Лекция 15

Теорема Сарда.— Аналитическая часть доказательства теоремы Сарда.— Прямое произведение многообразий.— Многообразие касательных векторов.— Доказательство теоремы вложения Уитни.

Пусть $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — гладкое отображение n-мерного гладкого многообразия $\mathscr{X}$ в m-мерное гладкое многообразие $\mathscr{Y}$.

Определение 1. Точка $p \in \mathscr{X}$ называется *критической точкой* отображения f, если

$$df_p(\mathbf{T}_p\mathscr{X}) \neq \mathbf{T}_q\mathscr{Y}, \qquad q = f(p),$$

т. е. если отображение

$$df_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_q\mathscr{Y}$$

не эпиморфно (отображение f не является в точке p субмерсией). Точка $q \in \mathscr{Y}$ называется *критическим значением* отображения f, если существует такая критическая точка $p \in \mathscr{X}$, что $q = f(p)$.

Сравнив это определение с определением 4 лекции 13, мы немедленно получим, что *критические значения — это в точности нерегулярные значения отображения* f.

Заметим, что *при $n < m$ любая точка многообразия $\mathscr{X}$ является критической точкой отображения f.* Поэтому в этом случае критические значения — это точки множества $f\mathscr{X}$, а регулярные значения — точки его дополнения $\mathscr{Y} \setminus f\mathscr{X}$. (Таким образом, *при $n < m$ прообраз любого регулярного значения пуст.*)

Теперь мы можем сформулировать основную теорему этой лекции:

Теорема 1. *Если многообразие $\mathscr{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, то для любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ множество $C(f)$ его критических значений является нуль-множеством, а в случае, когда многообразие $\mathscr{Y}$ хаусдорфово,— даже нуль-тощим множеством.*

Если же многообразие $\mathscr{X}$ компактно (а многообразие $\mathscr{Y}$ хаусдорфово), то множество $C(f)$ замкнуто и нигде не плотно.

Эта теорема обычно называется т е о р е м о й С а р д а, хотя еще до Сарда она была доказана Брауном и независимо от Сарда — Дубовицким.

Следствие. *Если* $\dim \mathscr{X} < \dim \mathscr{Y}$, *то каждое гладкое отображение* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *заведомо не надъективно (множество* $\mathscr{Y} \setminus f\mathscr{X}$ *не пусто.)* $\square$

Только это следствие нам понадобится для доказательства теоремы Уитни о вложении.

Подчеркнем, что в теореме 1 имеются в виду гладкие многообразия класса C^∞ (или C^ω). Впрочем, просмотрев ее приводимое ниже доказательство, можно убедиться, что оно сохраняется и для многообразий класса C^r, где $r \geqslant n-m+2$ при $n \geqslant m$ и $r \geqslant 2$ при $n \leqslant m$. [Более того, за счет некоторых технических ухищрений это r можно уменьшить еще на единицу. При этом, как показывают соответствующие примеры, еще больше уменьшить r, вообще говоря, нельзя.]

Мы выведем теорему Сарда из следующего предложения:

Предложение 1. *Пусть* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — *гладкое отображение открытого множества* $U \subset \mathbb{R}^n$ *в пространство* $\mathbb{R}^m$, *и пусть* K — *произвольное компактное подмножество множества критических точек отображения* f. *Тогда множество* fK *является нуль-множеством.*

Заметим, что так как пространство $\mathbb{R}^n$ хаусдорфово, то множество fK замкнуто и, значит, нигде не плотно. С другой стороны, множество критических точек отображения f, очевидно, замкнуто и потому является объединением счетного семейства компактных подмножеств. Следовательно, множество $C(f)$ критических точек отображения f является нуль-тощим множеством.

Мы, видим, таким образом, что в частном случае $\mathscr{X} = U$, $\mathscr{Y} = \mathbb{R}^m$ теорема Сарда является непосредственным следствием предложения 1. Оказывается, что и в общем случае она легко сводится к этому предложению.

Действительно, для любого открытого подмножества O многообразия $\mathscr{X}$ содержащиеся в O критические точки отображения f являются, очевидно, не чем иным, как критическими точками его ограничения $f|_O$ на O. Поэтому для любой счетной базы $\{U_\alpha\}$ многообразия $\mathscr{X}$

$$C(f) = \bigcup_\alpha C(f|_{U_\alpha}).$$

При этом, если каждое U_α является носителем некоторой карты (U_α, h_α) (чего, как мы знаем, всегда можно добиться) и если $f(U_\alpha) \subset V_\alpha$, где (V_α, k_α) — карта многообразия $\mathscr{Y}$, то $C(f|_{U_\alpha})$ является образом при диффеоморфизме k_α^{-1} множества $C(g_\alpha)$, где $g_\alpha = k_\alpha \circ (f|U_\alpha) \circ \circ h_\alpha^{-1}: U_\alpha \to \mathbb{R}^m$.

Поэтому по тем же соображениям, что и выше, каждое множество

$$C(f|U_\alpha) = k_\alpha^{-1}C(g_\alpha)$$

является объединением счетного семейства компактных нуль-множеств вида fK, где K — некоторое компактное множество, состоящее из критических точек отображения f.

Следовательно, объединением счетного семейства таких множеств будет и все множество $C(f)$. Поскольку объединение счетного семейства нуль-множеств представляет собой нуль-множество, этим доказано, что множество $C(f)$ является нуль-множеством.

Если многообразие $\mathcal{Y}$ хаусдорфово, то все множества fK замкнуты и, значит, множество $C(f)$ является нуль-тощим множеством.

Наконец, если, кроме того, многообразие $\mathcal{X}$ компактно, то множество всех критических точек отображения f можно разложить в объединение $K_1 \cup \ldots \cup K_N$ конечного числа компактных множеств, каждое из которых содержится в одной из координатных окрестностей U_α. Поэтому в этом случае $C(f) = fK_1 \cup \ldots \cup fK_N$, где ввиду хаусдорфовости многообразия $\mathcal{Y}$ все множества fK_i замкнуты и потому нигде не плотны. Следовательно, множество $C(f)$ также замкнуто и нигде не плотно. □

Таким образом, нам осталось лишь доказать предложение 1.

Прежде всего заметим, что *предложение* 1 *тривиальным образом доказывается при* $n < m$. Действительно, в этом случае, считая, что $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, мы можем ввести в рассмотрение открытое множество $U \times \mathbb{R}^{m-n}$ пространства $\mathbb{R}^m$ и его гладкое отображение

$$F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m,$$

являющееся композицией проекции на первый множитель $U \times \mathbb{R}^{m-n} \to U$ и отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^m$. При этом для компактного множества $K \subset U$ будет иметь место равенство

$$f(K) = F(K \times \mathbf{0}),$$

где $K \times \mathbf{0}$ — подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, состоящее из точек вида $(x, \mathbf{0})$, где $x \in K$, а $\mathbf{0}$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^{m-n}$. С другой стороны, ясно, что множество $K \times 0$ является нуль-множеством пространства $\mathbb{R}^m$ (поскольку его можно покрыть конечной системой параллелепипедов сколь угодно малой высоты). Поэтому, согласно свойству 2° нуль-множеств из лекции 14, множество $F(K \times 0)$ также является нуль-множеством. $\square$

Это доказывает теорему Сарда при $n < m$, а значит, и сформулированное выше ее следствие (которое — напомним — нам только и нужно для доказательства теоремы Уитни).

Перейдем теперь к доказательству предложения 1 в полной общности. Хотя это предложение относится, собственно говоря, к анализу, мы его здесь все же аккуратно докажем, несмотря на определенную громоздкость и утомительность доказательства. (Читатель, интересующийся лишь теоремой Уитни, может его пока пропустить.)

Пусть отображение $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ задается функциями $f^1, \ldots, f^m\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, и пусть C_k, где $k \geqslant 1$, — множество всех точек из U, в которых равны нулю все частные производные функций $f^1, \ldots, f^m$ порядков $\leqslant k$. Ясно, что

$$C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_k \supset \ldots,$$

где C_0 — множество всех критических точек отображения f $\left(\text{т. е. точек, в которых ранг матрицы } \left\| \dfrac{\partial f^j}{\partial x^i} \right\| \text{ меньше } m\right)$.

Лемма 1. *Если $C_{s+1} = \varnothing$ или $s > \dfrac{n}{m} - 1$, то для любого компактного множества $K \subset C_s$ множество fK_s имеет меру нуль.*

Из этой леммы предложение 1 выводится посредством несложной индукции.

Действительно, существует такое s, что множество $f(K \cap C_s)$ имеет меру нуль $\left(\text{согласно лемме годится любое } s > \dfrac{n}{m} - 1\right)$. С другой стороны, $K \cap C_0 = K$. Поэтому для доказательства предложения 1 достаточно установить, что *если для некоторого $s \geqslant 1$ множество $f(K \cap C_s)$ имеет меру нуль, то множество $f(K \cap C_{s-1})$ также имеет меру нуль.*

Пусть K_r, $r \geqslant 1$, — подмножество множества $K \cap C_{s-1}$, состоящее из таких точек $x \in K \cap C_{s-1}$, что $|x - y| \geqslant 1/r$ для любой точки $y \in K \cap C_s$. Являясь замкнутым подмножеством компактного множества K, множество K_s компактно.

Ясно, что

$$K \cap C_{s-1} = (K \cap C_s) \cup \bigcup_{r=1}^{\infty} K_r.$$

Поэтому нам нужно лишь доказать, что *для любого $r \geqslant 1$ множество fK_r имеет меру нуль.*

Рассмотрим с этой целью открытое множество $U^* = U \setminus C_s$. Пусть $f^* = f|_{U^*}$, и пусть C_k^* — множества C_k, построенные для функции f^*. Ясно, что $C_k^* = C_k \setminus C_s$ и, значит, $C_s^* = \varnothing$ и $K_r \subset C_{s-1}^*$. Поэтому к отображению f^* и компактному множеству K_r применима лемма 1. Следовательно, множество fK_r действительно имеет меру нуль. □

Таким образом, нам осталось лишь доказать лемму 1.

Доказательство леммы 1. Эта лемма состоит из двух утверждений с разными посылками, но с одним и тем же заключением. Мы рассмотрим сначала первое утверждение (с посылкой $C_{s+1} = \varnothing$). Поскольку множество K компактно, для доказательства этого утверждения достаточно для любой точки $x_0 \in K$ найти такую же окрестность $V \subset U$, что множество $f(K \cap U)$ имеет меру нуль. С этой целью мы найдем такую окрестность V точки x_0, что ее замыкание $\overline{V}$ компактно, а множество $f(C_s \cap \overline{V})$ имеет меру нуль. Тогда множество $f(K \cap V) \subset f(C_s \cap \overline{V})$ будет также иметь меру нуль.

Проведем индукцию по n. Поскольку при $n = 0$ утверждение очевидным образом верно, нам нужно лишь доказать, что если оно верно при $n-1$, то верно и при n.

Ввиду условия $C_{s+1} = \varnothing$ существует производная порядка $s+1$ одной из функций $f^1, \ldots, f^m$, отличная от нуля в точке x_0. Переставив — если нужно — координаты, мы без ограничения общности можем считать, что эта производная имеет вид $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$, где φ — некоторая производная порядка s.

Пусть g — отображение $U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, определенное формулой

$$g(\boldsymbol{x}, x_n) = (\boldsymbol{x}, \varphi(\boldsymbol{x}, x_n)), \qquad (\boldsymbol{x}, x_n) \in U.$$

Якобиан этого отображения равен $\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}$ и потому в точке x_0 отличен от нуля. Следовательно, существует такая окрестность O' точки x_0, что отображение g является диффеоморфизмом этой окрестности на некоторое открытое множество O, и потому определено отображение

$$h\colon O \xrightarrow{(g|_{O'})^{-1}} O' \xrightarrow{f|_{O'}} \mathbb{R}^m.$$

Пусть V — такая окрестность точки x_0, что $\overline{V}$ содержится в O' и компактно. Покажем, что *множество $f(C_s \cap \overline{V})$ имеет меру нуль.*

Здесь следует отдельно рассмотреть два случая: $s = 0$ и $s > 0$. Мы сначала займемся случаем $s > 0$ как более простым.

При $s > 0$ функция φ, являясь производной порядка s одной из функций $f^1, \ldots, f^m$, равна нулю на C_s. Следовательно, множество

$g(C_s)$ лежит в подпространстве $\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$, определяемом уравнением $x_n=0$, и потому

$$f(C_s\cap\overline{V})=h_0(g(C_s\cap\overline{V})),$$

где h_0 — ограничение отображения h на $(\mathbb{R}^{n-1}\times\{0\})\cap O$. Это, очевидно, все и доказывает, так как отображение h_0 фактически является отображением открытого множества пространства $\mathbb{R}^{n-1}$, и потому, по предположению индукции (примененному к отображению h_0 и компактному множеству $g(C_s\cap\overline{V})$), множество $h_0(g(C_s\cap\overline{V}))$ имеет меру нуль.

При $s=0$ роль производной φ играет одна из функций $f^1, \ldots$ $\ldots, f^m$ (вообще говоря, отличная от нуля на множестве C_0). Переставив — если нужно — координаты в $\mathbb{R}^m$, мы без ограничения общности можем считать, что $\varphi=f^m$.

Пусть O_t — срез по $x_n=t$ множества O (множество всех точек $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{n-1}$, для которых точка $(\boldsymbol{x}, t)\in\mathbb{R}^n$ принадлежит O).

Если $\boldsymbol{x}\in O_t$ и $g(\boldsymbol{x}, a)=(\boldsymbol{x}, t)$, то по определению $f^m(\boldsymbol{x}, a)=$ $=\varphi(\boldsymbol{x}, a)=t$, и потому

$$h(\boldsymbol{x}, t)=f(\boldsymbol{x}, a)=(f^1(\boldsymbol{x}, a), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{x}, a), t).$$

Это означает, что, положив

$$h_t(\boldsymbol{x})=(f^1(\boldsymbol{x}, a), \ldots, f^{m-1}(\boldsymbol{x}, a)),$$

где $\boldsymbol{x}\in O_t$ и $g(\boldsymbol{x}, a)=(\boldsymbol{x}, t)$ (т. е. $t=f^m(\boldsymbol{x}, a)$), мы получим такое гладкое отображение:

$$h_t\colon O_t\to\mathbb{R}^{m-1},$$

что

$$h(\boldsymbol{x}, t)=(h_t(\boldsymbol{x}), t) \tag{1}$$

для любой точки $(\boldsymbol{x}, t)\in O$.

Из формулы (1) следует, что якобиева матрица J отображения h имеет вид

$$\left\|\begin{array}{ccc:c} & & & * \\ & J_t & & \vdots \\ & & & * \\ \hdashline 0 & \ldots & 0 & 1\end{array}\right\|,$$

где J_t — якобиева матрица отображения h_t.

Поэтому ранг матрицы J в точке $(\boldsymbol{x}, t)$ тогда и только тогда меньше m, когда ранг матрицы J_t в точке $\boldsymbol{x}$ меньше $m-1$. Но по определению ранг матрицы J_t в точке $\boldsymbol{x}\in O_t$ тогда и только тогда меньше $m-1$, когда точка $\boldsymbol{x}$ является критической точкой отображения h_t, и, аналогично, ранг матрицы J в точке $(\boldsymbol{x}, t)\in O$ тогда и только тогда меньше m, когда эта точка является критической точкой отображения h (и, значит, точка $(\boldsymbol{x}, a)=g^{-1}(\boldsymbol{x}, t)\in O'$ — критической точкой отображения f, т. е. принадлежит множеству $C_0\cap O'$).

Следовательно, срез $g(C_0 \cap O')_t$ множества $g(C_0 \cap O')$ является не чем иным, как множеством критических точек отображения h_t. Поэтому, по предположению индукции (примененному к отображению h_t и компактному множеству $g(C_0 \cap O')_t \cap g(\overline{V})_t$)), подмножество

$$h_t(g(C_0 \cap O')_t \cap g(\overline{V})_t)$$

пространства $\mathbb{R}^{n-1}$ является нуль-множеством.

Поскольку это последнее множество является в силу формулы (1) срезом по $x^m = t$ множества

$$h(g(C_0 \cap O') \cap g(\overline{V})) = (h \circ g)(C_0 \cap \overline{V}) = f(C_0 \cap \overline{V}),$$

мы получаем, таким образом, что все срезы $f(C_0 \cap \overline{V})_t$ множества $f(C_0 \cap \overline{V})$ являются нуль-множествами. Но тогда в силу теоремы Фубини нуль-множеством будет и множество $f(C_0 \cap \overline{V})$. Тем самым при $C_{s+1} = \varnothing$ лемма 1 полностью доказана.

Пусть теперь $s > \frac{n}{m} - 1$. Поскольку в силу компактности множество K покрывается конечным числом кубов пространства $\mathbb{R}^n$, достаточно доказать, что для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^n$ множество $f(C_s \cap Q)$ имеет меру нуль.

Пусть a — ребро куба Q, и пусть $k \geqslant 1$. Разбив куб Q плоскостями, параллельными граням, на k^n кубиков с ребрами a/k, рассмотрим один из кубиков Q' этого разбиения, пересекающийся с C_s.

Поскольку все производные порядка $s+1$ функций $f^1, \ldots, f^m$ ограничены в кубе Q, из формулы Тейлора, примененной к этим функциям, немедленно вытекает, что для любых точек $x \in C_s \cap Q$ и $y \in Q$ имеет место неравенство

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M \cdot |y - x|^{s+1},$$

где M — некоторое постоянное число. Поскольку диаметр кубика Q' равен, очевидно, $\frac{a}{k}\sqrt{n}$, отсюда следует, что диаметр его образа fQ' при отображении f не превосходит числа $M\left(\frac{a}{k}\sqrt{n}\right)^{s+1}$, и потому этот образ содержится в кубе пространства $\mathbb{R}^m$ с ребром $2M\left(\frac{a}{k}\sqrt{n}\right)^{s+1}$, имеющем объем

$$\left[2M\left(\frac{a}{k}\sqrt{n}\right)^{s+1}\right]^m = \frac{B}{k^{(s+1)m}},$$

где $B = (2Ma^{s+1}(\sqrt{n})^{s+1})^m$ — константа, не зависящая от k.

Поскольку всех кубов Q' не больше чем k^n, а их объединение содержит множество $C_s \cap Q$, отсюда следует, что множество $f(C_s \cap Q)$ содержится в объединении кубов, общий объем которых не превосходит числа

$$\frac{B}{k^{(s+1)m}}k^n=\frac{B}{k^{(s+1)m-n}},$$

и, следовательно, при $k\longrightarrow\infty$ стремится к иулю (напомиим, что по условию $(s+1)m-n>0$).

Таким образом, множество $f(C_s\cap Q)$ может быть покрыто (даже коиечиым!) семейством кубов, сумма объемов которых сколь угодно мала. Следовательио, это множество имеет меру нуль.

Тем самым лемма 1 — а вместе с ней и теорема Сарда — полностью доказана. □

Теорема Сарда (или, точнее, ее следствие) является ключом к доказательству предложения 1 предыдущей лекции (и вместе с ним теоремы Уитни), но чтобы применить этот ключ, нам нужны еще некоторые простые, но интересные и сами по себе конструкции.

Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два многообразия (размерностей соответственно n и m), и пусть $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ — множество всех пар (p, q), где $p\in\mathscr{X}$, $q\in\mathscr{Y}$. Для любых множеств $U\subset\mathscr{X}$ и $V\subset\mathscr{Y}$ множество $U\times V$ является подмножеством множества $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, и для любых отображений $h\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n$ и $k\colon V\longrightarrow\mathbb{R}^m$ формула

$$(h\times k)(p, q)=(h(p), k(q))$$

определяет некоторое отображение

$$h\times k\colon U\times V\longrightarrow\mathbb{R}^{n+m}$$

(мы отождествляем здесь $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ с $\mathbb{R}^{n+m}$). При этом, если отображения h и k инъективны, то отображение $h\times k$ также инъективно, а если множества $h(U)$ и $k(V)$ открыты (в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно), то множество

$$(h\times k)(U\times V)=h(U)\times k(V)$$

открыто в $\mathbb{R}^{n+m}$. Это означает, что если (U, h) и (V, k) — карты, то $(U\times V, h\times k)$ — также карта. Более того, легко видеть, что *если карта (U, h) согласована с картой (U', h'), а карта (V, k) — с картой (V', k'), то карта $(U\times V, h\times k)$ согласована с картой $(U'\times V', h'\times k')$.* Действительно, ясно, что

$$(U\times V)\cap(U'\times V')=(U\cap U')\times(V\cap V')$$

и аналогично

$$(h(U)\times k(V))\cap(h'(U')\times k'(V'))=$$
$$=(h(U)\cap h'(U'))\times(k(V)\cap k'(V'))$$

(мы условно считаем, что $A\times B=\varnothing$, если $A=\varnothing$ или $B=\varnothing$). При этом

$$(h\times k|_{(U\times V)\cap(U'\times V')})\circ(h'\times k'|_{(U\times V)\cap(U'\times V')})^{-1}=$$
$$=[(h|_{U\cap U'})\circ(h'|_{U\cap U'})^{-1}]\times[(k|_{V\cap V'})\circ(k'|_{V\cap V'})^{-1}],$$

и для завершения доказательства остается заметить, что для любых диффеоморфизмов $\varphi\colon W\to W_1$ и $\varphi'\colon W'\to W_1'$ открытых множеств пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ отображение

$$\varphi\times\varphi'\colon W\times W'\to W_1\times W_1'$$

также является диффеоморфизмом открытых множеств (пространства $\mathbb{R}^{n+m}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$). □

Таким образом, карты $(U\times V,\ h\times k)$, построенные для всевозможных карт $(U,\ k)$ и $(V,\ k)$ многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, составляют атлас на $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$.

Определение 2. Соответствующая гладкость на $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ называется ***прямым произведением*** гладкостей многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, а множество $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$, снабженное этой гладкостью, называется *прямым произведением* многообразий $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$. Его размерность равна сумме размерностей сомножителей:

$$\dim(\mathscr{X}\times\mathscr{Y})=\dim\mathscr{X}+\dim\mathscr{Y}.$$

Топология многообразия $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ является, очевидно, прямым произведением топологий многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ (см. лекцию 5).

Замечание 1. Для произвольной группы $\mathscr{G}$ определено отображение

$$\mathscr{G}\times\mathscr{G}\to\mathscr{G},\quad (a,\ b)\mapsto ab,\quad a,\ b\in\mathscr{G}. \tag{2}$$

Группа $\mathscr{G}$, являющаяся гладким многообразием, для которой отображение (2) гладко, называется *группой Ли* (употребляется также термин *гладкая группа*). Для любой матричной группы Ли $\mathscr{G}$ (см. определение 1 лекции 6) построенная в предложении 1 лекции 6 гладкость обладает тем свойством (проверьте!), что по отношению к этой гладкости группа $\mathscr{G}$ является группой Ли. Это оправдывает нашу терминологию.

Замечание 2. В следующем семестре мы докажем, что если подгруппа $\mathscr{G}$ группы $\mathrm{GL}(n,\ \mathbb{R})$ является вложенным подмногообразием (и, следовательно, группой Ли), то она будет матричной группой Ли в смысле определения 1 лекции 6. Это показывает, что определение 1 лекции 6 не является, как это может показаться, определением *ad hoc* и вводит вполне естественное понятие.

При $\mathscr{X}=\mathscr{Y}$ возникает многообразие $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$, которое называется *квадратом* многообразия $\mathscr{X}$. Подмножество Δ этого многообразия, состоящее из точек вида (p, p), $p\in\mathscr{X}$, называется его *диагональю.*

Легко видеть, что *многообразие $\mathscr{X}$ (или более общо — топологическое пространство $\mathscr{X}$) тогда и только тогда хаусдорфово, когда диагональ Δ замкнута в $\mathscr{X}\times\mathscr{X}$.* Действительно, условие, что различные точки p и q имеют непересекающиеся окрестности U и V, в точности означает, что окрестность $U\times V$ точки $(p, q)\in\mathscr{X}\times\mathscr{X}$ не пересекается с Δ. □

Поэтому для любого хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ определено многообразие $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\setminus\Delta$, называемое *взрезанным квадратом.* Размерность этого многообразия равна $2n$, где n — размерность многообразия $\mathscr{X}$.

Другая нужная нам конструкция сопоставляет произвольному n-мерному многообразию $\mathscr{X}$ некоторое новое $2n$-мерное многообразие $\mathbf{T}\mathscr{X}$.

Пусть

$$\mathbf{T}\mathscr{X}=\bigsqcup_{p\in\mathscr{X}}\mathbf{T}_p\mathscr{X}$$

— дизъюнктное объединение всех подпространств $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, $p\in\mathscr{X}$. [Таким образом, точками множества $\mathbf{T}\mathscr{X}$ являются всевозможные касательные векторы A многообразия $\mathscr{X}$.] Для каждого вектора $A\in\mathbf{T}\mathscr{X}$ (единственную!) точку $p\in\mathscr{X}$, для которой $A\in\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, мы обозначим символом πA. Тем самым возникает отображение

$$\pi\colon \mathbf{T}\mathscr{X}\to\mathscr{X},$$

обладающее тем свойством, что $\pi^{-1}(p)=\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ для каждой точки $p\in\mathscr{X}$.

Для произвольного открытого подмножества $U\subset\mathscr{X}$ подмножество $\pi^{-1}U\subset\mathbf{T}\mathscr{X}$ естественным образом отождествляется с множеством $\mathbf{T}U$. В случае, когда U является носителем карты $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$, определено отображение

$$\mathbf{T}h\colon \mathbf{T}U\to\mathbb{R}^{2n},$$

переводящее произвольный вектор $A\in\mathbf{T}U$ в вектор

$$(\mathbf{T}h)A=(x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^n)\in\mathbb{R}^{2n},$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки $p=\pi A$ в карте (U, h), а $a^1, \ldots, a^n$ — координаты вектора A в базисе

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p$$

пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$. (Таким образом,

$$A = a^1\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p + \ldots + a^n\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p;$$

заметим, что числа $a^1, \ldots, a^n$ однозначно определяются вектором A). Ясно, что отображение $\mathbf{T}h$ биективно и, значит, пара $(\mathbf{T}U, \mathbf{T}h)$ является картой в $\mathbf{T}\mathscr{X}$.

Пусть (U, h) и (U', h') — две карты многообразия $\mathscr{X}$ (для определенности пересекающиеся), и пусть

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \quad i=1, \ldots, n, \tag{3}$$

— формулы перехода соответствующих локальных координат (в пересечении $U \cap U'$). По определению (см. формулу (1) лекции 7) для каждой точки $p \in U \cap U'$ координаты $a^1, \ldots, a^n$ и $a^{1'}, \ldots, a^{n'}$ произвольного вектора $A \in \mathbf{T}_p\mathscr{X}$ в картах (U, h) и (U', h') связаны соотношением

$$a^{i'} = \left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_p a^i, \tag{4}$$

где $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_p$ — значения частных производных функций (3) в точке p.

С другой стороны, ясно, что $\mathbf{T}h$ и $\mathbf{T}h'$ отображают множество

$$\mathbf{T}(U \cap U') = \mathbf{T}U \cap \mathbf{T}U'$$

на соответственно открытые множества $h(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ и $h'(U \cap U') \times \mathbb{R}^n$ пространства $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, причем формулы (3) и (4) вместе задают отображение $\mathbf{T}h' \circ (\mathbf{T}h)^{-1}$ первого множества на второе. Поскольку якобиан $\det\left\|\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_p\right\|$ во всех точках $p \in U \cap U'$ отличен от нуля, отсюда следует, что это отображение является диффеоморфизмом.

Таким образом, *карты* $(\mathbf{T}U, \mathbf{T}h)$ *и* $(\mathbf{T}U', \mathbf{T}h')$ *согласованы*. Этот вывод остается, очевидно, в силе и при $U \cap U' = \varnothing$ (ибо если $U \cap U' = \varnothing$, то $\mathbf{T}U \cap \mathbf{T}U' = \varnothing$).

Таким образом, карты вида $(\mathbf{T}U, \mathbf{T}h)$ составляют атлас на $\mathbf{T}\mathscr{X}$ и, значит, определяют на $\mathbf{T}\mathscr{X}$ некоторую гладкость.

Определение 3. Построенное гладкое многообразие $\mathbf{T}\mathscr{X}$ называется ***многообразием касательных векторов*** многообразия $\mathscr{X}$. Его размерность равна $2n$, где $n = \dim \mathscr{X}$.

Заметим, что из-за наличия производных в формуле (4) класс гладкости многообразия $\mathbf{T}\mathscr{X}$ на единицу меньше класса гладкости r многообразия $\mathscr{X}$ (при $r=\infty$ или $r=\omega$ класс гладкости, очевидно, не меняется).

По определению локальными координатами, отвечающими карте $(\mathbf{T}U, \mathbf{T}h)$, являются числа $x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots$ $\ldots, a^n$. (Таким образом, символы $x^1, \ldots, x^n$ одновременно обозначают как локальные координаты в U, так и часть локальных координат в $\mathbf{T}U$. При достаточной внимательности к недоразумениям это не приводит.)

В локальных координатах $x^1, \ldots, x^n, a^1, \ldots, a^n$ (на $\mathbf{T}U$) и $x^1, \ldots, x^n$ (на U) отображение π записывается формулами

$$x^i = x^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где слева x^i — координаты на U, а справа — на $\mathbf{T}U$. Мы видим, следовательно, что *отображение π гладко и является субмерсией*. Поэтому в силу общего предложения 1 лекции 8 ***каждое касательное пространство $\mathbf{T}_p\mathscr{X} = \pi^{-1}(p)$ является вложенным подмногообразием многообразия $\mathbf{T}\mathscr{X}$.*** Числа $a^1, \ldots, a^n$ являются координатами на этом подмногообразии (определенными на всем $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$).

В многообразии $\mathbf{T}\mathscr{X}$ выделяется подмножество $\mathscr{X}_0$, состоящее из нулевых векторов пространств $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$.

Легко видеть, что $\mathscr{X}_0$ ***является замкнутым подмногообразием, диффеоморфным многообразию $\mathscr{X}$*** (диффеоморфизм $\mathscr{X}_0 \to \mathscr{X}$ индуцируется отображением $\pi\colon \mathbf{T}\mathscr{X} \to \mathscr{X}$).

Поэтому множество $\mathbf{T}\mathscr{X} \setminus \mathscr{X}_0$ открыто и, значит, является многообразием. Размерность этого многообразия равна $2n$, где $n = \dim \mathscr{X}$.

Теперь мы уже можем доказать предложение 1 лекции 14 (а вместе с ним и теорему Уитни).

Доказательство предложения 1 лекции 14. Пусть многообразие $\mathscr{X}$ вложено в $\mathbb{R}^N$. Тогда для любых двух различных точек $p, q \in \mathscr{X}$ (т. е. произвольной точки $(p, q) \in \mathscr{X} \times \mathscr{X} \setminus \Delta$) в $\mathbb{R}^N$ определена прямая, проходящая через эти точки. Пусть $f_1(p, q)$ — одномерное подпространство пространства $\mathbb{R}^N$, ассоциированное с этой прямой (т. е., наглядно говоря, параллельная прямая, проходящая через точку 0). Поскольку одномерные подпространства пространства $\mathbb{R}^N$ составляют $(N-1)$-мерное проективное пространство $\mathbb{R}P^{N-1}$, это дает нам отображение

(5) $$f_1\colon \mathscr{X}\times\mathscr{X}\setminus\Delta\to\mathbb{R}P^{N-1}.$$

Аналогично мы определим отображение

(6) $$f_2\colon \mathbf{T}\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0\to\mathbb{R}P^{N-1},$$

приняв за $f_2(A)$ для любого вектора $A\in\mathbf{T}\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0$ одномерное подпространство пространства $\mathbb{R}^N$ (точку пространства $\mathbb{R}P^{N-1}$), порожденное этим вектором (или, точнее, вектором $(d\iota_p)A\in\mathbf{T}_p\mathbb{R}^N=\mathbb{R}^N$, где $d\iota_p$ — дифференциал вложения $\iota\colon\mathscr{X}\to\mathbb{R}^N$ в точке $p=\pi(A)$).

Задача 1. Докажите, что отображения (5) и (6) гладки. [Указание. Запишите эти отображения в локальных координатах.]

Пусть теперь

$$\mathscr{Y}=(\mathscr{X}\times\mathscr{X}\setminus\Delta)\sqcup(\mathbf{T}\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0)$$

— дизъюнктное объединение многообразий $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\setminus\Delta$ и $\mathbf{T}\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0$. Естественным образом это объединение является $2n$-мерным гладким многообразием, а его отображение

$$f\colon\mathscr{Y}\to\mathbb{R}P^{N-1},$$

совпадающее на $\mathscr{X}\times\mathscr{X}\setminus\Delta$ с отображением f_1, а на $\mathbf{T}\mathscr{X}\setminus\mathscr{X}_0$ — с отображением f_2, — гладким отображением. Поэтому, если $2n<N-1$, то по следствию из теоремы Сарда отображение f заведомо не надъективно. Этим доказано, что *в пространстве $\mathbb{R}^N$ существует одномерное подпространство L, не принадлежащее как образу отображения f_1, так и образу отображения f_2.*

Рассмотрим теперь проектирование

(7) $$\mathbb{R}^N\to L^\perp$$

пространства $\mathbb{R}^N$ параллельно прямой L на ее ортогональное дополнение $L^\perp$ (являющееся $(N-1)$-мерным подпространством пространства $\mathbb{R}^N$). Выбрав в $L^\perp$ базис, мы можем считать это проектирование отображением $\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^{N-1}$. Пусть

(8) $$\rho\colon\mathscr{X}\to\mathbb{R}^{N-1}$$

— ограничение этого отображения на $\mathscr{X}\subset\mathbb{R}^N$. Поскольку проектирование (7) непрерывно и открыто, его ограничение (8) также непрерывно и открыто. С другой стороны, утверждение, что $L\notin\operatorname{Im} f_1$ в точности означает, что каждая прямая, параллельная прямой L, пересекает подмногообразие $\mathscr{X}$ в не более чем одной точке, т. е. что отображение (8) инъективно. Будучи инъективным непрерывным и открытым, отображение (8) является, следовательно, монеоморфизмом.

Рассмотрим теперь условие, что $L \notin \operatorname{Im} f_2$ (геометрически означающее, кстати сказать, что прямая, проходящая через точку p параллельно прямой L, не касается в этой точке подмногообразия $\mathscr{X}$). Дифференциал $(d\rho)_p$ отображения (8) в каждой точке $p \in \mathscr{X}$ является, очевидно, ограничением на $\mathbf{T}_p\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^N$ дифференциала проектирования (7). Поскольку в силу линейности отображения (7) его дифференциал совпадает с ним самим, отсюда, в частности, следует, что дифференциал $(d\rho)_p$ обращает в нуль лишь векторы из $\mathbf{T}_p\mathscr{X} \cap L$. Но это пересечение либо состоит только из нулевого вектора (когда $L \not\subset \mathbf{T}_p\mathscr{X}$), либо совпадает с L (когда $L \subset \mathbf{T}_p\mathscr{X}$). Поэтому, если $L \not\subset \mathbf{T}_p\mathscr{X}$, то отображение (8) является в точке p погружением. Поскольку включение $L \subset \mathbf{T}_p\mathscr{X}$ в точности означает, что $L = f_2(p)$, этим доказано, что условие $L \notin \operatorname{Im} f_2$ равносильно тому, что проектирование является погружением (в каждой точке $p \in \mathscr{X}$) и, значит, диффеоморфизмом на свой образ.

Поэтому образ $\rho(\mathscr{X})$ многообразия при проектировании ρ представляет собой вложенное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^{N-1}$, диффеоморфное многообразию $\mathscr{X}$. Таким образом, многообразие $\mathscr{X}$ вложимо в $\mathbb{R}^{N-1}$. □

Задача 2. Покажите, что любое вложимое n-мерное многообразие может быть погружено в $\mathbb{R}^{2n}$.