Лекция 18

Линейные дифференциальные формы.— Дифференциальные формы произвольной степени.— Дифференциальные формы как функционалы от векторных полей.— Внутреннее произведение векторного поля и дифференциальной формы.— Перенос дифференциальной формы посредством гладкого отображения.

Обратимся теперь к изучению ковекторных полей на $\mathscr{X}$. Каждое такое поле α в произвольной карте $(U, x^1 \ldots, x^n)$ записывается в виде

$$\alpha = \alpha_i dx^i \text{ на } U$$

(см. формулу (12) лекции 14), т. е. в виде линейной формы от дифференциалов $dx^1, \ldots, dx^n$ локальных координат. На этом основании ковекторные поля называются обычно *линейными дифференциальными формами* (а функции α_i, $i = 1, \ldots, n$,— их *коэффициентами* в карте (U, h)). Линейное пространство $\mathsf{T}_1\mathscr{X}$ линейных дифференциальных форм обозначается также символом $\Omega^1\mathscr{X}$.

Для любой линейной дифференциальной формы α и любого векторного поля X формула

$$\alpha(X)(p) = \alpha_p(X_p), \qquad p \in \mathscr{X},$$

определяет функцию $\alpha(X)$ на $\mathscr{X}$. Эта функция обозначается также символами $\langle\alpha, X\rangle$, $i_X\alpha$ и $X \lrcorner \alpha$ и называется *внутренним произведением* формы α и поля X. В каждой карте $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ функция $\alpha(X)$ выражается формулой

$$(1) \qquad \alpha(X) = \alpha_i X^i,$$

где X^i — компоненты поля X, а α_i — коэффициенты формы α в карте (U, h), откуда непосредственно следует, что *функция $\alpha(X)$ гладка на $\mathscr{X}$*. [В лекции 17 мы эту функцию уже *ad hoc* рассматривали при вычислении производной Ли от векторного поля.]

Таким образом, для любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^1\mathscr{X}$ формула

$$X \longmapsto \alpha(X)$$

определяет некоторое отображение

$$(2) \qquad \alpha\colon \mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}\mathscr{X},$$

являющееся, очевидно, морфизмом $\mathsf{F}\mathscr{X}$-*модулей*, т. е. удовлетворяющее соотношению

$$\alpha(fX)=f\alpha(X)$$

для любой функции $f\in\mathsf{F}\mathscr{X}$ и любого поля $X\in\mathfrak{a}\mathscr{X}$.

Мы будем говорить, что морфизм (2) порождается дифференциальной формой α.

Предложение 1. *Для любого хаусдорфова гладкого многообразия $\mathscr{X}$ соответствие*

$$\text{(3)}\qquad \textit{форма } \alpha \Rightarrow \textit{морфизм } (2)$$

представляет собой изоморфизм линейного пространства $\Omega^1\mathscr{X}$ на линейное пространство $\mathrm{Hom}_{\mathsf{F}\mathscr{X}}(\mathfrak{a}\mathscr{X},\mathsf{F}X)$ морфизмов (2).

Доказательству этого предложения мы предпошлем несколько простых лемм о морфизмах вида (2). Многообразие $\mathscr{X}$ мы будем в этих леммах считать хаусдорфовым.

Мы будем говорить, что векторные поля X и Y *совпадают вблизи точки* $p\in\mathscr{X}$, если они совпадают на некоторой окрестности этой точки. (Ср. в лекции 16 аналогичное определение для функций.)

Лемма 1 (свойство локальности морфизмов $\mathfrak{a}\mathscr{X}\longrightarrow\mathsf{F}\mathscr{X}$). *Если векторные поля X и Y совпадают вблизи точки $p\in\mathscr{X}$, то для любого морфизма* (2) *функции $\alpha(X)$ и $\alpha(Y)$ также совпадают вблизи точки p.*

Доказательство. (Ср. с доказательством следствия 2 леммы 1 лекции 16.) Пусть $X=Y$ на окрестности U точки p, и пусть φ—такая гладкая функция $\mathscr{X}\longrightarrow\mathbb{R}$, что $\varphi=0$ вне U и $\varphi=1$ на некоторой содержащейся в U окрестности W точки p (см. следствие 1 леммы 1 лекции 16). Тогда поле $\varphi\cdot(X-Y)$ равно нулю на $\mathscr{X}$, т. е. является нулем линейного пространства $\mathfrak{a}\mathscr{X}$. Поэтому в силу линейности морфизма α

$$\alpha[\varphi\cdot(X-Y)]=0$$

и, значит, $\varphi\cdot\alpha(X-Y)=0$. Поскольку $\varphi=1$ на W, этим доказано, что $\alpha(X-Y)=0$ на W и, значит, $\alpha(X)=\alpha(Y)$ на W. □

Лемма 2. *Пусть U открыто в $\mathscr{X}$, и пусть $p_0\in U$. Тогда для любого векторного поля X' на U существует такое векторное поле X на $\mathscr{X}$, что $X'=X$ вблизи точки p_0.*

Доказательство. (Ср. с доказательством леммы 1 лекции 16.) Согласно предложению 4 лекции 8 в $\mathscr{X}$

найдутся такие открытые множества V и W, что

$$p_0 \in W, \quad \overline{W} \subset V, \quad \overline{V} \subset U,$$

и для пары (V, W) существует функция Урысона φ. Для произвольной точки $p \in \mathscr{X}$ мы положим

$$X_p = \begin{cases} \varphi(p) X'_p, & \text{если} \quad p \in U, \\ 0, & \text{если} \quad p \notin U. \end{cases}$$

Ясно, что поле $X\colon p \mapsto X_p$ гладко на $\mathscr{X}$ и совпадает на W с полем X'. □

Следствие 1. *Для любой точки p_0 многообразия $\mathscr{X}$ и любого вектора $A \in \mathrm{T}_{p_0}\mathscr{X}$ существует на $\mathscr{X}$ такое векторное поле X, что*

$$X_{p_0} = A.$$

Доказательство. Пусть $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — такая карта, что $p_0 \in U$, и пусть

$$A = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{p_0}.$$

Определим на U векторное поле X', полагая

$$X'_p = a^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p$$

для каждой точки $p \in U$. Согласно лемме 2 на $\mathscr{X}$ существует такое поле X, что $X' = X$ вблизи точки p_0. В частности, $X_{p_0} = X'_{p_0} = A$. □

Следствие 2. *Для любого открытого множества $U \subset \mathscr{X}$ каждый морфизм $\alpha\colon \mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}\mathscr{X}$ индуцирует единственный морфизм*

$$\alpha_U\colon \mathfrak{a}U \to \mathsf{F}U, \tag{4}$$

для которого имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{a}\mathscr{X} & \longrightarrow & \mathfrak{a}U \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_U} \\ F\mathscr{X} & \longrightarrow & FU, \end{array} \tag{5}$$

горизонтальные стрелки которой являются отображениями ограничения, т. е. такой, что

$$\alpha(X)|_U = \alpha_U(X|_U)$$

для любого векторного поля X на $\mathscr{X}$. (Ср. с предложением 1 лекции 16.)

Доказательство. Пусть морфизм α_U существует, и пусть X — произвольное векторное поле на U. Согласно лемме 2 для любой точки $p \in U$ на $\mathscr{X}$ существует векторное поле X', совпадающее вблизи p с полем X. При этом, если $X' = X$ на окрестности W точки p, то

$$\alpha_U(X)|_W = \alpha(X')|_W$$

и, в частности,

$$\alpha_U(X)(p) = \alpha(X')(p). \tag{6}$$

Кроме того, в силу свойства локальности морфизма α для любых двух полей X' и X'' на $\mathscr{X}$, совпадающих вблизи p с полем X, будет иметь место равенство

$$\alpha(X')(p) = \alpha(X'')(p), \tag{6'}$$

показывающее, что правая часть формулы (6) не зависит от выбора поля X. Это доказывает единственность морфизма α_U.

Для доказательства существования морфизма α_U мы для любого векторного поля X на U определим функцию $\alpha_U(X)$ формулой (6). Согласно формуле (6′) это определение корректно. Более того, если $X' = X$ на окрестности W точки p, то $\alpha_U(X) = \alpha(X')$ на W, откуда следует, что функция $\alpha_U(X)$ гладка на U, и, значит, формула $\alpha_U\colon X \longrightarrow \alpha_U(X)$ определяет некоторое отображение

$$\alpha_U\colon \mathfrak{a}U \longrightarrow \mathsf{F}U.$$

Если теперь $X \in \mathfrak{a}U$ и $f \in \mathsf{F}U$, а $X_1 \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$ и $f_1 \in \mathsf{F}\mathscr{X}$, причем $X = X_1$ и $f = f_1$ вблизи точки p, то $fX = f_1X_1$ вблизи точки p, и потому

$$\begin{aligned}\alpha_U(fX)(p) &= \alpha(f_1X_1)(p) = (f_1\alpha(X))(p) = \\ &= f_1(p)\cdot\alpha(X_1)(p) = f(p)\cdot\alpha_U(X)(p) = [f\alpha_U(X)](p).\end{aligned}$$

Следовательно, $\alpha_U(fX) = f\alpha_U(X)$ и, значит, α_U является морфизмом модулей.

Наконец, так как каждое поле X на $\mathscr{X}$ может служить полем X' для поля $X|_U$ (по отношению к произвольной точке $p \in U$), то

$$\alpha_U(X|_U)(p) = \alpha(X)(p)$$

в каждой точке $p \in U$. Следовательно, диаграмма (5) коммутативна. □

Лемма 3. *В любой карте* $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ *каждый морфизм* (4) *действует по формуле*

$$\alpha_U(X) = \alpha_i X^i, \tag{7}$$

где α_i, $i=1, \ldots, n$,— *некоторые гладкие на U функции, а X^i, $i=1, \ldots, n$,— компоненты векторного поля X в карте (U, h).*

Доказательство. Так как $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на U, то

$$\alpha_U(X) = \alpha_U\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) X^i = \alpha_i X^i,$$

где $\alpha_i = \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. □

Следствие 1. *Морфизм* (4) *порождается на U дифференциальной формой*

(8) $$\alpha_U = \alpha_i \, dx^i. \ \square$$

Теперь мы уже можем доказать предложение 1.

Доказательство предложения 1. Чтобы не запутаться в отождествлениях, мы будем в этом доказательстве морфизм (2), порожденный формой α, обозначать символом $\hat{\alpha}$. Ясно, что отображение (3) линейно. Пусть $\hat{\alpha} = 0$, т. е. $\alpha_p(X_p) = 0$ для любого векторного поля X на $\mathscr{X}$ и любой точки $p \in \mathscr{X}$. Согласно следствию 1 леммы 2 для любой точки $p_0 \in \mathscr{X}$ и каждого вектора $A \in \mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$ существует такое поле $X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}$, что $X_{p_0} = A$. Следовательно, $\alpha_{p_0}(A) = 0$, т. е. $\alpha^{\bullet}_{p_0} = 0$ на $\mathbf{T}_{p_0}\mathscr{X}$. Поэтому $\alpha = 0$. Этим доказано, что отображение (3) мономорфно.

Пусть β — произвольный морфизм $\mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}\mathscr{X}$. Согласно следствию 1 леммы 3 для любой карты $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ морфизм β_U: $\mathfrak{a}U \to \mathsf{F}U$ порождается формой (8), где $\alpha_i = \beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Если $(U', h') = (U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ — другая карта и морфизм $\beta_{U'}$ на U' порождается формой $\alpha_{U'} = \alpha_{i'} \, dx^{i'}$, то в силу свойства локальности морфизма β на пересечении $U \cap U'$ будет иметь место равенство

$$\alpha_i \, dx^i = \alpha_{i'} \, dx^{i'}.$$

Это показывает, что, положив

$$\alpha_p = (\alpha_U)_p, \text{ если } p \in U,$$

мы корректно определим на $\mathscr{X}$ ковекторное поле α, обладающее тем свойством, что $\alpha|_U = \alpha_U$ для любой координатной окрестности U и потому, во-первых, гладкое, а во-вторых, порождающее данный морфизм β (т. е. такое, что $\hat{\alpha} = \beta$).

Следовательно, отображение (3) эпиморфно. □

В дальнейшем мы, как правило, будем отождествлять линейные дифференциальные формы (ковекторные поля) на $\mathscr{X}$ и порожденные ими морфизмы (2).

Замечание 1. Обратим внимание на то, что *отображение* (3) *само является морфизмом* $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-модулей*, т. е.— в обозначениях, введенных при доказательстве предложения 1,— для любой формы $\alpha \in \Omega^1\mathscr{X}$ и любой функции $f \in \mathsf{F}\mathscr{X}$ имеет место равенство

$$\widehat{f\alpha} = f\hat{\alpha},$$

где морфизм $f\hat{\alpha}$ определяется, как это принято в алгебре, формулой $(f\hat{\alpha})(X) = f\hat{\alpha}(X)$.

Особое значение имеют тензорные поля ω, сопоставляющие каждой точке $p \in \mathscr{X}$ *кососимметрический тензор* ω_p, т. е. (см. лекцию II.8) тензор типа $(r, 0)$, компоненты которого меняют знак при любой транспозиции индексов. (Число r называется при этом *степенью* поля ω.) Для любых полей θ и ω кососимметрических тензоров формула

$$(\theta \wedge \omega)_p = \theta_p \wedge \omega_p,$$

где $\theta_p \wedge \omega_p$—внешнее произведение тензоров θ_p и ω_p (см. лекцию II.9) определяет поле $\theta \wedge \omega$ кососимметрических тензоров, степень которого равна сумме степеней полей θ и ω. Так как компоненты внешнего произведения двух тензоров алгебраически выражаются через компоненты сомножителей (см. формулу (7) лекции II.9б), то *для гладких полей* θ *и* ω *поле* $\theta \wedge \omega$ *гладко.*

Все алгебраические свойства внешнего умножения кососимметрических тензоров (например, ассоциативность и кософкоммутативность; см. лекцию II.9б) сохраняются, конечно, и для их полей. Таким образом, во внешнем произведении любого числа полей кососимметрических тензоров скобки можно не писать, и для любых полей θ и ω кососимметрических тензоров имеет место формула

$$\omega \wedge \theta = (-1)^{rs}\theta \wedge \omega,$$

где r—степень поля ω, а s—степень поля θ.

При $r = 0$ поле ω является функцией f, а внешнее произведение $\omega \wedge \theta$—обычным произведением $f\theta$ функции f на поле θ.

Известные выражения кососимметрических тензоров типа $(r, 0)$ через внешние произведения ковекторов сопряженного базиса (см. формулы (3) и (5) лекции II.8) показывают, что каждое поле кососимметрических тензоров на произвольной координатной окрестности U выражается формулой

$$\omega = \frac{1}{r!}\omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_n \leqslant n} \omega_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}, \tag{9}$$

где $\omega_{i_1 \dots i_r}$ — компоненты поля ω в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$ (являющиеся гладкими функциями на U). На этом основании поля кососимметрических тензоров называются также *дифференциальными формами на многообразии* $\mathscr{X}$.

При $r = 1$ мы получаем рассмотренные выше линейные дифференциальные формы, а при $r = 0$ — гладкие функции на $\mathscr{X}$.

Все дифференциальные формы степени $r \geqslant 0$ образуют линейное подпространство $\Omega^r\mathscr{X}$ пространства $\mathsf{T}_r\mathscr{X}$ всех тензорных полей типа $(r, 0)$. Таким образом, $\Omega^0\mathscr{X} = \mathbf{F}\mathscr{X}$ и $\Omega^1\mathscr{X} = \mathsf{T}_1\mathscr{X}$ (тогда как при $r > 1$ включение $\Omega^r\mathscr{X} \subset \mathsf{T}_r\mathscr{X}$ заведомо строгое). Символ $\Omega^1\mathscr{X}$ выше мы уже использовали.

Заметим, что

$$\Omega^r\mathscr{X} = 0$$

для любого $r > n$.

Интерпретируя тензоры типа $(r, 0)$ как полилинейные функционалы от векторов, мы можем любой дифференциальной форме ω степени r и любым векторным полям $X_1, \dots, X_r$ сопоставить функцию $\omega(X_1, \dots, X_r)$ на $\mathscr{X}$, значение которой в точке $p \in \mathscr{X}$ задается формулой

$$\omega(X_1, \dots, X_r)(p) = \omega_p((X_1)_p, \dots, (X_r)_p).$$

Если в карте $(U, x^1, \dots, x^n)$

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n} \omega_{i_1 \dots i_r} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_r}$$

и

$$X_1 = X_1^{i_1}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \quad \dots, \quad X_r = X_r^{i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_r}},$$

то

$$\omega(X_1, \dots, X_r) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_r \leqslant n} \omega_{i_1 \dots i_r} \begin{vmatrix} X_1^{i_1} & \dots & X_1^{i_r} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ X_r^{i_1} & \dots & X_r^{i_r} \end{vmatrix} \quad \text{на } U$$

(см. формулу (13) лекции II.9б). Следовательно, *функция* $\omega(X_1, \ldots, X_r)$ *гладка.*

Полученное отображение

(10) $$\omega\colon \underbrace{\mathfrak{a}\mathscr{X}\times\ldots\times\mathfrak{a}\mathscr{X}}_{r\text{ раз}}\to \mathsf{F}\mathscr{X},\ (X_1, \ldots, X_r)\mapsto \omega(X_1, \ldots, X_r),$$

очевидно, $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-полилинейно*, т. е. по каждому аргументу оно является морфизмом $\mathsf{F}\mathscr{X}$-модулей. Кроме того, *оно кососимметрично*, т. е. при любой транспозиции аргументов меняет знак.

Так же как и при $r=1$ (см. предложение 1 и замечание 1), *если многообразие $\mathscr{X}$ хаусдорфово, то при любом $r\geqslant 1$ соответствие*

(11) *форма степени $r \Rightarrow$ отображение* (10)

задает изоморфное отображение $\mathsf{F}\mathscr{X}$-модуля $\Omega^r\mathscr{X}$ на $\mathsf{F}\mathscr{X}$-модуль всех кососимметрических $\mathsf{F}\mathscr{X}$-полилинейных отображений (10). Доказательство практически дословно повторяет доказательство предложения 1, и мы предоставим его читателю (обязательно подробно его проведите!). В дальнейшем мы, как правило, будем отождествлять дифференциальные формы с соответствующими отображениями (10).

Замечание 2. Аналогичным образом произвольные тензорные поля на $\mathscr{X}$ типа $(r, 0)$, $r>0$, отождествляются с (не обязательно, кососимметричными) $\mathsf{F}\mathscr{X}$-полилинейными отображениями

$$\underbrace{\mathfrak{a}\mathscr{X}\times\ldots\times\mathfrak{a}\mathscr{X}}_{r\text{ раз}}\to \mathsf{F}\mathscr{X},$$

а тензорные поля типа (r, s), $r\geqslant 0$, $s\geqslant 0$,— с $\mathsf{F}\mathscr{X}$-полилинейными отображениями вида

(12) $$S\colon \underbrace{\mathfrak{a}\mathscr{X}\times\ldots\times\mathfrak{a}\mathscr{X}}_{r\text{ раз}}\times\underbrace{\Omega^1\mathscr{X}\times\ldots\times\Omega^1\mathscr{X}}_{s\text{ раз}}\to \mathsf{F}\mathscr{X}.$$

В частности,

$$\mathfrak{a}\mathscr{X} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{F}\mathscr{X}}(\Omega^1\mathscr{X}, \mathsf{F}\mathscr{X})$$

(полю X отвечает $\mathsf{F}\mathscr{X}$-линейное отображение $i_X\colon \alpha\mapsto X \lrcorner\, \alpha$). Поэтому при $s=1$ каждое поле (12) можно интерпретировать как $\mathsf{F}\mathscr{X}$-полилинейное отображение

$$S\colon \underbrace{\mathfrak{a}\mathscr{X}\times\ldots\times\mathfrak{a}\mathscr{X}}_{r\text{ раз}}\to \mathfrak{a}\mathscr{X},$$

сопоставляющее векторным полям $X_1, \ldots, X_r$ такое векторное поле $S(X_1, \ldots, X_r)$, что

$$S(X_1, \ldots, X_r) \lrcorner \alpha = S(X_1, \ldots, X_r, \alpha)$$

для любой дифференциальной формы $\alpha \in \Omega^1\mathscr{X}$.

Задача 1. Дайте аналогичную интерпретацию отображения (12) при $s > 1$.

В силу отождествления (11) каждое векторное поле X позволяет сопоставить произвольной форме ω степени $r > 0$ форму $i_X\omega = X \lrcorner \omega$ степени $r-1$, значение которой на векторных полях $X_1, \ldots, X_{r-1}$ задается формулой

$$(X \lrcorner \omega)(X_1, \ldots, X_{r-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{r-1}).$$

Форма $X \lrcorner \omega$ называется *внутренним произведением* поля X и формы ω. [При $r = 1$ мы ее уже рассматривали в начале этой лекции.]

При $r = 0$ (т. е. в случае когда форма ω является функцией) мы по определению будем считать, что $X \lrcorner \omega = 0$ для любого поля X.

Заметим теперь, что в интерпретации дифференциальных форм как отображений (10) внешнее произведение $\theta \wedge \omega$ формы θ степени r на форму ω степени s задается формулой

$$(13)\quad (\theta \wedge \omega)(X_1, \ldots, X_{r+s}) = \\ = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \theta(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)})\, \omega(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}),$$

где суммирование распространено на все перетасовки σ типа (r, s) (см. формулу (14) лекции II.9б).

Отсюда следует, что *для внутреннего произведения* $X \lrcorner (\theta \wedge \omega)$ *векторного поля* X *на форму* $\theta \wedge \omega$ *имеет место формула*

$$(14)\quad X \lrcorner (\theta \wedge \omega) = (X \lrcorner \theta) \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge (X \lrcorner \omega),$$

где r *— степень формы* θ. Действительно, согласно формуле (13) для любых полей $X_1, \ldots, X_{r+s-1}$

$$X \lrcorner (\theta \wedge \omega)(X_1, \ldots, X_{r+s-1}) = (\theta \wedge \omega)(X, X_1, \ldots, X_{r+s-1}) = \\ = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \theta(Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(r)})\, \omega(Y_{\sigma(r+1)}, \ldots, Y_{\sigma(r+s)}),$$

$$((X \lrcorner \theta) \wedge \omega)(X_1, \ldots, X_{r+s-1}) = \\ = \sum_\sigma \varepsilon_\sigma \theta(Y_1, Y_{\sigma(2)}, \ldots, Y_{\sigma(r)})\, \omega(Y_{\sigma(r+1)}, \ldots, Y_{\sigma(r+s)}),$$

где $Y_1 = X$, $Y_2 = X_1, \ldots, Y_{r+s} = X_{r+s-1}$ и где в первой сумме σ пробегает все перетасовки типа (r, s), а во второй — только те, для которых $\sigma(1) = 1$. Поскольку для каждой перетасовки σ типа (r, s) либо $\sigma(1) = 1$, либо $\sigma(r+1) = 1$, отсюда следует, что

$$(15)\quad (X \lrcorner (\theta \wedge \omega) - (X \lrcorner \theta) \wedge \omega)(X_1, \ldots, X_{r+s-1}) = \\ = \sum_{\sigma} \varepsilon_\sigma \theta (Y_{\sigma(1)}, \ldots, Y_{\sigma(r)})\, \omega (Y_1, Y_{\sigma(r+2)}, \ldots, Y_{\sigma(r+s)}),$$

где суммирование распространено на все перетасовки σ, для которых $\sigma(r+1) = 1$.

Но каждая перетасовка σ типа (r, s) с $\sigma(r+1) = 1$ определяет по формуле

$$\tau(a) = \begin{cases} \sigma(a) - 1, & \text{если } a = 1, \ldots, r, \\ \sigma(a+1) - 1, & \text{если } a = r+1, \ldots, r+s-1, \end{cases}$$

перетасовку τ типа $(r, s-1)$, для которой

$$Y_{\sigma(1)} = X_{\tau(1)}, \quad \ldots, \quad Y_{\sigma(r)} = X_{\tau(r)},$$
$$Y_{\sigma(r+2)} = X_{\tau(r+1)}, \quad \ldots, \quad Y_{\sigma(r+s)} = X_{\tau(r+s-1)}$$

и

$$\varepsilon_\sigma = (-1)^r \varepsilon_\tau.$$

Поэтому правая часть формулы (15) равна

$$(-1)^r \sum_{\tau} \varepsilon_\tau \theta (X_{\tau(1)}, \ldots, X_{\tau(r)})\, \omega (X, X_{\tau(r+1)}, \ldots, X_{\tau(r+s-1)}) = \\ = (-1)^r (\theta \wedge (X \wedge \omega))(X_1, \ldots, X_{r+s-1}),$$

что и доказывает формулу (14). $\square$

Линейный оператор D, переводящий формы в формы, и для любых форм θ и ω удовлетворяющий соотношению

$$D(\theta \wedge \omega) = D\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge D\omega,$$

где r — степень формы θ, называется *антидифференцированием*. В этой терминологии доказанное утверждение означает, что *для любого векторного поля X оператор $i_X = X \lrcorner$ внутреннего умножения на X является антидифференцированием*.

Пусть $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ — произвольное гладкое отображение, а ω — произвольная дифференциальная форма степени $r \geqslant 0$ на многообразии $\mathscr{Y}$. Каждой точке $p \in \mathscr{X}$ мы отнесем кососимметрический тензор $(f^*\omega)_p$ пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, принимающий на векторах $A_1, \ldots, A_r \in \mathbf{T}_p\mathscr{X}$ значение

$$(f^*\omega)_p (A_1, \ldots, A_r) = \omega_q ((df)_p A_1, \ldots, (df)_p A_r),$$

где, как всегда, $q = f(p)$ и

$$(df)_p\colon \mathbf{T}_p\mathscr{X} \to \mathbf{T}_p\mathscr{Y}$$

— дифференциал отображения f в точке p. Если

$$(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n) \text{ и } (V, k) = (V, y^1, \ldots, y^m)$$

— такие карты многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, что $fU \subset V$, и если

$$y^j = f^j(x^1, \ldots, x^n), \qquad j = 1, \ldots, m,$$

— функции, выражающие в картах (U, h) и (V, k) отображение f, то

$$(df)_p\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_p\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_q, \quad i = 1, \ldots, n,$$

и потому

$$(f^*\omega)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_p \cdots \left(\frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\right)_p \omega_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_r}}\right)_q\right)$$

для любых индексов $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$. Но по определению

$$\omega_q\left(\left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_r}}\right)_q\right) = \omega_{j_1 \ldots j_r}(q) = (\omega_{j_1 \ldots j_r} \circ f)(p),$$

где $\omega_{j_1 \ldots j_r}$ — коэффициенты формы ω в карте (V, k). Вводя по аналогии функции

$$(f^*\omega)_{i_1 \ldots i_r}\colon p \mapsto (f^*\omega_p)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\right)_p\right),$$

мы получим, следовательно, что для любых индексов $i_1, \ldots, i_r = 1, \ldots, n$ на окрестности U имеет место равенство

$$(f^*\omega)_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}} (\omega_{j_1 \ldots j_r} \circ f), \tag{16}$$

показывающее, в частности, что *функции* $(f^*\omega)_{i_1 \ldots i_r}$ *гладки на* U.

Поэтому формула

$$f^*\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \cdots \sum (f^*\omega)_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \tag{17}$$

определяет на U дифференциальную форму $f^*\omega$.

Сравнение определений показывает теперь, что в каждой точке $p \in U$ эта форма принимает значение $(f^*\omega)_p$.

Этим доказано, что *соответствие*

$$p \mapsto (f^*\omega)_p$$

определяет на $\mathscr{X}$ дифференциальную форму $f^*\omega$. В каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ форма $f^*\omega$ выражается формулой (17) (т. е., иначе говоря, коэффициентами этой формы в карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ являются функции (16)).

Определение 1. О форме $f^*\omega$ говорят, что она получена из формы ω *переносом* посредством гладкого отображения f.

Ясно, что отображение

$$f^*\colon \Omega^r\mathscr{Y} \to \Omega^r\mathscr{X}, \quad \omega \mapsto f^*\omega,$$

линейно и перестановочно с внешним умножением:

$$f^*(\theta \wedge \omega) = f^*\theta \wedge f^*\omega$$

для любых форм θ и ω на $\mathscr{Y}$.

Кроме того, если $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$, то

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*,$$

а если $f = \mathrm{id}\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — тождественное отображение, то $f^*\colon \Omega^r\mathscr{X} \to \Omega^r\mathscr{X}$ — также тождественное отображение.

При $r = 0$, когда форма ω является гладкой функцией $g\colon \mathscr{Y} \to \mathbb{R}$, мы имеем

$$f^*g = g \circ f.$$

Для случая, когда f является диффеоморфизмом φ, конструкция формы $f^*\omega$ является частным случаем общей конструкции φ^*S из лекции 15. (Ср. замечание 1 лекции 15.)

Для произвольного подмногообразия $\mathscr{Y}$ многообразия $\mathscr{X}$ и отвечающего ему вложения $\iota\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ отображение

$$\iota^*\colon \Omega^r\mathscr{X} \to \Omega^r\mathscr{Y}$$

является не чем иным, как *отображением ограничения*, переводящим форму ω на $\mathscr{X}$ в форму $\omega|_{\mathscr{Y}}$ на $\mathscr{Y}$, для которой

$$(\omega|_{\mathscr{Y}})_p(A_1, \ldots, A_r) = \omega_p(A_1, \ldots, A_r)$$

в любой точке $p \in \mathscr{Y}$ и для любых векторов $A_1, \ldots, A_p \in \mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ (где, естественно, пространство $\mathbf{T}_p\mathscr{Y}$ рассматривается как подпространство пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$).

Замечание 3. Конструкция формы $f\omega^*$ немедленно переносится на произвольные тензорные поля типа $(r, 0)$, $r \geqslant 0$. Для каждого такого поля S на $\mathscr{Y}$ поле f^*S на $\mathscr{X}$

задается формулой

$$(f^*S)_p(A_1, \ldots, A_r) = S_q((df)_p A_1, \ldots, (df)_p A_r),$$

где $p \in \mathscr{X}$, $q = f(p)$ и $A_1, \ldots, A_r \in \mathbf{T}_p\mathscr{X}$, и компоненты $(f^*S)_{i_1 \ldots i_r}$ поля f^*S выражаются через компоненты $S_{i_1 \ldots i_r}$ поля S по формуле

$$(f^*S)_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}} (S_{i_1 \ldots i_r} \circ f).$$

Подчеркнем, что на поля типа (r, s) с $s > 0$ эта конструкция не обобщается (если, конечно, f не является диффеоморфизмом).