Лекция 19

Внешний дифференциал дифференциальной формы. — Производная Ли дифференциальной формы.

Как мы знаем из лекции 12, каждая гладкая функция f на многообразии $\mathscr{X}$ определяет в любой точке $p \in \mathscr{X}$ ковектор $(df)_p$, действующий по формуле

$$(df)_p A = Af, \quad A \in \mathbf{T}_p\mathscr{X},$$

и, значит, линейную дифференциальную форму

$$df\colon\ p \mapsto (df)_p,$$

называемую *дифференциалом* функции f. В каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ эта форма выражается формулой

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

и потому является гладкой формой. Как морфизм $\mathsf{F}\mathscr{X}$-модулей $\mathfrak{a}\mathscr{X} \to \mathsf{F}\mathscr{X}$ форма df действует по формуле

(1) $$df(X) = Xf, \quad X \in \mathfrak{a}\mathscr{X}.$$

Ясно, что отображение

$$d\colon\ \Omega^0\mathscr{X} \to \Omega^1\mathscr{X}, \quad f \mapsto df,$$

линейно и обладает тем свойством, что

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg$$

для любых двух функций f и g.

Оказывается, что отображение d естественным образом распространяется на дифференциальные формы любой степени.

Предложение 1. *Для любого гладкого многообразия $\mathscr{X}$ и любого $r \geqslant 0$ существует единственное отображение*

$$d\colon\ \Omega^r\mathscr{X} \to \Omega^{r+1}\mathscr{X},$$

обладающее следующими свойствами:

1° *Отображение d линейно.*

2° *Отображение d является антидифференцированием, т. е. для любых двух дифференциальных форм θ и ω имеет место равенство*

$$d(\theta \wedge \omega) = d\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge d\omega,$$

где r — степень формы θ.

3° *Для любого гладкого отображения* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *и любой формы* ω *на* $\mathscr{Y}$ *имеет место равенство*

$$df^*\omega = f^*d\omega.$$

4° *Для каждой функции* $f \in \Omega^0\mathscr{X}$ *форма* df *является ее дифференциалом* (1).

5° *Если* $\omega = df$, *где* $f \in \Omega^0\mathscr{X}$, то

$$d\omega = 0.$$

Доказательство. Как всегда в аналогичных ситуациях, докажем сначала единственность.

Пусть $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ — произвольная карта многообразия $\mathscr{X}$, и пусть

$$\omega|_U = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \ldots \sum \omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}.$$

Обозначив форму

$$d(\omega|_U) = d\omega|_U$$

символом $d\omega_U$, мы в силу свойств 1°—5° немедленно получим, что

$$(2)\quad d\omega_U = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \ldots \sum d\omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \ldots \sum \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}.$$

Следовательно, форма $d\omega_U = d\omega|_U$, а значит, — в силу произвольности координатной окрестности U — и форма $d\omega$ однозначно определяются формой ω. Это означает, что отображение d единственно.

Чтобы доказать его существование, мы на каждой координатной окрестности U определим форму $d\omega_U$ посредством формулы (2). Если $(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ — две карты многообразия $\mathscr{X}$ и если

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_r \leqslant n} \ldots \sum \omega_{i_1 \ldots i_r} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} \text{ на } U$$

и

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i'_1 < \ldots < i'_r \leqslant n} \ldots \sum \omega_{i'_1 \ldots i'_r} dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_r} \text{ на } U,$$

то

$$\omega_{i_1 \ldots i_r} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \ldots i'_r} \text{ на } U \cap U',$$

и, значит,

$$\frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^i} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} \ldots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \ldots i'_r} + \\ + \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \frac{\partial \omega_{i'_1 \ldots i'_r}}{\partial x^i}.$$

С другой стороны, для любой функции f

$$(3) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \\ = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{j<i} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \\ = \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i<j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} dx^j \wedge dx^i = \\ = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \right) dx^i \wedge dx^j = 0,$$

ибо $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$, а вторые частные производные не зависят от порядка дифференцирования. Поэтому, в частности, для любого $k = 1, \ldots, r$

$$\frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} dx^i \wedge dx^{i_k} = 0,$$

и, значит,

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial^2 x^{i'_k}}{\partial x^i \partial x^{i_k}} \ldots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_r}} \omega_{i'_1 \ldots i'_r} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \\ \ldots \wedge dx^{i_k} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = 0.$$

Следовательно, на $U \cap U'$

$$\frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = \\ = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \ldots \frac{\partial x^{i'_r}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial \omega_{i'_1 \ldots i'_r}}{\partial x^r} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = \\ = \left(\frac{\partial \omega_{i'_1 \ldots i'_r}}{\partial x^i} dx^i \right) \wedge \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} dx^{i_1} \right) \wedge \ldots \wedge \left(\frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_r}} dx^{i_r} \right) = \\ = d\omega_{i'_1 \ldots i'_r} \wedge dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_r} = \\ = \frac{\partial \omega_{i'_1 \ldots i'_r}}{\partial x^{i'}} dx^{i'} \wedge dx^{i'_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i'_r},$$

и, значит,

$$\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n}\ldots\sum\frac{\partial\omega_{i_1\ldots i_r}}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}=$$
$$=\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n}\ldots\sum\frac{\partial\omega_{i'_1\ldots i'_r}}{\partial x^{i'}}dx^{i'}\wedge dx^{i'_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i'_r}$$

на $U\cap U'$, т. е.

$$d\omega_U=d\omega_{U'} \text{ на } U\cap U'.$$

Таким образом, формы $d\omega_U$ согласованы на пересечениях и, значит, составляют дифференциальную форму $d\omega$ степени $r+1$ на многообразии $\mathscr{X}$, обладающую тем свойством, что

$$d\omega|_U=d\omega_U$$

для любой координатной окрестности U.

Тем самым отображение

$$d\colon \Omega^r\mathscr{X}\to\Omega^{r+1}\Omega$$

нами построено. Ясно, что оно обладает свойствами 1° и 4°. Кроме того, согласно формуле (3), для любой функции $f\in\mathsf{F}\mathscr{X}$ в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ имеет место равенство

$$d(df)=d\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\,\partial x^j}dx^i\wedge dx^j=0,$$

что доказывает и свойство 5°.

Проверку свойства 2° достаточно, конечно, произвести в произвольной карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$. Кроме того, в силу линейности оператора d это свойство достаточно проверить лишь для «одночленных» форм вида

$$\theta=f\,dx^\alpha \text{ и } \omega=g\,dx^\beta,$$

где положено

$$dx^\alpha=dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r} \text{ и } dx^\beta=dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_s}.$$

Но для таких форм

$$\begin{aligned}d(\theta\wedge\omega)&=d(fg\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta)=d(fg)\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta=\\&=(df\cdot g+f\cdot dg)\wedge dx^\alpha\wedge dx^\beta=\\&=df\wedge dx^\alpha\wedge g\,dx^\beta+(-1)^r(f\wedge dx^\alpha)\wedge(dg\wedge dx^\beta)=\\&=d\theta\wedge\omega+(-1)^r\theta\wedge d\omega,\end{aligned}$$

что и доказывает свойство 2°.

Аналогично, свойство 3° достаточно проверить лишь на координатных окрестностях (U, h) и (V, k), удовлетворяющих соотношению $fU\subset V$. Но в этом случае, если

$$\omega = \sum_{1<j_1<\ldots<j_r\leqslant n}\ldots\sum \omega_{j_1\ldots j_r} dy^{j_1}\wedge\ldots\wedge dy^{j_r} \text{ на } V,$$

то (см. формулы (14) и (15) лекции 16)

$$d(f^*\omega) = \sum_{1<i_1<\ldots<i_r<n}\ldots\sum d(f^*\omega)_{i_1\ldots i_r} dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r},$$

где

$$d(f^*\omega)_{i_1\ldots i_r} = d\left(\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}}(\omega_{j_1\ldots j_r}\circ f)\right) =$$

$$= \sum_{s=1}^{r}\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial^2 f^{j_s}}{\partial x^i\,\partial x^{i_s}}\ldots\frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}}(\omega_{j_1\ldots j_r}\circ f)\,dx^i +$$

$$+\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\left(\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_r}}{\partial y^j}\circ f\right)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i,$$

и, значит (см. выше аналогичные вычисления при построеиии оператора d),

$$d(f^*\omega) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r<n}\ldots\sum \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\left(\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_r}}{\partial y^j}\circ f\right)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i\wedge$$

$$\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}.$$

С другой стороны,

$$d\omega = \sum_{1<j_1<\ldots<j_r\leqslant m}\ldots\sum \frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_r}}{\partial y^j}dy^j\wedge dy^{j_1}\wedge\ldots\wedge dy^{j_r}$$

и

$$f^*(d\omega) =$$

$$= \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_r\leqslant n}\ldots\sum \left(\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_r}}{\partial y^j}\circ f\right) f^*dy^j\wedge f^*dy^{j_1}\wedge\ldots$$

$$\ldots\wedge f^*dy^{j_r} =$$

$$= \sum_{1<i_1<\ldots<i_r<n}\ldots\sum \frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\ldots\frac{\partial f^{j_r}}{\partial x^{i_r}}\left(\frac{\partial\omega_{j_1\ldots j_r}}{\partial y^j}\circ f\right)\frac{\partial f^j}{\partial x^i}dx^i\wedge$$

$$\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_r}.$$

Следовательио, $d(f^*\omega) = f^*(d\omega)$. □

Определение 1. Форма $d\omega$ называется *внешним дифференциалом* формы ω.

Чтобы коэффициенты $(d\omega)_{j_1 \ldots j_{r+1}}$ формы $d\omega$ в карте $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ выразить через коэффициенты $\omega_{i_1 \ldots i_r}$ формы ω, мы в первую очередь заметим, что в сумме (2) можно ограничиться суммированием лишь по различным индексам $i, i_1, \ldots, i_r$, так как если индекс i совпадает с одним из индексов $i_1, \ldots, i_r$ (которые по условию все различны), то соответствующее слагаемое суммы (2) равно нулю. В случае же, когда все индексы $i, i_1, \ldots, i_r$ различны, мы, расположив их в возрастающем порядке, обозначим через $j_1, \ldots, j_{r+1}$. Таким образом, если $i = j_a$, где $a = 1, \ldots, r+1$, то

$$i_1 = j_1, \ \ldots, \ i_{a-1} = j_{a-1}, \quad i_a = j_{a+1}, \ \ldots, \ i_r = j_{r+1}$$

(напомним, что по условию $i_1 < \ldots < i_r$). При этом

$$dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} = (-1)^{a-1} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_a} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{r+1}}$$

и

$$\frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^i} = \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots \hat{j}_a \ldots j_{r+1}}}{\partial x^{j_a}},$$

где знак $\wedge$ указывает, что соответствующий индекс должен быть опущен. Поскольку для любой последовательности $j_1, \ldots, j_{r+1}$ возрастающих индексов индекс i может оказаться любым из них, отсюда следует, что

$$\sum_{1 \leqslant i_k < \ldots < i_r \leqslant n} \!\!\cdots \sum \frac{\partial \omega_{i_1 \ldots i_r}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{r+1} \leqslant n} \!\!\cdots \sum \left(\sum_{a=1}^{r+1} (-1)^{a+1} \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots \hat{j}_a \ldots j_{r+1}}}{\partial x^{j_a}} \right) dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{r+1}},$$

т. е. что

$$(d\omega)_{j_1 \ldots j_{r+1}} = \sum_{a=1}^{r+1} (-1)^{a+1} \frac{\partial \omega_{j_1 \ldots \hat{j}_a \ldots j_{r+1}}}{\partial x^{j_a}}. \tag{4}$$

Например, для линейной формы $\alpha = \alpha_i dx^i$

$$(d\alpha)_{ij} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}, \qquad i < j.$$

Предложение 2. *Рассматриваемая как* $\mathsf{F}\mathscr{X}$*-полилинейный функционал от векторных полей форма* $d\omega$ *задается формулой*

(5) $$(d\omega)(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum_{a=1}^{r+1}(-1)^{a+1}X_a\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{a=1}^{r}\sum_{b=a+1}^{r+1}(-1)^{a+b}\omega([X_a, X_b], X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1}),$$

где значок ^ *указывает, что соответствующее поле должно быть опущено.*

Доказательство. Пусть $\theta(X_1, \ldots, X_{r+1})$ — правая часть формулы (5). Ясно, что

$$\theta(X_1 + X_1', X_2, \ldots, X_{r+1}) = \theta(X_1, X_2, \ldots, X_{r+1}) + \theta(X_1', X_2, \ldots, X_{r+1})$$

для любых полей $X_1, X_1', X_2, \ldots, X_{r+1}$. Кроме того, для любой функции $f \in \mathsf{F}\mathscr{X}$

$$\theta(fX_1, X_2, \ldots, X_{r+1}) = fX_1\omega(X_2, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{a=2}^{r+1}(-1)^{a+1}X_a\omega(fX_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{b=2}^{r+1}(-1)^{b+1}\omega([fX_1, X_b], X_2, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{a=2}^{r}\sum_{b=a+1}^{r+1}(-1)^{a+b}\omega([X_a, X_b], fX_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1}) = fX_1\omega(X_2, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{a=2}^{r+1}(-1)^{a+1}X_a(f\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, X_{r+1})) + \sum_{b=2}^{r+1}(-1)^{b+1}[f\omega([X_1, X_b], X_2, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1}) - X_bf\cdot\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1})] + \sum_{a=2}^{r}\sum_{b=a+1}^{r+1}(-1)^{a+b}f\omega([X_a, X_b], X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1}) = fX_1\omega(X_2, \ldots, X_{r+1}) + \sum_{a=1}^{r+1}(-1)^{a+1}X_af\cdot\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, X_{r+1}) +$$

$$+\sum_{a=2}^{r+1}(-1)^{a+1}fX_a\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, X_{r+1})+$$
$$+\sum_{b=2}^{r+1}(-1)^{b+1}f\omega([X_1, X_b], X_2, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1})-$$
$$-\sum_{b=2}^{r+1}(-1)^{b+1}X_bf\cdot\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1})+$$
$$+\sum_{a=2}^{r}\sum_{b=a+1}^{r+1}(-1)^{a+b}f\omega([X_a, X_b], X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1})$$

(здесь мы воспользовались соотношением $[fX_1, X_b]=$ $=f[X_1, X_b]-X_bf\cdot X$; см. формулу (21) лекции 14) и, значит,

$$\theta(fX_1, X_2, \ldots, X_{r+1})-f\theta(X_1, X_2, \ldots, X_{r+1})=$$
$$=\sum_{a=2}^{r+1}(-1)^{a+1}X_af\cdot\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_a, \ldots, X_{r+1})-$$
$$-\sum_{b=2}^{r+1}(-1)^{b+1}X_bf\cdot\omega(X_1, \ldots, \hat{X}_b, \ldots, X_{r+1})=0.$$

Этим доказано, что *правая часть формулы* (5) *$\mathsf{F}\mathscr{X}$-линейна по* X_1.

Аналогично доказывается (обязательно проведите соответствующие вычисления!), что она $\mathsf{F}\mathscr{X}$-линейна и по остальным полям $X_2, \ldots, X_{r+1}$. (Иначе это можно доказать, что, впрочем, лишь чуть-чуть легче, показав, что $\theta(X_1, \ldots, X_{r+1})$ кососимметрично по $X_1, \ldots, X_{r+1}$.)

Поэтому формулу (5) достаточно — в каждой карте $(U, x^1, \ldots, x^n)$ — проверить лишь для базисных векторных полей

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ \ldots, \ X_{r+1}=\frac{\partial}{\partial x^{j_{r+1}}}.$$

Но вычислив обе части формулы (5) на этих полях, мы слева получим коэффициент $(d\omega)_{j_1\ldots j_{r+1}}$ формы $d\omega$, а справа — сумму

$$\sum_{a=1}^{r+1}(-1)^{a+1}\frac{\partial}{\partial x^{j_a}}\omega_{j_1\ldots\hat{j}\ldots j_{r+1}}$$

$\Bigl($вторая сумма исчезает, поскольку $\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$ для любых i и $j\Bigr)$. В силу формулы (4) это доказывает предложение 3. □

Замечание 1. Можно пытаться доказать предложение 2, проверив, что форма $d\omega$, определенная формулой (5), обладает свойствами 1°—5° из предложения 1. Свойство 1° (линейность отображения d) и свойство 3° (перестановочность с отображением переноса f^*) очевидны. При $r=0$ (и $\omega=f$) формула (5) переходит в формулу (1), что доказывает свойство 4°. При $r=1$ формула (5) приобретает вид

$$(6)\qquad d\omega(X, Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X, Y]).$$

Поэтому, если $\omega=df$ (и, значит, $\omega(Z)=Zf$ для любого поля Z), то

$$d\omega(X, Y)=XYf-YXf-[X, Y]f=0,$$

и свойство 5° доказано. Однако проверка оставшегося свойства 2° (осуществляемая с помощью формулы (11) лекции 17) требует хотя и несложных, но довольно громоздких вычислений с двойными суммами.

Задача 1. Проведите эти вычисления (и тем самым заново докажите предложение 3).

Оказывается, что для дифференциальных форм операция взятия производной Ли $\pounds_X$ выражается через внутренние произведения на поле X и оператор d.

Предложение 3. *Для любого векторного поля X и любой дифференциальной формы ω имеет место равенство*

$$(7)\qquad \pounds_X\omega=X \lrcorner\, d\omega+d(X \lrcorner\, \omega).$$

Доказательство. Если форма ω имеет степень $r=0$, т. е. является функцией f, то, как мы знаем (формула (14) лекции 17), левая часть формулы (7) равна Xf. В правой же части в том случае остается лишь первый член $X \lrcorner\, df=df(X)$. Поскольку $df(X)=Xf$, формула (7) при $r=0$ тем самым доказана.

Далее, из свойства 3° оператора d немедленно следует, что *оператор d перестановочен с оператором $\pounds_X$*, т. е.

$$(8)\qquad d\pounds_X\omega=\pounds_X\, d\omega$$

для любой формы ω. В частности,

$$\pounds_X df=d\pounds_X f=d(Xf)$$

для любой функции f.

С другой стороны, если $\omega = df$, то

$$X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega) = d(X \lrcorner df) = d(Xf).$$

Следовательно, формула (7) справедлива и при $\omega = df$.

Поскольку внешнее произведение форм получается альтернированием их тензорного произведения, аналог формулы (13) лекции 17 имеет место и для внешнего умножения дифференциальных форм, т. е.

$$\pounds_X(\theta \wedge \omega) = \pounds_X\theta \wedge \omega + \theta \wedge \pounds_X\omega \tag{9}$$

для любых форм θ и ω. Согласно определению 1 лекции 16 это означает, что *оператор $\pounds_X$ является дифференцированием алгебры форм на $\mathscr{X}$.*

Напротив, мы знаем, что операторы d и $X \lrcorner$ являются антидифференцированиями. Но легко видеть, что для любых двух антидифференцирований D_1 и D_2, изменяющих степени на ± 1 (или, более общо, на любое н е ч е т н о е число) *оператор $D_1D_2 + D_2D_1$ является дифференцированием.* (Действительно,

$$\begin{aligned}(D_1D_2 + D_2D_1)(\theta \wedge \omega) &= D_1(D_2\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge D_2\omega) + \\ &+ D_2(D_1\theta \wedge \omega + (-1)^r \theta \wedge D_1\omega) = D_1D_2\theta \wedge \omega + \\ &+ (-1)^{r+1} D_2\theta \wedge D_1\omega + (-1)^r D_1\theta \wedge D_2\omega + (-1)^{r+r}\theta \wedge \\ &\wedge D_1D_2\omega + D_2D_1\theta \wedge \omega + (-1)^{r\pm 1} D_1\theta \wedge D_2\omega + \\ &+ (-1)^r D_2\theta \wedge D_1\omega + (-1)^{r+r}\theta \wedge D_2D_1\omega = \\ &= (D_1D_2 + D_2D_1)\theta \wedge \omega + \theta \wedge (D_1D_2 + D_2D_1)\omega\end{aligned}$$

для любых форм θ и ω.) В частности, *дифференцированием является оператор*

$$\omega \mapsto X \lrcorner d\omega + d(X \lrcorner \omega), \tag{10}$$

фигурирующий в правой части соотношения (7).

Поскольку на любой координатной окрестности U алгебра форм порождается функциями и формами вида dx^i, на которых, как мы уже видели, операторы $\pounds_X$ и (10) совпадают, и поскольку из того, что два дифференцирования некоторой алгебры одинаково действуют на образующих, вытекает, очевидно, что эти дифференцирования совпадают всюду, этим доказано, что формула (7) имеет место на каждой координатной окрестности U. Поэтому она справедлива и на всем многообразии $\mathscr{X}$. □

В операторной форме соотношение (7) имеет вид

$$\pounds_X = i_X \circ d + d \circ i_X.$$

Задача 2. Докажите, что

$$[\mathcal{L}_X, i_Y] = i_{[X, Y]}$$

для любых векторных полей X, Y. [Указание. Обе части этой формулы являются антидифференцированиями, уменьшающими степень на -1. Кроме того, они равны нулю на функциях и одинаково действуют на всех формах вида df.]

Задача 3. Докажите, что

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}$$

на любых тензорных полях. [Указание. Обе части этой формулы являются дифференцированиями алгебры тензорных полей, одинаково действующими на функциях, векторных полях и линейных дифференциальных формах.]