. *Из любого допустимого покрытия отрезка* $[0, 1]$ *открытыми интервалами можно выбрать конечное подпокрытие, сумма длин элементов которого не превосходит шести.*

Доказательство. Покажем, что любое минимальное подпокрытие (т. е. подпокрытие, из которого ни один элемент нельзя выбросить) обладает требуемым свойством.

Пусть (a_i, b_i), $1 \leqslant i \leqslant m$, — интервалы, составляющие данное минимальное подпокрытие. Легко видеть, что $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$ (действительно, если $a_i = a_j$, то при $b_i \leqslant b_j$ лишним является интервал (a_i, b_i), а при $b_i \geqslant b_j$ — интервал (a_j, b_j)). Поэтому, перенумеровав — если нужно — интервалы, мы можем считать, что $a_i < a_j$ при $i < j$ (и, значит, в силу минимальности $b_i < b_j$). Но тогда $a_i < a_{i+1} < b_i \leqslant a_{i+2}$ для любого $i = 1, \ldots, m-2$, потому что при $a_{i+1} \geqslant b_i$ в покрытии были бы дырки, а при $b_i \geqslant a_{i+2}$ ввиду неравенств $b_i < b_{i+1} < b_{i+2}$ интервал (a_{i+1}, b_{i+1}) содержался бы в объединении интервалов (a_i, b_i) и (a_{i+2}, b_{i+2}) и, значит, был бы лишним. Следовательно, для суммы длин интервалов рассматриваемого подпокрытия имеет место оценка

$$
\begin{aligned}
&(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + (b_3 - a_3) + \ldots + (b_{m-2} - a_{m-2}) + \\
&\quad + (b_{m-1} - a_{m-1}) + (b_m - a_m) \leqslant (a_3 - a_1) + (a_4 - a_2) + \\
&\quad + (a_5 - a_3) + \ldots + (a_m - a_{m-2}) + (b_{m-1} - a_{m-1}) + (b_m - a_m) = \\
&\qquad = b_{m-1} + b_m - a_1 - a_2 < 2(b_m - a_1) \leqslant 6
\end{aligned}
$$

(ибо ввиду допустимости $-1 \leqslant a_1$ и $b_m \leqslant 2$). $\square$

Доказательство теоремы Фубини. Без ограничения общности мы можем, очевидно, считать, что множество C лежит в полосе $0 \leqslant x_n \leqslant 1$. По условию для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t \in [0, 1]$ в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ существуют открытые кубы $Q_t^{(i)}$, покрывающие срез C_t, общий объем которых меньше $\varepsilon/6$. Пусть Q_t — их объединение (содержащее срез C_t), и пусть Q_t^* — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее из всех точек вида (x, t), где $x \in Q_t$ и $0 < t < 1$ (т. е. $Q_t^* = Q_t \times (0, 1)$). Так как замкнутое подмножество компактного пространства компактно, то множество $C \setminus Q_t^*$ компактно. С другой стороны, функция $f(x, x^n) = |x_n - t|$, $(x, x_n) \in \mathbb{R}^n$, на множестве $C \setminus Q_t^*$ непрерывна и положительна. Поэтому существует такое число $\alpha > 0$, что

$$
(4) \qquad |x_n - t| > \alpha \text{ для любой точки } (x, x_n) \in C \setminus Q_t^*.
$$

При этом без ограничения общности мы можем, конечно, считать, что $\alpha < 1$, т. е. что покрытие отрезка $[0, 1]$ интервалами $I_t = (t - \alpha, t + \alpha)$ допустимо.

Согласно лемме 1 из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\{I_{t_1}, \ldots, I_{t_m}\}$, состоящее из интервалов, сумма $2\alpha m$ длин которых меньше шести.

Пусть L_{ij} — параллелепипед пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из таких точек (x, τ), $x \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\tau \in \mathbb{R}$, что $x \in Q_{t_j}^{(i)}$ и $\tau \in I_{t_j}$ $\left(\text{т. е. } L_{ij} = Q_{t_j}^{(i)} \times I_{t_j}\right)$. Из формулы (4) непосредственно следует, что параллелепипеды L_{ij} покрывают множество C. (Действительно, пусть $(x, x_n) \in C$. Существует такое j, что $x_n \in I_{t_j}$, т. е. такое, что $|x_n - t_j| < \alpha$. Поэтому, согласно формуле (4), $(x, x_n) \in Q_{t_j}^*$ и, значит, $x \in Q_{t_j}^{(i)}$ для некоторого i. Следовательно, $(x, x_n) \in L_{ij}$.) С другой стороны, n-мерный объем параллелепипеда L_{ij} равен, очевидно, $(n-1)$-мерному объему куба $Q_{t_j}^{(i)}$, умноженному на длину 2α интервала I_{t_j}. Поэтому общий объем всех параллелепипедов L_{ij} не превосходит $m \cdot \frac{\varepsilon}{6} \cdot 2\alpha < \varepsilon$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ множество C допускает покрытие параллелепипедами общего объема $< \varepsilon$. Следовательно, это множество имеет меру нуль. □

Для гладких многообразий нуль-подмножества определяются естественным образом.

Определение 6. Подмножество A гладкого n-мерного многообразия $\mathscr{X}$ называется *нуль-множеством*, если в многообразии $\mathscr{X}$ существует такое конечное или счетное семейство карт (U_i, h_i), что $A \subset \bigcup_i U_i$ и каждое из множеств $h_i(U_i \cap A)$ является нуль-множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Ясно, что *свойства* 1° и 2° *нуль-множеств в* $\mathbb{R}^n$ *сохраняются и для нуль-множеств в произвольном гладком многообразии* (конечно, в свойстве 2° под U и V следует теперь понимать любые гладкие многообразия одной и той же размерности). В частности, отсюда следует, что *для любого нуль-множества A и любой карты (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ множество $h(U \cap A)$ является нуль-множеством в* $\mathbb{R}^n$, а если многообразие удовлетворяет второй аксиоме счетности, то и обратно, *подмножество $A \subset \mathscr{X}$ будет нуль-множеством, если множество $h(U \cap A)$ является нуль-множеством в $\mathbb{R}^n$ для любой карты (U, h) многообразия $\mathscr{X}$* (или хотя бы для любой карты произвольного счетного семейства карт, носители которых составляют базу многообразия $\mathscr{X}$).

Полезно сравнить нуль-множества с тощими. Вообще говоря, эти два класса множеств никак друг с другом не связаны: существуют тощие множества, не являющиеся нуль-множествами (и даже имеющие полную меру, т. е. такие, что дополнение к ним является нуль-множеством), и не тощие нуль-множества (и даже нуль-множества, имеющие тощее дополнение).

Пусть, например, U_i, $1 \leqslant i < \infty$,— объединение счетной системы интервалов на прямой $\mathbb{R}$, центрами которых являются всевозможные рациональные точки, а сумма длин равна 2^{-i}. Тогда множество $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ является нуль-множеством, а так как для любого i множество $\mathbb{R} \setminus U_i$ нигде не плотно (оно замкнуто и не имеет внутренних точек), то дополнение $\mathbb{R} \setminus A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus U_i)$ множества A является тощим множеством.

Однако поскольку нуль-множества (в $\mathbb{R}^n$, а значит, и в любом $\mathscr{X}$) не имеют внутренних точек, то *любое замкнутое нуль-множество нигде не плотно*. Поэтому каждое нуль-множество, представимое в виде объединения конечного или счетного числа замкнутых множеств (необходимо являющихся нуль-множествами), является тощим множеством. Такие множества общепринятого названия не имеют. За отсутствием лучшего термина мы будем называть их *нуль-тощими множествами*.