Лекция 16

Тензоры. — Тензорные поля. — Векторные поля и дифференцирования. — Алгебра Ли векторных полей.

Напомним (см. лекцию II. 6), что *тензором S типа* (a, b), где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, на линейном пространстве $\mathscr{V}$ называется отображение, сопоставляющее произвольному базису $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ набор n^{a+b} чисел $S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$, называемых *компонентами* тензора S в этом базисе, и обладающих тем свойством, что для любых двух базисов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ и $\boldsymbol{e}_{1'}, \ldots, \boldsymbol{e}_{n'}$ пространства $\mathscr{V}$ отвечающие им компоненты $S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$ и $S_{i'_1 \ldots i'_a}^{j'_1 \ldots j'_b}$ тензора S связаны формулой

$$S_{i'_1 \ldots i'_a}^{j'_1 \ldots j'_b} = c_{i'_1}^{i_1} \ldots c_{i'_a}^{i_a} c_{j_1}^{j'_1} \ldots c_{j_b}^{j'_b} S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b},$$

где $c_i^{i'}$ и $c_{i'}^i$ — компоненты взаимно обратных матриц перехода, т. е. такие числа, что $\boldsymbol{e}_{i'} = c_{i'}^i \boldsymbol{e}_i$ и $\boldsymbol{e}_i = c_i^{i'} \boldsymbol{e}_{i'}$. Каждый тензор корректно определяет полилинейный функционал

$$S(\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_a, \xi^1, \ldots, \xi^b) = S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b} x_1^{i_1} \ldots x_a^{i_a} \xi_{j_1}^1 \ldots \xi_{j_b}^b$$

от a векторных и b ковекторных аргументов и, как правило, с этим функционалом отождествляется.

По отношению к естественно определяемым операциям сложения и умножения на числа все тензоры данного типа (a, b) образуют линейное пространство $\mathsf{T}_a^b(\mathscr{V})$.

Для любых тензоров S и R типов (a, b) и (c, d) соответственно формула

$$(S \otimes R)_{i_1 \ldots i_{a+c}}^{j_1 \ldots j_{b+d}} = S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b} R_{i_{a+1} \ldots i_{a+c}}^{j_{b+1} \ldots j_{b+d}}$$

определяет тензор $S \otimes R$ типа $(a+c, b+d)$, называемый *тензорным произведением* тензоров S и R. Это умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно сложения.

Кроме того, для тензоров имеется специальная операция *свертки* (см. лекцию II. 6).

Каждый вектор естественным образом интерпретируется как тензор типа (0, 1), а каждый ковектор — как тензор типа (1, 0). Поэтому для любого базиса $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ пространства $\mathscr{V}$ и любых индексов $i_1, \ldots, i_a, j_1, \ldots$

..., $j_b=1, \ldots, n$ в пространстве $\mathrm{T}_a^b(\mathscr{V})$ определен тензор

$$e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_a}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_b},$$

где $e^{i_1}, \ldots, e^{i_a}$ — векторы сопряженного базиса пространства $\mathscr{V}^*$.

Все тензоры этого вида образуют базис пространства $\mathrm{T}_a^b(\mathscr{V})$, причем координатами тензора в этом базисе служат как раз его компоненты, т. е.

$$S=S_{i_1\ldots i_a}^{j_1\ldots j_b}e^{i_1}\otimes\ldots\otimes e^{i_a}\otimes e_{j_1}\otimes\ldots\otimes e_{j_b}$$

для любого тензора S.

Эти общие понятия линейной алгебры мы применим к случаю, когда $\mathscr{V}$ является касательным пространством $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ в его точке p.

Пусть $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathscr{X}$, содержащая точку p. В пространстве $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$ эта карта определяет базис

$$(1)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p,$$

а в сопряженном пространстве $\mathrm{T}_p^*\mathscr{X}$ — сопряженный базис

$$(dx^1)_p, \ldots, (dx^n)_p.$$

Поэтому для каждого тензора S_p типа (a, b) на пространстве $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$ будет иметь место представление вида

$$(2)\quad S_p=$$
$$=S_{i_1\ldots i_a}^{j_1\ldots j_b}(dx^{i_1})_p\otimes\ldots\otimes(dx^{i_a})_p\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\right)_p\otimes\ldots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_b}}\right)_p,$$

коэффициенты $S_{i_1\ldots i_a}^{j_1\ldots j_b}$ которого (т. е. компоненты тензора S_p в базисе (1)) называются *компонентами тензора S_p в карте* (U, h). (По типографским соображениям мы опускаем в обозначении этих компонент индекс p.)

Любая другая карта $(U', h')=(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ (с $p\in U'$) определяет базис

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n'}}\right)_p$$

пространства $\mathrm{T}_p\mathscr{X}$, связанный с базисом (1) матрицей перехода

$$(4)\qquad \left\|\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)_p\right\|, \quad i, i'=1, \ldots, n.$$

Поэтому компоненты тензора S_p в картах (U, h) и (U', h') связаны соотношением

$$(5)\quad S^{j'_1 \dots j'_b}_{i'_1 \dots i'_a} = \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\right)_p \dots \left(\frac{\partial x^{i_a}}{\partial x^{i'_a}}\right)_p \left(\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\right)_p \dots \left(\frac{\partial x^{j'_b}}{\partial x^{j_b}}\right)_p S^{j_1 \dots j_b}_{i_1 \dots i_a}.$$

Если теперь тензор S_p задан для любой точки $p \in \mathscr{X}$, то в представлении (2) компоненты $S^{j_1 \dots j_b}_{i_1 \dots i_a}$ будут функциями от p. Если эти функции гладки, т. е. гладко выражаются в карте (U, h) через координаты $x^1, \dots, x^n$, то соответствие $p \mapsto S_p$ называется (*гладким*) *тензорным полем* (или, короче, *тензором*) *типа* (a, b) *на многообразии* $\mathscr{X}$. Соотношение (5) для ф у н к ц и й $S^{j_1 \dots j_b}_{i_1 \dots i_a}$ имеет вид

$$(6)\quad S^{j'_1 \dots j'_b}_{i'_1 \dots i'_a} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_a}}{\partial x^{i'_a}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{j'_b}}{\partial x^{j_b}} S^{j_1 \dots j_b}_{i_1 \dots i_a}$$

на $U \cap U'$,

откуда следует, что условие гладкости тензорного поля не зависит от выбора карты.

З а м е ч а н и е 1. Для многообразий конечного класса гладкости C^r, $r \geqslant 1$, мы здесь сталкиваемся с той характерной трудностью, что элементы матрицы (4) являются, вообще говоря, функциями лишь класса C^{r-1}. Поэтому и гладкость тензорных полей мы вынуждены понимать только в смысле C^{r-1}. Во избежание этих оговорок, мы и условились в лекции 1 ограничиваться многообразиями класса C^∞ (и C^ω), для которых подобного рода трудностей не возникает.

Для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}$ многообразия $\mathscr{X}$ каждое тензорное поле S определяет семейство полей

$$S_\alpha = S|_{U_\alpha},$$

обладающих тем свойством, что для любых индексов α и β

$$(7)\qquad S_\alpha = S_\beta \quad \text{на} \quad U_\alpha \cap U_\beta.$$

Обратно, если заданы поля S_α на U_α, удовлетворяющие соотношениям (7) (о таких полях мы будем говорить, что они *согласованы на пересечениях*), то формула

$$S_p = (S_\alpha)_p, \quad \text{если} \quad p \in U_\alpha,$$

корректно определяет на $\mathscr{X}$ тензорное поле S, обладающее тем свойством, что

$$S|_{U_\alpha}=S_\alpha$$

для любого α (и потому гладкое). Мы будем говорить, что поля S_α *составляют* поле S.

Замечание 2. Тензорное поле на многообразии можно рассматривать как соответствие, сопоставляющее каждой карте (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ набор гладких функций $S^{j_1 \dots j_b}_{i_1 \dots i_a}$ на U и обладающее тем свойством, что для любых двух карт (U, h) и (U', h') на пересечении $U \cap U'$ имеет место соотношение (6). Это можно принять за определение тензорного поля. Преимущество этого определения состоит в том, что оно может быть сформулировано сразу же после введения понятия гладкого многообразия без каких-либо промежуточных определений, а недостаток — в отсутствии непосредственной формальной связи (заменяющейся аналогией) с понятием тензора в линейном пространстве.

Все алгебраические операции над тензорами (в том числе и операция свертки) автоматически переносятся на тензорные поля. Например, тензорное произведение $S \otimes R$ двух тензорных полей S и R определяется формулой

$$(S \otimes R)_p = S_p \otimes R_p. \tag{8}$$

Ясно, что из гладких полей при этом всегда получаются гладкие поля.

В частности, мы видим, что *совокупность* $\mathsf{T}^b_a\mathscr{X}$ *всех тензорных полей типа* (a, b) *на многообразии* $\mathscr{X}$ *является линейным пространством.*

Это пространство бесконечномерно (при $n > 0$).

При $(a, b)=(0, 0)$ тензорные поля являются не чем иным, как гладкими функциями на $\mathscr{X}$, а линейное пространство $\mathsf{T}^0_0\mathscr{X}$ — линейным пространством $\mathsf{F}\mathscr{X}$ гладких функций на $\mathscr{X}$. Линейное пространство $\mathsf{F}\mathscr{X}$ представляет собой по отношению к умножению функций алгебру, причем формула

$$(fS)_p = f(p)\,S_p, \quad f \in \mathsf{F}\mathscr{X}, \quad S \in \mathsf{T}^b_a\mathscr{X}$$

(являющаяся частным случаем формулы (8)) определяет операцию умножения

$$\mathsf{F}\mathscr{X} \times \mathsf{T}^b_a\mathscr{X} \longrightarrow \mathsf{T}^b_a\mathscr{X}$$

по отношению к которой, как показывает автоматическая проверка, *линеал* $\mathsf{T}_a^b\mathscr{X}$ *является модулем над алгеброй* $\mathsf{F}\mathscr{X}$.

При $(a, b)=(0, 1)$ тензорные поля называются *векторными полями*. Примером векторного поля на координатной окрестности U (рассматриваемой как многообразие) является поле

$$(9) \qquad \frac{\partial}{\partial x^i}\colon p\mapsto\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p, \qquad i=1, \ldots, n.$$

Оно называется i-м *координатным векторным полем* на U.

При $(a, b)=(1, 0)$ тензорные поля называются *ковекторными полями*. Примером ковекторных полей является i-*е координатное ковекторное поле*

$$(10) \qquad dx^i\colon p\mapsto(dx^i)_p$$

на координатной окрестности U.

Формула (2) утверждает, что каждое тензорное поле S на U единственным образом разлагается по тензорным произведениям векторных и ковекторных координатных полей:

$$(11) \qquad S=S_{i_1\ldots i_a}^{j_1\ldots j_b}\,dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_a}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_b}} \text{ на } U.$$

В частности, на U каждое векторное поле X имеет вид

$$(12) \qquad X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i},$$

а каждое ковекторное поле α — вид

$$(13) \qquad \alpha=\alpha_i dx^i,$$

где X^i и α_i, $i=1, \ldots, n$, — некоторые гладкие функции на U. (Для обозначения ковекторных полей по традиции употребляются строчные греческие буквы, а для обозначения векторных полей — прописные латинские буквы из конца алфавита.)

По определению существование разложения (11) означает, что *для любой координатной окрестности U линеал T_a^bU является свободным модулем над алгеброй* $\mathsf{F}U$ *с базисом*

$$dx^{i_1}\otimes\ldots\otimes dx^{i_a}\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{j_b}}.$$

Для произвольных же многообразий $\mathscr{X}$ модуль $\mathsf{T}_b^a\mathscr{X}$, вообще говоря, свободным модулем (над алгеброй $\mathsf{F}\mathscr{X}$) не является, и его алгебраическая структура может быть весьма сложной.

Многообразия $\mathscr{X}$, для которых все модули $\mathsf{T}_a^b\mathscr{X}$ свободны, называются *параллелизуемыми*.

Рассмотрим более внимательно векторные поля.

Как уже было сказано в лекции 7, каждый вектор $A \in \mathsf{T}_p\mathscr{X}$ позволяет произвольной функции f (определенной и гладкой в окрестности точки p) сопоставить некоторое число Af — производную этой функции по вектору A. Отсюда следует, что для любого векторного поля X на многообразии $\mathscr{X}$ и произвольной функции $f \in \mathsf{F}\mathscr{X}$ формула

$$(14) \qquad (Xf)(p) = X_p f, \quad p \in \mathscr{X},$$

определяет на $\mathscr{X}$ некоторую функцию Xf. Из приведенных в лекции 7 формул для Af вытекает, что в произвольной карте $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathscr{X}$ ограничение функции Xf на U определяется формулой

$$(15) \qquad Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ на } U,$$

где X^i, $i = 1, \ldots, n$, — компоненты векторного поля X в карте (U, h). Поэтому функция Xf гладка на U, а значит — в силу произвольности U — и на всем $\mathscr{X}$.

Таким образом, формула (14) определяет некоторое (очевидно, линейное) отображение X алгебры $\mathsf{F}\mathscr{X}$ гладких функций на многообразии $\mathscr{X}$ в себя. Оно называется *линейным дифференциальным оператором первого порядка* на многообразии $\mathscr{X}$, порожденным векторным полем X. [Эта терминология мотивируется формулой (15), сравнение которой с формулой (12) объясняет также выбор обозначения $\frac{\partial}{\partial x^i}$ для координатных векторных полей.]

Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная алгебра (не обязательно конечномерная и ассоциативная).

Определение 1. Линейное отображение

$$D\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

алгебры $\mathcal{A}$ в себя называется *дифференцированием*, если

$$D(ab) = Da \cdot b + a \cdot Db$$

для любых элементов $a, b \in \mathcal{A}$.

В частности, дифференцирования алгебры $\mathsf{F}\mathscr{X}$ (называемые обычно просто *дифференцированиями на* $\mathscr{X}$) — это такие линейные отображения

$$D\colon \mathsf{F}\mathscr{X} \longrightarrow \mathsf{F}\mathscr{X},$$

что

$$D(fg) = Df\cdot g + f\cdot Dg \tag{16}$$

для любых двух гладких функций f и g на $\mathscr{X}$.

Легко видеть, что *линейный дифференциальный оператор X: $\mathsf{F}\mathscr{X} \longrightarrow \mathsf{F}\mathscr{X}$, порожденный векторным полем X, является дифференцированием на $\mathscr{X}$.* Действительно, из правила дифференцирования произведения и формулы (15) непосредственно следует, что для любых функций f, $g \in \mathsf{F}\mathscr{X}$ тождество (16) выполнено на каждой координатной окрестности U. Поэтому оно выполнено и на всем многообразии $\mathscr{X}$. □

Оказывается, что если многообразие $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то этим исчерпываются все дифференцирования на $\mathscr{X}$.

Теорема 1. *Каждое дифференцирование D на хаусдорфовом гладком (класса C^∞) многообразии $\mathscr{X}$ порождается векторным полем. Это поле единственно.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{X}$ — хаусдорфово гладкое многообразие, U — его открытое подмногообразие, f — гладкая функция на U. Тогда для любой точки $p_0 \in U$ существует на $\mathscr{X}$ такая гладкая функция f_1 и такая окрестность W точки p_0, что $\overline{W} \subset U$ и*

$$f = f_1 \text{ на } W.$$

При этом можно дополнительно считать, что $f_1 = 0$ вне U.

Доказательство. Согласно предложению 2 лекции 13 в $\mathscr{X}$ найдутся такие открытые множества V и W, что

$$p_0 \in W, \quad \overline{W} \subset V, \quad \overline{V} \subset U,$$

и для пары (V, W) существует функция Урысона φ. Для любой точки $p \in \mathscr{X}$ положим

$$f_1(p) = \begin{cases} \varphi(p) f(p), & \text{если } p \in U, \\ 0, & \text{если } p \notin U. \end{cases}$$

Ясно, что функция f_1 гладка и совпадает с функцией f на W. Кроме того, по построению $f_1 = 0$ вне U. □

Следствие 1. *Для каждой окрестности U произвольной точки p_0 гладкого хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ существует такая окрестность W точки p_0 и такая гладкая на $\mathscr{X}$ функция φ, что*

$$\varphi(p)=\begin{cases} 1, & \text{если } p\in W, \\ 0, & \text{если } p\notin U. \end{cases} \quad \square$$

Заметим, что $\varphi(p_0)=1$ и $\overline{W}\subset U$.

Пусть теперь D — произвольное дифференцирование на многообразии $\mathscr{X}$.

Мы будем говорить, что гладкие на $\mathscr{X}$ функции f и g *равны вблизи точки* $p_0\in\mathscr{X}$, если они принимают одинаковые значения в некоторой окрестности этой точки.

Следствие 2. *Если функции f и g равны вблизи точки $\mathscr{X}$, то функции Df и Dg также равны вблизи этой точки.*

Доказательство. Пусть $f=g$ на окрестности U точки p_0. Рассмотрим функцию $(f-g)\varphi$, где φ — функция на $\mathscr{X}$ из следствия 1. Ясно, что $(f-g)\varphi=0$ на всем $\mathscr{X}$, т. е. функция $(f-g)\varphi$ является нулем линеала $\mathsf{F}\mathscr{X}$. Поэтому в силу линейности отображения D функция $D[(f-g)\varphi]$ также является нулем. Поскольку

$$D[(f-g)\varphi]=(Df-Dg)\varphi+(f-g)D\varphi,$$

этим доказано, что

$$(Df-Dg)\varphi+(f-g)D\varphi=0$$

на всем $\mathscr{X}$ и, в частности, на окрестности W точки p_0, предусмотренной следствием 1. Но $f=g$ и $\varphi=1$ на W. Поэтому $Df-Dg=0$ и, значит, $Df=Dg$ на W. $\square$

Замечание 3. Из леммы 1 также следует, что *для любой точки $p_0\in U$ и любого тензорного поля S на U существует такая окрестность $W\subset U$ этой точки и такое тензорное поле S_1 на всем $\mathscr{X}$, что*

$$S=S_1 \text{ на } W.$$

Для доказательства достаточно применить лемму 1 к каждой компоненте поля S (и взять пересечение соответствующих окрестностей W).

Свойство, выражаемое следствием 2, называется свойством локальности отображения D. Из него вытекает следующее важное предложение:

Предложение 1. *Для любого открытого множества $U\subset\mathscr{X}$ существует единственное дифференцирование*

$$D_U\colon \mathsf{F}U\to\mathsf{F}U,$$

согласованное с дифференцированием D, т. е. такое, что

(17) $$D_U(f|_U) = Df|_U$$

для каждой гладкой на $\mathscr{X}$ функции f.

Наглядно последнее свойство означает, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} \mathsf{F}\mathscr{X} \arrow[r] \arrow[d, "D"'] & \mathsf{F}U \arrow[d, "D_U"] \\ \mathsf{F}\mathscr{X} \arrow[r] & \mathsf{F}U \end{tikzcd},$$

горизонтальные стрелки которой являются отображениями ограничения, при движении по двум возможным путям из левого верхнего угла в правый нижний получается одно и то же отображение $\mathsf{F}\mathscr{X} \to \mathsf{F}U$. Обладающие этим свойством диаграммы называются *коммутативными* (мы уже встречались с коммутативными диаграммами в лекции 3).

Доказательство предложения 1. Пусть дифференцирование D_U существует, и пусть g — произвольная гладкая на U функция. Согласно лемме 1 для любой точки $p_0 \in U$ на $\mathscr{X}$ существует функция $g_1 = g_{1, p_0}$, совпадающая вблизи точки p_0 с функцией g. При этом, согласно свойству (17), $D_U g = Dg_1|_U$ и, значит, в частности,

(18) $$(D_U g)(p_0) = (Dg_1)(p_0).$$

С другой стороны, если g_1^* — другая гладкая на $\mathscr{X}$ функция, совпадающая вблизи точки p_0 с функцией g (а потому и с функцией g_1), то, согласно свойству локальности отображения D, вблизи точки p_0 будет иметь место равенство $Dg_1 = Dg_1^*$ и, значит, в частности, равенство

(19) $$(Dg_1)(p_0) = (Dg_1^*)(p_0).$$

Таким образом, правая часть формулы (17) не зависит от выбора функции g_1 и определяется исключительно функцией g и точкой p_0. Это означает, что функция $D_U g$ на U зависит только от функции g. Следовательно, отображение $D_U\colon g \mapsto D_U g$ единственно.

Чтобы доказать его существование, мы примем формулу (18) за определение функции $D_U g$. Согласно формуле (19) это определение корректно. Более того, если $g_1 = g$ на окрестности W точки p_0, то для любой точки $p \in W$ функцию $g_1 = g_{1, p_0}$ мы можем использовать в качестве функции $g_{1, p}$ для вычисления значения $(D_U g)(p)$

функции $D_U g$ в точке p. Это означает, что $D_U g = Dg_1$ не только в точке p_0, но и вблизи этой точки. Таким образом, вблизи каждой точки из U функция $D_U g$ совпадает с некоторой гладкой на $\mathscr{X}$ функцией. Поэтому функция $D_U g$ гладка на U, т. е. соответствие $g \mapsto D_U g$ представляет собой отображение

$$D_U\colon \mathsf{F}U \to \mathsf{F}U.$$

Если f и g — две гладкие на U функции, а f_1 и g_1 — гладкие на $\mathscr{X}$ функции, совпадающие вблизи точки p_0 соответственно с функциями f и g, то функция $f_1 + g_1$ будет совпадать вблизи точки p_0 с функцией $f + g$. Поэтому

$$[D_U(fg)](p_0) = [D(f_1 g_1)](p_0) = \\ = [Df_1 \cdot g_1 + f_1 \cdot Dg_1](p_0) = [D_U f \cdot g + f \cdot D_g](p_0),$$

и, значит, отображение D_U,— очевидно, линейное — является дифференцированием на U.

Наконец, если f — гладкая на $\mathscr{X}$ функция, то для функции $g = f|_U$ роль функции g_1 (для любой точки $p_0 \in U$) может играть функция f. Поэтому

$$D_U(f|_U) = Df|_U. \ \square$$

Как правило, вместо $D_U g$ мы будем писать просто Dg.

Для доказательства теоремы 1 нам будет нужна еще следующая лемма:

Лемма 2. *Пусть $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathscr{X}$ класса C^∞. Тогда вблизи любой точки $p_0 \in U$ каждая гладкая (на U) функция f допускает представление вида*

$$f = f(p_0) + (x^i - x_0^i) f_i, \tag{20}$$

где $f_1, \ldots, f_n$ — некоторые гладкие (вблизи p_0) функции, а $x_0^1, \ldots, x_0^n$ — координаты точки p_0.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}_0 = h(p)$, и пусть $r > 0$ — такое число, что любая точка $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, для которой $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < r$, принадлежит открытому множеству $h(U)$. Тогда для значения $f(x)$ в каждой такой точке $\boldsymbol{x}$ произвольной гладкой в $h(U)$ функции f будет иметь место формула

$$f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}_0) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} f(\boldsymbol{x}_0 + s(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))\, ds = \\ = (x^i - x_0^i) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}_0 + s(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0))\, ds,$$

т. е. формула

$$f(x) = f(x_0) + (x^i - x_0^i) f_i(x),$$

где

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0 + s(x - x_0))\, ds.$$

Для завершения доказательства остается с помощью диффеоморфизма h перейти от функций на $h(U)$ к функциям на U. □

Для каждого дифференцирования D произвольной алгебры $\mathcal{A}$ с единицей 1 имеет место равенство

$$D1 = D(1 \cdot 1) = D1 \cdot 1 + 1 \cdot D1 = D1 + D1 = 2D1,$$

и, значит,— равенство

$$D1 = 0.$$

В силу линейности отображения D отсюда вытекает, что $Da = 0$ *для каждого элемента* $a \in \mathbb{R}$ *основного поля.*

Для дифференцирований на гладком многообразии $\mathscr{X}$ (т. е. дифференцирований алгебры $\mathsf{F}\mathscr{X}$) это означает, что *каждое дифференцирование на* $\mathscr{X}$ *любую постоянную функцию переводит в нуль.*

Теперь у нас уже все готово для доказательства теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. Как всегда, докажем сначала утверждение об единственности.

Пусть дифференцирование D на многообразии $\mathscr{X}$ порождается векторным полем X. Это означает, что в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathscr{X}$ для любой гладкой на U функции f имеет место равенство

$$Df = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ на } U,$$

где X^i, $i = 1, \ldots, n$,— компоненты векторного поля X на U (и где символ D обозначает на самом деле D_U). В частности,

$$Dx_i = X^i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

что и доказывает единственность поля X.

Пусть теперь D — произвольное дифференцирование на многообразии $\mathscr{X}$ (предполагаемым — напомним — хаусдорфовым и класса C^∞). Для любой карты $(U, x^1, \ldots, x^n)$

рассмотрим на U гладкие функции

$$X^i = Dx^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Пусть f — произвольная гладкая на U функция. Применив к ее представлению (20) оператор D (точнее, оператор D_W, где W — окрестность точки p_0, в которой имеет место (19)), мы получим, что

$$Df = X^i f_i + (x^i - x_0^i) Df_i \text{ на } W$$

и, значит, что

$$(Df)(p_0) = X^i(p_0) f_i(p_0). \tag{21}$$

(Мы имеем право вместо D_W писать D из-за свойства локальности оператора D.)

Равенство (21) верно, конечно, не только для дифференцирований на $\mathscr{X}$, но и для любого дифференцирования на U. В частности, оно верно для дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i} f\right)(p_0) = f_i(p_0),$$

и, значит, в силу формулы (21)

$$(Df)(p_0) = X^i(p_0) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p_0) = \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p_0).$$

Поскольку p_0 — произвольная точка окрестности U, этим доказано, что

$$Df = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \text{ на } U,$$

т. е. дифференцирование D порождается в U векторным полем X_U с компонентами $X^1, \ldots, X^n$.

Аналогично, для любой другой карты $(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ дифференцирование D на U' порождается векторным полем $X_{U'}$ с компонентами $X^{i'} = Dx^{i'}$. При этом в силу свойства локальности оператора D для любой функции f на пересечении $U \cap U'$ будет иметь место равенство

$$X^{i'} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Применив это равенство к функциям перехода $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n)$, мы немедленно получим, что

$$X^{i'} = X^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i},$$

т. е. что на $U \cap U'$ векторные поля X_U и $X_{U'}$ совпадают. Поэтому, положив для любой точки p многообразия $\mathscr{X}$

$$X_p = (X_U)_p,$$

где U — произвольная координатная окрестность точки p, мы корректно определим на $\mathscr{X}$ векторное поле X, обладающее тем свойством, что $X|_U = X_U$ для любой координатной окрестности U. Поэтому это поле, во-первых, гладко, а во-вторых, порождает дифференцирование D. □

Контрольный вопрос. Где в этом доказательстве использовано предположение, что $\mathscr{X}$ является многообразием класса C^∞?

На основании теоремы 1 векторные поля на $\mathscr{X}$ обычно отождествляются с дифференцированиями. (Что, в частности, а постериори оправдывает обозначение Xf для результата применения к функции f порожденного векторным полем X дифференцирования.)

Ясно, что для любой алгебры $\mathcal{A}$ сумма двух дифференцирований и произведение дифференцирования на число также являются дифференцированиями, т. е. *множество* $\operatorname{Der} \mathcal{A}$ *всех дифференцирований алгебры* $\mathcal{A}$ *является линейным пространством* (подпространством линейного пространства $\operatorname{End}_{\text{лин}} \mathcal{A}$ всех линейных операторов $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$).

Для любых двух линейных операторов $D_1, D_2 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ оператор

$$[D_1, D_2] = D_1 D_2 - D_2 D_1$$

называется их *коммутатором* (или *скобкой Ли*). Ср. определение 1 лекции II.18а.

Легко видеть, что *для каждой алгебры* $\mathcal{A}$ *коммутатор* $[D_1, D_2]$ *любых двух дифференцирований* $D_1, D_2 \colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ *также является дифференцированием*. Действительно,

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](ab) &= D_1(D_2(ab)) - D_2(D_1(ab)) = \\
&= D_1(D_2 a \cdot b + a \cdot D_2 b) - D_2(D_1 a \cdot b + a \cdot D_1 b) = \\
&= D_1 D_2 a \cdot b + D_2 a \cdot D_1 b + D_1 a \cdot D_2 b + a \cdot D_1 D_2 b - \\
&\quad - D_2 D_1 a \cdot b - D_1 a \cdot D_2 b - D_2 a \cdot D_1 b - a \cdot D_2 D_1 b = \\
&= (D_1 D_2 - D_2 D_1) a \cdot b + a \cdot (D_1 D_2 - D_2 D_1) b = \\
&= [D_1, D_2] a \cdot b + a \cdot [D_1, D_2] b
\end{aligned}$$

для произвольных элементов $a, b \in \mathcal{A}$. □

Поскольку операция коммутирования $D_1, D_2 \mapsto [D_1, D_2]$, очевидно, линейна по D_1 и D_2, это означает, что *по от-*

ношению к операции коммутирования линеал $\operatorname{Der} \mathcal{A}$ *всех дифференцирований алгебры* $\mathcal{A}$ *сам является алгеброй.*

Ясно, что *операция коммутирования антикоммутативна*, т. е.

$$[D_1, D_2] = -[D_2, D_1]$$

для любых двух линейных операторов D_1 и D_2 (даже не являющихся дифференцированиями).

Кроме того, *для любых трех операторов* D_1, D_2 *и* D_3 *имеет место тождество*

$$[[D_1, D_2], D_3] + [[D_2, D_3], D_1] + [[D_3, D_1], D_2] = 0. \tag{22}$$

Действительно,

$$[[D_1, D_2], D_3] = (D_1D_2 - D_2D_1) D_3 - D_3 (D_1D_2 - D_2D_1) =$$
$$= D_1D_2D_3 - D_2D_1D_3 - D_3D_1D_2 + D_3D_2D_1,$$

и потому левая сторона формулы (22) является суммой двенадцати операторов вида $D_iD_jD_k$, в которой каждый из этих операторов встречается дважды с противоположными знаками. Поэтому эта сумма равна нулю. □

Тождество (22) называется *тождеством Якоби.*

Все это мотивирует следующее общее определение:

Определение 2. Алгебра, умножение в которой антикоммутативно и удовлетворяет тождеству Якоби, называется *алгеброй Ли.*

Таким образом, мы доказали, что *алгебра* $\operatorname{Der} \mathcal{A}$ *является алгеброй Ли.*

Так как дифференцирования алгебры гладких функций $\mathsf{F}\mathscr{X}$ являются в силу наших отождествлений не чем иным, как векторными полями на $\mathscr{X}$, мы получаем, в частности, что *векторные поля на гладком хаусдорфовом многообразии* $\mathscr{X}$ *класса* C^∞ *образуют алгебру Ли.*

Эта алгебра Ли обычно обозначается символом $\mathfrak{a}\mathscr{X}$.

По определению

$$[X, Y] f = X(Yf) - Y(Xf)$$

для любых векторных полей X, Y на $\mathscr{X}$ и любой функции $f \in \mathsf{F}\mathscr{X}$.

Отсюда следует, что

$$[gX, Y] = g[X, Y] - Yg \cdot X \tag{23}$$

для любой функции $g \in \mathsf{F}\mathscr{X}$. Действительно,

$$[gX, Y] f = gX(Yf) - Y(gXf) =$$
$$= gX(Yf) - Yg \cdot Xf - gY(Xf) = g[X, Y] f - Yg \cdot Xf$$

для каждой функции $f \in \mathsf{F}\mathscr{X}$. □

Если

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{и} \quad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

в карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$, то для любой гладкой на U функции f

$$[X, Y] f = X(Yf) - Y(Xf) = X\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$
$$= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right) =$$
$$= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} =$$
$$= \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Этим доказано, что *в каждой карте* $(U, x^1, \ldots, x^n)$ *компоненты* $[X, Y]^i$ *векторного поля* $[X, Y]$ *выражаются формулой*

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

где $X^1, \ldots, X^n, Y^1, \ldots, Y^n$ *— компоненты полей* X *и* Y *соответственно.*

Замечание 4. Термин «алгебра Ли» мы уже употребляли в лекции 6 применительно к линейным пространствам матриц, предусмотренных определением матричных групп Ли (см. определение 1 лекции 6). Конечно, по отношению к операции $[B_1, B_2] = B_1B_2 - B_2B_1$ коммутирования матриц линеал $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ всех матриц порядка n является алгеброй Ли. Поэтому алгеброй Ли будет и любая ее подалгебра (линейное подпространство $\mathfrak{g}$, замкнутое относительно этой операции). С другой стороны, если $\mathfrak{g}$ — подпространство из определения 1 лекции 6 и если $B_1, B_2 \in \mathfrak{g}$, то, согласно условию 1° этого определения, матрицы e^{tB_1} и e^{tB_2} для любого $t \in \mathbb{R}$ принадлежат группе $\mathscr{G}$. Поэтому этой группе будет принадлежать и матрица

$$A_t = e^{tB_1} e^{tB_2} e^{-tB_1} e^{-tB_2} =$$
$$= (E + B_1 t + \ldots)(E + B_2 t + \ldots)(E - B_1 t + \ldots)(E - B_2 t + \ldots) =$$
$$= E + [B_1, B_2] t^2 + \ldots,$$

где многоточия обозначают члены, имеющие по t степень $\geqslant 3$. Так как $A_t \to E$ при $t \to 0$, то при достаточно малом t норма матрицы $A_t - E$ меньше 1, и потому определена матрица

$$B_t = \ln A_t = (A_t - E) - \frac{(A-E)^2}{2} + \ldots = [B_1, B_2]\, t^2 + \ldots$$

Так как $B_t \to 0$ при $t \to 0$, то при достаточно малом t для ее нормы $|B_t|$ имеет место неравенство $|B_t| < \ln 2$, и, значит, согласно условию 2° определения 1 лекции 6, матрица B_t принадлежит подпространству $\mathfrak{g}$. Но тогда этому подпространству будет принадлежать и матрица $\frac{B_t}{t^2}$, а потому и матрица

$$\lim_{t \to 0} \frac{B_t}{t^2} = \lim_{t \to 0} ([B_1, B_2] + \ldots) = [B_1, B_2].$$

Значит, $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли (подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$). Подалгебры алгебр Ли $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ называются *матричными алгебрами Ли*.

Замечание 5. Следует иметь в виду, что существуют матричные алгебры Ли, не являющиеся алгебрами Ли никакой матричной группы Ли. Мы вернемся к этому вопросу в следующем семестре.