Лекция 17

Интегральные кривые векторных полей.— Векторные поля и потоки.— Перенос тензорных полей с помощью диффеоморфизмов.— Производная Ли тензорного поля.

Кривой на гладком многообразии $\mathscr{X}$ мы будем называть произвольное гладкое отображение

$$\gamma\colon (a,\ b) \longrightarrow \mathscr{X} \tag{1}$$

в многообразие $\mathscr{X}$ некоторого интервала $(a,\ b)$ оси $\mathbb{R}$ (см. обсуждение понятия кривой в лекции 1).

Дифференциал $(d\gamma)_t$ кривой γ в каждой точке $t \in (a,\ b)$ представляет собой линейное отображение одномерного пространства $\mathbf{T}_t(a,\ b) = \mathbb{R}$ в пространство $\mathbf{T}_{\gamma(t)}\mathscr{X}$ и однозначно характеризуется вектором

$$\dot{\gamma}(t) = (d\gamma)_t \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t \tag{2}$$

пространства $\mathbf{T}_{\gamma(t)}\mathscr{X}$, в который оно переводит базисный вектор $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_t$ пространства $\mathbf{T}_t(a,\ b)$.

Определение 1. Вектор $\dot{\gamma}(t)$ называется *касательным вектором* кривой γ в точке t. (Допуская некоторую неточность, вектор $\dot{\gamma}(t)$ называют также касательным вектором кривой γ в точке $p = \gamma(t)$.)

Пусть теперь X — векторное поле на многообразии $\mathscr{X}$. По определению каждой точке $p \in \mathscr{X}$ поле X сопоставляет некоторый вектор $X_p \in \mathbf{T}_p\mathscr{X}$.

Определение 2. Кривая γ называется *интегральной кривой* (или *траекторией*) векторного поля X, если

$$\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \text{ для любого } t,\ a < t < b. \tag{3}$$

Говорят, что кривая γ *содержится* в карте $(U,\ h) = (U,\ x^1,\ \ldots,\ x^n)$, если $\gamma(t) \in U$ для любого t, $a < t < b$. Такая кривая задается n гладкими функциями

$$x^i = x^i(t), \quad a < t < b, \quad i = 1,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

а для ее касательного вектора $\dot{\gamma}(t)$ имеет место равенство

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{x}^i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\gamma(t)}$$

(докажите!). Поэтому для кривой в U уравнение (1) равносильно системе n дифференциальных уравнений

$$(5) \qquad \dot{x}^i(t) = X^i(x^1(t), \ldots, x^n(t)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

первого порядка, где X^i, $i = 1, \ldots, n$,— компоненты векторного поля X в карте (U, h) (или, точнее, их выражения через координаты $x^1, \ldots, x^n$).

Мы видим, таким образом, что уравнения вида (3) представляют собой обобщение на случай произвольных многообразий понятия системы дифференциальных уравнений первого порядка, заданной в области пространства $\mathbb{R}^n$. Они называются *дифференциальными уравнениями на многообразии* $\mathscr{X}$. Их теория относится к курсу теории дифференциальных уравнений и в основном лежит вне рамок нашего изложения.

Все же для полноты изложения и чтобы продемонстрировать специфику общих уравнений вида (3), мы сформулируем и докажем сейчас основную теорему о существовании и единственности их решений.

Ясно, что для каждого подинтервала $I' \subset I$ интервала $I = (a, b)$ ограничение $\gamma|_{I'}$ интегральной кривой γ на I' также будет интегральной кривой векторного поля X. Интегральная кривая (1) называется *максимальной*, если она не является ограничением никакой интегральной кривой, определенной на бо́льшем интервале.

Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$. Говорят, что кривая (1) *проходит при* $t = t_0$ *через точку* $p \in \mathscr{X}$, если, во-первых, эта кривая определена на таком интервале (a, b) оси $\mathbb{R}$, что $a < t_0 < b$, и, во-вторых, $\gamma(t_0) = p$.

Теорема 1. *Если многообразие $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то для любой точки $p_0 \in \mathscr{X}$ и любого векторного поля X на $\mathscr{X}$ существует единственная максимальная интегральная кривая $\gamma\colon I \to \mathscr{X}$ поля X, проходящая при $t = t_0$ через точку p.*

Доказательство. Пусть Γ — множество всевозможных интегральных кривых γ векторного поля X, проходящих при $t = t_0$ через точку p_0. Так как в произвольной карте (U, h), содержащей точку p_0, уравнение (3) равносильно системе (5) обыкновенных дифференциальных уравнений, то, согласно известной из курса теории дифференциальных уравнений теореме о существовании и единственности решения таких систем, в окрестности U существует хотя бы одна интегральная кривая γ поля X с $\gamma(t_0) = p_0$. Это означает, что *множество* Γ *не пусто.*

Пусть теперь $\gamma_1\colon I_1 \to \mathscr{X}$ и $\gamma_2\colon I_2 \to \mathscr{X}$ — две произвольные интегральные кривые из Γ. Рассмотрим пересечение $I_0 = I_1 \cap I_2$ интервалов I_1 и I_2, являющееся, очевидно, интервалом оси $\mathbb{R}$, содержащим точку p_0 и его подмножество C, состоящее из всех точек $t \in I_0$, для которых $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. По условию $t_0 \in C$, так что *множество C не пусто.*

Пусть $t_1 \in C$, и пусть (U, h) — произвольная карта, содержащая точку $p_1 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_1)$. Согласно уже использованной теореме о существовании и единственности решений систем дифференциальных уравнений, на некотором интервале I оси $\mathbb{R}$, содержащем точку t_1, существует единственная интегральная кривая $\gamma\colon I \to \mathscr{X}$ поля X, для которой $\gamma(t_1) = p_1$. При этом без ограничения общности мы можем считать, что $I \subset I_0$. Но тогда ограничения $\gamma_1|_I$ и $\gamma_2|_I$ кривых γ_1 и γ_2 на интервале I будут такой кривой γ и, значит, в силу единственности будут совпадать. По определению это означает, что $I \subset C$. Таким образом, для любой точки $t_1 \in C$ существует такой интервал I, содержащий эту точку, что $I \subset C$. Следовательно, *множество C открыто* (в $\mathbb{R}$, а потому и в I_0).

Рассмотрим теперь отображение $\gamma_1 \times \gamma_2\colon I_0 \to \mathscr{X} \times \mathscr{X}$, определенное формулой

$$(\gamma_1 \times \gamma_2)(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \quad t \in I.$$

Ясно, что отображение $\gamma_1 \times \gamma_2$ непрерывно и множество C является не чем иным, как прообразом $(\gamma_1 \times \gamma_2)^{-1}\Delta$ при этом отображении диагонали $\Delta = \{(p, p);\ p \in \mathscr{X}\}$ произведения $\mathscr{X} \times \mathscr{X}$ (см. лекцию 14). Поскольку для хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ диагональ Δ замкнута в $\mathscr{X}$, отсюда следует, что *множество C замкнуто в I_0.*

Поскольку интервал I_0 связен, этим доказано, что $C = I_0$. Это означает, что *любые две интегральные кривые из Γ совпадают на общем интервале их областей определения.*

Отсюда следует, что, обозначив через I_γ интервал, на котором определена кривая $\gamma \in \Gamma$, и положив

$$I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma$$

и

$$\gamma_0(t) = \gamma(t), \qquad \text{если } t \in I_\gamma,$$

мы корректно определим единственную максимальную интегральную кривую $\gamma_0\colon I \to \mathscr{X}$ поля X, для которой $\gamma(t_0) = p_0$. $\square$

Задача 1. Постройте такое двумерное нехаусдорфово многообразие $\mathscr{X}$ и такое векторное поле X на $\mathscr{X}$, что для некоторой точки $p_0 \in \mathscr{X}$ существуют две различные интегральные кривые поля X, проходящие при $t=t_0$ через точку p_0.

Пусть $t_0=0$.

Для произвольной точки $p \in \mathscr{X}$ мы обозначим через γ_p^X максимальную интегральную кривую поля X, проходящую при $t=0$ через точку p, и для любого $t \in \mathbb{R}$, для которого точка $\gamma_p^X(t)$ определена, положим

$$\varphi_t^X(p)=\gamma_p^X(t).$$

Таким образом, φ_t^X представляет собой отображение в многообразие $\mathscr{X}$ подмножества $D_t \subset \mathscr{X}$, состоящего из точек $p \in \mathscr{X}$, для которых точка $\gamma_p^X(t)$ определена.

Задача 2. Докажите, что *множество D_t открыто (в $\mathscr{X}$), а (при $D_t \neq \varnothing$) отображение φ_t^X: $D_t \to \mathscr{X}$ гладко.* [Указание. Воспользуйтесь теоремой о зависимости решений систем дифференциальных уравнений от начальных данных, доказываемой в курсе теории дифференциальных уравнений.]

Задача 3. Докажите, что отображения $\varphi_t = \varphi_t^X$ обладают следующими свойствами:

а) Существует такая непрерывная функция ε: $\mathscr{X} \to \mathbb{R}$, принимающая положительные значения, что $p \in D_t$ при $|t| < \varepsilon(p)$.

б) Отображение φ_0 определено на всем $\mathscr{X}$ (т. е. $D_0=\mathscr{X}$) и является тождественным отображением id многообразия $\mathscr{X}$.

в) Если $\varphi_t(p) \in D_s$ (в частности, если $|s| < \varepsilon(\varphi_t(p))$), то $p \in D_{s+t}$ и

$$\varphi_s(\varphi_t(p))=\varphi_{s+t}(p). \tag{6}$$

[Указание. Для доказательства утверждения **а** воспользуйтесь теоремой о зависимости решений дифференциальных уравнений начальных данных. Утверждение **б** очевидно, а для доказательства утверждения **в** достаточно заметить, что обе кривые $s \mapsto \gamma_{\varphi_t(p)}^X(s)$ и $s \mapsto \gamma_p^X(s+t)$ являются максимальными интегральными кривыми поля X, проходящими при $s=0$ через точку $\varphi_t(p)$.]

Допуская определенную вольность, свойство **в** обычно записывают в виде тождества

$$\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}.$$

Определение 3. Семейство гладких отображений φ_t: $D_t \to \mathscr{X}$, обладающее свойствами **а**, **б** и **в**, называется *потоком* на многообразии $\mathscr{X}$.

Таким образом, мы видим, что *каждое векторное поле* $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ *индуцирует на* $\mathscr{X}$ *некоторый поток* $\{\varphi_t^X\}$.

Обратно, каждый поток $\{\varphi_t\}$ определяет по формуле

$$X_p = \dot{\gamma}_p(0), \quad p \in \mathscr{X},$$

где γ_p—кривая $t \mapsto \varphi_t(p)$, $|t| < \varepsilon(p)$, некоторое векторное поле X на многообразии $\mathscr{X}$.

Поток $\{\varphi'_t: D'_t \to \mathscr{X}\}$ называется *частью* потока $\{\varphi_t: D_t \to \mathscr{X}\}$, если $D'_t \subset D_t$ и $\varphi_t|_{D'_t} = \varphi'_t$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Поток $\{\varphi_t\}$ называется *максимальным*, если он не является частью никакого другого потока.

Ясно, что:

1° Поток $\{\varphi_t\}$ и любая его часть $\{\varphi'_t\}$ порождают одно и то же векторное поле X.

2° Поток $\{\varphi_t^X\}$, индуцированный векторным полем X, максимален.

Поэтому *формула*

$$\textit{поле } X \Rightarrow \textit{поток } \{\varphi_t^X\}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторными полями и максимальными потоками на $\mathscr{X}$.

Так как функция ε непрерывна и, значит,

$$\lim_{t \to 0} \varepsilon(\varphi_t(p)) = \varepsilon(p) > 0$$

для любой точки $p \in \mathscr{X}$, то существует такая непрерывная функция δ: $\mathscr{X} \to \mathbb{R}$, что

$$|t| < \varepsilon(\varphi_t(p)) \text{ при } |t| < \delta(p).$$

Пусть O_t—открытое подмножество многообразия $\mathscr{X}$, состоящее из всех точек $p \in \mathscr{X}$, для которых $|t| < \delta(p)$. Тогда существует такое $\delta_0 > 0$, а именно, $\delta_0 = \delta(p_0)$, что $p_0 \in O_t$ при $|t| < \delta_0$ (так что при достаточно малом t множество O_t заведомо не пусто).

Так как при $p \in O_t$, т. е. при $|t| < \delta(p)$, определена точка $\varphi_{-t}(\varphi_t(p))$, совпадающая, согласно свойству **в**, с точкой p, то ограничение отображения φ_t на множестве O_t является биективным отображением этого множества на (очевидно, открытое) множество $O'_t = \varphi_t O_t$ (с обратным отображением $\varphi_{-t}|_{O'_t}$). Поскольку оба отображения φ_t и

φ_{-t} по определению гладки, этим доказано, что *для каждого* $t \in \mathbb{R}$ (*для которого множество* O_t *не пусто*) *отображение* φ_t *является диффеоморфизмом* $O_t \to O'_t$.

Пусть теперь $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — произвольный диффеоморфизм гладких многообразий, и пусть S — тензорное поле типа (a, b) на многообразии $\mathscr{Y}$. По определению в каждой карте (V, k) на $\mathscr{Y}$ поле S имеет компоненты $S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$, являющиеся гладкими функциями на V. С другой стороны, для любой карты (U, h) на $\mathscr{X}$ пара (V, k), где $V = \varphi U$, а $k = h \circ \varphi^{-1}$, будет, очевидно, картой на $\mathscr{Y}$. Пользуясь этим, мы определим тензорное поле $\varphi^* S$ на $\mathscr{X}$, считая, что в карте (U, h) оно имеет компоненты

$$(\varphi^* S)_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b} = S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b} \circ (\varphi|_U), \tag{7}$$

где $S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$ — компоненты поля S в карте $(\varphi U, h \circ \varphi^{-1})$. Поскольку для любых двух карт (U, h) и (U', h') на $\mathscr{X}$ отображение перехода $h' \circ h^{-1}$ совпадает с отображением перехода $(h' \circ \varphi^{-1}) \circ (h \circ \varphi^{-1})^{-1}$ для карт $(\varphi U, h \circ \varphi^{-1})$ и $(\varphi U', h' \circ \varphi^{-1})$, функции $(\varphi^* S)_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$ в различных картах будут связаны (на пересечении этих карт) тем же тензорным законом преобразования, что и компоненты $S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$ поля S. Следовательно, эти функции действительно будут компонентами некоторого тензорного поля $\varphi^* S$.

О поле $\varphi^* S$ мы будем говорить, что оно является результатом *переноса* поля S с $\mathscr{Y}$ на $\mathscr{X}$ посредством диффеоморфизма φ.

Пример 1. Если поле S имеет тип $(0, 0)$ (является гладкой функцией f на $\mathscr{Y}$), то

$$\varphi^* f = f \circ \varphi. \tag{8}$$

Пример 2. Если поле S имеет тип $(0, 1)$ (является векторным полем X), то

$$(\varphi^* X)_p = (d\varphi_p)^{-1} X_{\varphi(p)} \tag{9}$$

для любой точки $p \in \mathscr{X}$, где $(d\varphi_p)^{-1}\colon \mathbf{T}_{\varphi(p)}\mathscr{Y} \to \mathbf{T}_p\mathscr{X}$ — отображение, обратное к изоморфизму $d\varphi_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_{\varphi(p)}\mathscr{Y}$.

Пример 3. Если поле S имеет тип $(1, 0)$ (является ковекторным полем α), то

$$(\varphi^* \alpha)_p = (d\varphi_p)^* \alpha_{\varphi(p)} \tag{10}$$

для любой точки $p \in \mathscr{X}$, где $(d\varphi_p)^*$ — отображение $\mathbf{T}^*_{\varphi(p)}\mathscr{Y} \to \mathbf{T}^*_p\mathscr{X}$, сопряженное отображению $d\varphi_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_{\varphi(p)}\mathscr{Y}$.

Задача 4. Опишите аналогичным образом тензоры $(\varphi^*S)_p$ для тензорного поля S произвольного типа (a, b). [Указание. Соответствие $S \mapsto \varphi^*S$ сохраняет все алгебраические операции над тензорными полями. В частности,

$$\varphi^*(S \otimes T) = \varphi^*S \otimes \varphi^*T \tag{11}$$

для любых тензорных полей S и T на $\mathscr{X}$.]

Замечание 1. Легко видеть, что *для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{a}\mathscr{Y}$ и любого диффеоморфизма $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ имеет место формула*

$$[\varphi^*X, \varphi^*Y] = \varphi^*[X, Y],$$

т. е. отображение $\varphi^*\colon \mathfrak{a}\mathscr{Y} \to \mathfrak{a}\mathscr{X}$ (очевидно, линейное) является изоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{a}\mathscr{Y}$ на алгебру Ли $\mathfrak{a}\mathscr{X}$. (Для доказательства достаточно заметить, что в локальных координатах, в которых φ действует по их равенству, обе части этой формулы очевидным образом совпадают.)

Замечание 2. Обратим внимание, что, как непосредственно видно из формулы (9), перенос векторного поля возможен, вообще говоря, лишь посредством диффеоморфизма. Напротив, формула (10) имеет смысл для любого гладкого отображения $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Поэтому ковекторные поля можно переносить посредством произвольных отображений. Мы к этому вернемся в следующей лекции.

Замечание 3. Обозначив поле X через Y, а поле φ^*X через X, мы можем переписать формулу (9) в следующем виде

$$Y_{\varphi(p)} = (d\varphi)_p X_p. \tag{9'}$$

В этом виде она имеет смысл для любого гладкого отображения $\varphi\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Если для полей $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$, $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{Y}$, в каждой точке $p \in \mathscr{X}$ имеет место равенство (9′), то поля X и Y называются *φ-связанными*.

Задача 5. Докажите, что *если поля $X_1, X_2 \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ φ-связаны соответственно с полями $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$, то поле $[X_1, X_2]$ φ-связано с полем $[Y_1, Y_2]$*. [Указание. Поля $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ и $Y \in \mathfrak{a}\mathscr{Y}$ тогда и только тогда φ-связаны, когда для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathscr{Y}$ имеет место равенство $X(f \circ \varphi) = Yf \circ \varphi$.]

Применим теперь изложенную общую конструкцию к частному случаю диффеоморфизмов вида φ_t.

Пусть S — произвольное тензорное поле типа (a, b) на многообразии $\mathscr{X}$, и пусть $p \in \mathscr{X}$.

По определению $p \in O_t$ при $|t| < \delta(p)$, и, значит, для любого t с $|t| < \delta(p)$ в точке p определен тензор $(\varphi_t^* S)_p$ (где, конечно, S обозначает на самом деле ограничение тензорного поля S на O_t), а потому и тензор $(\varphi_t^* S)_p - S_p$. Мы положим

$$(\mathfrak{L}_X S)_p = \lim_{t \to 0} \frac{(\varphi_t^* S)_p - S_p}{t}, \tag{12}$$

где X — векторное поле, порожденное потоком $\{\varphi_t\}$.

Поскольку точка p была произвольной точкой многообразия, тензоры (12) составляют тензорное поле $\mathfrak{L}_X S$ типа (a, b) на многообразии $\mathscr{X}$. Ниже мы покажем, вычислив его компоненты в произвольной карте (U, h), что *поле* $\mathfrak{L}_X S$ *гладко.*

Определение 4. Поле $\mathfrak{L}_X S$ называется *производной Ли* тензорного поля S по векторному полю X.

Легко видеть, что *для каждого векторного поля* X *отображение* $\mathfrak{L}_X$ *является дифференцированием алгебры тензорных полей на многообразии* $\mathscr{X}$, т. е. оно линейно, и для любых тензорных полей S и T имеет место формула

$$\mathfrak{L}_X (S \otimes T) = \mathfrak{L}_X S \otimes T + S \otimes \mathfrak{L}_X T. \tag{13}$$

Действительно, утверждение о линейности очевидно, а для доказательства формулы (13) достаточно заметить, что, согласно формуле (11),

$$\varphi_t^* (S \otimes T) - S \otimes T = (\varphi_t^* S - S) \otimes \varphi_t^* T + S \otimes (\varphi_t^* T - T)$$

для любого t. $\square$

Задача 6. Докажите, что *операция* $\mathfrak{L}_X$ *перестановочна с операцией свертки тензорных полей* (по любой паре индексов).

Если поле S является гладкой функцией f, то, согласно формуле (12),

$$(\mathfrak{L}_X f)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\varphi_t(p)) - f(p)}{t}$$

для любой точки $p \in \mathscr{X}$. Пусть $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — такая карта многообразия $\mathscr{X}$, что $p \in U$, и пусть $f = f(x^1, \ldots, x^n)$ на U. Тогда, если $x^i = x^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, — параметрические уравнения интегральной кривой $t \mapsto \varphi_t(p)$

поля X в карте (U, h), то

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(\varphi_t(p))-f(p)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(x^1(t), \ldots, x^n(t))-f(x^1(0), \ldots, x^n(0))}{t}=$$

$$=\frac{df(x^1(t), \ldots, x^n(t))}{dt}\Big|_{t=0}=$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p\frac{dx^i(t)}{dt}\Big|_{t=0}=\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p X_p^i=(Xf)(p),$$

где X^i, $i=1, \ldots, n$,— компоненты векторного поля X в карте (U, h).

Этим доказано, что $\pounds_X f=Xf$ на U, и, значит, ввиду произвольности карты (U, h), что

(14) $$\pounds_X f=Xf \text{ на } \mathscr{X}.$$

Таким образом, *операция $\pounds_X$ является обобщением операции X с функций на произвольные тензорные поля.*

В силу формулы (13) отсюда, в частности, следует, что

(15) $$\pounds_X(fS)=Xf\cdot S+f\pounds_X S$$

для любой функции f и любого тензорного поля S.

Пусть теперь поле S является ковекторным полем α и потому, согласно формуле (10),

$$(\varphi_t^*\alpha)_p=(d\varphi)_p^*\alpha_{\varphi(p)}.$$

Следовательно, значение $(\varphi_t^*\alpha)_p A$ ковектора $\varphi_t^*\alpha$ на векторе $A\in\mathbf{T}_p\mathscr{X}$ выражается формулой

$$(\varphi_t^*\alpha)_p A=\alpha_{\varphi(p)}((d\varphi_t)_p A).$$

Поэтому, если в карте (U, h)

$$A=a^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p \quad\text{и}\quad \alpha=\alpha_j\,dx^j,$$

а отображение φ_t задается функциями

$$y^k=\varphi_t^k(x^1, \ldots, x^n),$$

то

$$(\varphi_t^*\alpha)_p A=$$

$$=[\alpha_j(\varphi_t(p))(dx^j)_{\varphi_t(p)}]\left(a^i\left(\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial x^i}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\varphi_t(p)}\right)=\alpha_j(\varphi_t(p))a^i\left(\frac{\partial\varphi_t^j}{\partial x^i}\right)_p$$

и, в частности,

$$(\varphi_t^*\alpha)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p=\alpha_j(\varphi_t(p))\left(\frac{\partial\varphi_t^j}{\partial x^i}\right)_p.$$

Поскольку для любого ковектора $\xi\in\mathbf{T}_p^*(\mathscr{X})$

$$\xi=\xi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p(dx^i)_p,$$

этим доказано, что

$$(\varphi_t^*\alpha)_p=(\alpha_j\circ\varphi_t)(p)\left(\frac{\partial\varphi_t^j}{\partial x^i}\right)_p(dx^i)_p.$$

Поэтому

$$(\varphi_t^*\alpha)_p-\alpha_p=\left[(\alpha_j\circ\varphi_t)(p)\left(\frac{\partial\varphi_t^j}{\partial x^i}\right)_p-\alpha_i(p)\right](dx^i)_p$$

и, значит,

$$(\pounds_X\alpha)_p=\beta_i(p)(dx^i)_p,$$

где

$$\beta_i(p)=\lim_{t\to 0}\frac{(\alpha_j\circ\varphi_t)(p)\left(\frac{\partial\varphi_t^j}{\partial x^i}\right)_p-\alpha_i(p)}{t}.$$

Пусть, в частности, $\alpha=dx^k$, т. е. $\alpha_j=\delta_j^k$. Тогда $(\alpha_j\circ\varphi_t)(p)=\delta_j^k$ для любого t и, значит,

$$\beta_i(p)=\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial x^i}\right)_p-\delta_i^k}{t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial x^i}\right)_p\Bigg|_{t=0}=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial t}\Bigg|_{t=0}\right)\right)_p.$$

(Заметим, что $\delta_i^k=\left(\frac{\partial\varphi_0^k}{\partial x^i}\right)_p$, ибо $\varphi_0^k(x^1,\ldots,x^n)=x^k$.) Но если, как и выше, $x^i=x^i(t)$ — параметрические уравнения кривой $t\mapsto\varphi_t(p)$ в карте (U,h), то по определению

$$x^i(t)=\varphi_t^i(x_0^1,\ldots,x_0^n),\quad i=1,\ldots,n,$$

где $x_0^1,\ldots,x_0^n$ — координаты точки p, и, значит,

$$\frac{\partial\varphi_t^k}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\frac{dx^k(t)}{dt}\Bigg|_{t=0}=X^k(p),\quad k=1,\ldots,n,$$

где X^k, $k=1,\ldots,n$, как и выше,— компоненты векторного поля X в карте (U,h). Поэтому в рассматриваемом случае

$$\beta_i(p)=\left(\frac{\partial X^k}{\partial x^i}\right)_p.$$

Этим доказано, что

$$\pounds_X dx^k = \frac{\partial X^k}{\partial x^i} dx^i \text{ на } U$$

и, значит, (см. формулу (15))

$$\pounds_X (\alpha_k dx^k) = X\alpha_k dx^k + \alpha_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} dx^i,$$

т. е.

$$\pounds_X \alpha = \left(X\alpha_i + \alpha_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i \text{ на } U, \tag{16}$$

что можно переписать и в более симметричном виде:

$$\pounds_X \alpha = \left(X^k \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^k} + \alpha_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) dx^i \text{ на } U.$$

В частности, мы видим — в полном соответствии со сделанным выше общим утверждением, — что ковекторное поле $\pounds_X \alpha$ гладко.

Производную Ли $\pounds_X Y$ векторного поля Y по векторному полю X можно получить аналогичной выкладкой. Однако проще для произвольного ковекторного поля α рассмотреть на многообразии $\mathscr{X}$ тензорное поле $\alpha \otimes Y$ и воспользоваться, во-первых, тем, что, согласно общей формуле (11),

$$\pounds_X (\alpha \otimes Y) = \pounds_X \alpha \otimes Y + \alpha \otimes \pounds_X Y$$

и, во-вторых, тем, что операция $\pounds_X$ перестановочна с операцией свертки тензорных полей по любой паре индексов (см. выше задачу 5). Поскольку в результате свертки поля $\alpha \otimes Y$ получается, очевидно, гладкая функция

$$\alpha(Y)\colon\ p \mapsto \alpha_p(Y_p),$$

отсюда вытекает, что

$$\pounds_X [\alpha(Y)] = (\pounds_X \alpha)(Y) + \alpha(\pounds_X Y). \tag{17}$$

В произвольной карте (U, h) функция $\alpha(Y)$ выражается, очевидно, формулой

$$\alpha(Y) = \alpha_i Y^i \quad \text{на} \quad U,$$

где α_i и Y^i, $i = 1, \ldots, n$, — компоненты соответственно поля α и поля Y, и, значит, в силу уже доказанных формул (14) и (16) формула (17) приобретает вид

$$X[\alpha_i Y^i] = \left(X\alpha_i + \alpha_k \frac{\partial X^k}{\partial x^i} \right) Y^i + \alpha_i Z^i \text{ на } U,$$

где Z^i, $i=1, \ldots, n$,— компоненты векторного поля $\pounds_X Y$ в карте (U, h).

В частности, при $\alpha_i = \delta_i^j$ отсюда следует, что

$$XY^j = \frac{\partial X^j}{\partial x^i} Y^i + Z^j,$$

т. е. что

$$Z^j = XY^j - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} Y^i = X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - \frac{\partial X^j}{\partial x^i} Y^i.$$

Сравнив этот результат с формулой (22) предыдущей лекции, мы немедленно обнаружим, что $Z^j = [X, Y]^j$ и, следовательно,

(18) $$\pounds_X Y = [X, Y]. \quad \bullet$$

В произвольной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ отображение

$$x \longmapsto [a, x], \qquad a, x \in \mathfrak{g},$$

обозначается символом $\operatorname{ad} a$. Пользуясь этим обозначением, мы можем формулу (18) переписать в следующем виде:

$$\pounds_X = \operatorname{ad} X \qquad \text{на } \mathfrak{a}\mathscr{X}.$$

Таким образом, мы научились вычислять операцию $\pounds_X$ на функциях, на ковекторных полях и на векторных полях. Поскольку произвольное тензорное поле S в каждой карте (U, h) выражается формулой

$$S = S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b} dx^{i_1} \otimes \ldots \otimes dx^{i_a} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_b}},$$

мы можем, следовательно, используя формулу (11) (и ее частный случай (15)), вычислить в карте (U, h) все компоненты $(\pounds_X S)_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$ поля $\pounds_X S$. Не выписывая явно соответствующую формулу, мы можем априори утверждать, что она дает выражение для компонент $(\pounds_X S)_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}$ в виде суммы произведений компонент полей S, X и их производных. Поэтому эти компоненты являются гладкими функциями, и, значит, поле $\pounds_X S$, как и утверждалось, гладко.

Задача 7. Докажите, что

$$(\pounds_X S)_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b} = \frac{\partial S_{i_1 \ldots i_a}^{j_1 \ldots j_b}}{\partial x^k} X^k +$$

$$+ S_{k i_2 \ldots i_a}^{j_1 j_2 \ldots j_b} \frac{\partial X^k}{\partial x^{i_1}} + S_{i_1 k \ldots i_a}^{j_1 j_2 \ldots j_b} \frac{\partial X^k}{\partial x^{i_2}} + \ldots + S_{i_1 \ldots i_{a-1} k}^{j_1 \ldots j_{b-1} j_b} \frac{\partial X^k}{\partial i^a} -$$

$$- S_{i_1 i_2 \ldots i_a}^{k j_2 \ldots j_b} \frac{\partial X^{j_1}}{\partial x^k} - S_{i_1 i_2 \ldots i_a}^{j_1 k \ldots j_b} \frac{\partial X^{j_2}}{\partial x^k} - \ldots - S_{i_1 \ldots i_{a-1} i_a}^{j_1 \ldots j_{b-1} k} \frac{\partial X^{j_b}}{\partial x^k}.$$