Лекция 20

Комплекс де Рама и группы когомологий гладкого многообразия. — Группа $H^0\mathscr{X}$. — Лемма Пуанкаре. — Группа $H^1\mathbb{S}^2$. — Группа $H^1\mathbb{S}^1$. — Вычисление группы $H^1\mathbb{S}^1$ с помощью интегралов. — Группа $H^2\mathbb{S}^2$. — Группы $H^1\mathbb{S}^n$ при $n \geqslant 2$. — Группы $H^m\mathbb{S}^n$, $m < n$. — Группы $H^n\mathbb{S}^n$.

Равенство

$$d\omega = \theta \tag{1}$$

при заданной форме θ и неизвестной форме ω записывается в каждой карте в виде некоторой системы дифференциальных уравнений на коэффициенты формы ω. Имея в виду, что такого рода дифференциальные уравнения повсеместно встречаются в математике и физике, мы рассмотрим в этой и следующих лекциях условия, обеспечивающие существование их решений.

Предложение 1. *Для любой дифференциальной формы ω имеет место равенство*

$$dd\omega = 0.$$

Доказательство. Это равенство достаточно проверить в произвольной карте и лишь для форм вида $\omega = f\,dx^\alpha$, где $dx^\alpha = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_r}$. Но по определению

$$d(f\,dx^\alpha) = df \wedge dx^\alpha$$

и согласно свойствам 2° и 5° оператора d (см. предложение 1 лекции 19)

$$dd(f\,dx^\alpha) = d(df \wedge dx^\alpha) = ddf \wedge dx^\alpha - df \wedge ddx^\alpha = 0. \ \square$$

Предложение 1 означает, что равенство $d\theta = 0$ является необходимым условием разрешимости уравнения (1). Выяснение условий, при которых оно достаточно, требует общего исследования взаимоотношений между формами вида $d\omega$ и формами θ, для которых $d\theta = 0$.

Определение 1. Последовательность

$$C^\bullet\colon C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \xrightarrow{d^{m-1}} C^m \xrightarrow{d^m} C^{m+1} \longrightarrow \ldots$$

групп (или, в частности, линейных пространств) и их гомоморфизмов называется *коцепным комплексом* (происхождение этого термина станет ясно в лекции 29), если

$$(2) \qquad d^m \circ d^{m-1} = 0 \text{ для любого } m \geqslant 1.$$

Обычно вместо d^m пишут просто d.

Ядро $\operatorname{Ker} d^m$ гомоморфизма d^m обозначается символом $Z^m C^{\bullet}$, а его элементы называются *коциклами степени* m. Образ $\operatorname{Im} d^{m-1}$ гомоморфизма d^{m-1} обозначается символом $B^m C^{\bullet}$, а его элементы называются *кограницами степени* m. (При $m=0$ условно считается, что $B^0 C^{\bullet}=0$.) Так как, согласно условию (2), $B^m C^{\bullet} \subset Z^m C^{\bullet}$, то определена факторгруппа

$$(3) \qquad H^m C^{\bullet} = Z^m C^{\bullet} / B^m C^{\bullet}.$$

Эта факторгруппа называется *m-й группой когомологий* комплекса $C^{\bullet}$, а ее элементы — *классами когомологий*. Коциклы, принадлежащие одному классу когомологий, т. е. такие, что их разность является кограницей, называются *когомологичными*.

Согласно предложению 1 линейные пространства $\Omega^m \mathscr{X}$ и внешние дифференциалы $d\colon \Omega^m \mathscr{X} \to \Omega^{m+1} \mathscr{X}$ составляют коцепной комплекс

$$\Omega^{\bullet}\mathscr{X}\colon \ \Omega^0 \mathscr{X} \xrightarrow{d} \Omega^1 \mathscr{X} \to \ldots \to \Omega^m \mathscr{X} \xrightarrow{d} \Omega^{m+1} \mathscr{X} \to \ldots$$

Этот комплекс называется *комплексом де Рама* дифференциальных форм гладкого многообразия $\mathscr{X}$. Его группы когомологий обозначаются символами $H^m \mathscr{X}$ и называются *группами когомологий де Рама* многообразия $\mathscr{X}$. (Заметим, что на самом деле они являются линейными пространствами, но термин «линейное пространство когомологий» не употребляется.)

Кограницы комплекса де Рама, т. е. формы вида $d\omega$, называются *точными дифференциалами* или, короче, — *точными формами*.

Коциклы комплекса де Рама, т. е. формы ω, для которых $d\omega = 0$, называются *замкнутыми формами*. Класс когомологий замкнутой формы ω мы будем обозначать символом $[\omega]$.

Таким образом, необходимым условием разрешимости уравнения (1) является замкнутость формы θ, а достаточным — ее точность. В частности, уравнение (1) тогда и только тогда разрешимо для любой замкнутой формы θ степени m, когда $H^m \mathscr{X} = 0$. [Эти утверждения являются, конечно, тавтологиями. Они приобретут содержательность, когда мы научимся вычислять группу $H^m \mathscr{X}$ геометрически.]

Пусть $C^\bullet=\{C^m, d^m\}$ и $D^\bullet=\{D^m, \delta^m\}$ — два коцепных комплекса.

Определение 2. *Коцепным отображением*

$$\varphi^\bullet\colon C^\bullet\to D^\bullet$$

комплекса $C^\bullet$ в комплекс $D^\bullet$ называется такая последовательность отображений

$$\varphi^m\colon C^m\to D^m,\quad m\geqslant 0,$$

что

$$\varphi^{m+1}\circ d^m=\delta^m\circ\varphi^m$$

для любого $m\geqslant 0$, т. е. такая, что диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc}
C^0 & \xrightarrow{d^1} & C^1 & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C^m & \xrightarrow{d^m} & C^{m+1} \longrightarrow \ldots \\
\varphi^0\downarrow & & \varphi^1\downarrow & & & & \varphi^m\downarrow & & \downarrow\varphi^{m+1} \\
D^0 & \xrightarrow{\delta^0} & D^1 & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & D^m & \xrightarrow{\delta^m} & D^{m+1} \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

коммутативна. Обычно вместо $\varphi^\bullet$ и φ^m пишут просто φ.

Ясно, что любое коцепное отображение $\varphi\colon C^\bullet\to D^\bullet$ каждую группу $Z^mC^\bullet$ переводит в группу $Z^mD^\bullet$, а каждую группу $B^mC^\bullet$ — в группу $B^mD^\bullet$. Поэтому для любого $m\geqslant 0$ оно индуцирует некоторое отображение

$$\varphi^*\colon H^mC^\bullet\to H^mD^\bullet.$$

При этом для любых коцепных отображений $\varphi\colon C^\bullet\to D^\bullet$ и $\psi\colon D^\bullet\to E^\bullet$ имеет место равенство

$$(\psi\circ\varphi)^*=\psi^*\circ\varphi^*.$$

Кроме того, если $\varphi=\mathrm{id}$, то $\varphi^*=\mathrm{id}$. [Эти свойства выражают так называемую *функториальность* соответствия $\varphi\mapsto\varphi^*$. Они у нас уже неоднократно встречались.]

Свойство 3° оператора d из предложения 1 лекции 19 означает, что *для любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ гомоморфизмы $f^*\colon \Omega^m\mathscr{Y}\to\Omega^m\mathscr{X}$ составляют коцепное отображение*

$$f^\bullet\colon \Omega^\bullet\mathscr{Y}\to\Omega^\bullet\mathscr{X}$$

комплексов де Рама. Индуцированные этим коцепным отображением гомоморфизмы групп когомологий обозначаются тем же символом f^* (к недоразумениям это не приводит) и называются *гомоморфизмами, индуцированными отображением f.*

Таким образом, по определению

$$f^*[\omega] = [f^*\omega]$$

для любой замкнутой формы ω степени m на многообразии $\mathscr{Y}$.

Ясно, что если $f = \mathrm{id}\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — тождественное отображение, то $f^*\colon H^m\mathscr{X} \to H^m\mathscr{X}$ также является тождественным отображением, и для любых гладких отображений $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ имеет место равенство

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*\colon H^m\mathscr{X} \to H^m\mathscr{Z}.$$

[Соответствие $f \mapsto f^*$ обладает свойством функториальности.]

В частном случае, когда $\mathscr{X}$ является подмногообразием многообразия $\mathscr{Y}$, а f представляет собой вложение $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, класс когомологий $f^*[\omega]$ обозначается символом $[\omega]|_{\mathscr{X}}$ и называется *ограничением* класса $[\omega]$ на $\mathscr{X}$. Таким образом, по определению

$$[\omega]|_{\mathscr{X}} = [\omega|_{\mathscr{X}}]$$

для любого класса когомологий $[\omega] \in H^m\mathscr{Y}$.

Размерность

$$h^m\mathscr{X} = \dim H^m\mathscr{X}$$

группы $H^m\mathscr{X}$ (являющейся — напомним — линейным пространством) называется m-м *числом Бетти* многообразия $\mathscr{X}$. (В литературе оно часто обозначается также символом $b^m\mathscr{X}$.)

Конечно, если $\dim \mathscr{X} = n$, то

$$h^m\mathscr{X} = 0 \text{ при } m > n$$

(поскольку $\Omega^m\mathscr{X} = 0$ при $m > n$). Таким образом, интересны лишь числа Бетти

$$h^0\mathscr{X}, \ \ldots, \ h^n\mathscr{X}, \qquad n = \dim \mathscr{X}.$$

Заметим, что *равенство* $h^m\mathscr{X} = 0$ *необходимо и достаточно, чтобы на многообразии* $\mathscr{X}$ *для любой замкнутой формы* θ *степени* m *было разрешимо уравнение* (1).

Рассмотрим сначала случай $m = 0$. (Хотя уравнение (1) имеет смысл только при $m > 0$, но все же случай $m = 0$ заслуживает определенного внимания.)

Пусть $\pi_0\mathscr{X}$ — множество всех компонент связности гладкого многообразия $\mathscr{X}$.

Предложение 2. *Линеал $H^0\mathscr{X}$ естественно изоморфен линеалу $\mathbb{R}^{\pi_0\mathscr{X}}$ всевозможных отображений $\pi_0\mathscr{X} \to \mathbb{R}$. Поэтому если множество $\pi_0\mathscr{X}$ конечно, то нулевое число Бетти $h^0\mathscr{X}$ многообразия $\mathscr{X}$ равно числу $\#\pi_0\mathscr{X}$ его компонент связности:*

$$h^0\mathscr{X} = \#\pi_0\mathscr{X}.$$

В частности, $h^0\mathscr{X} > 0$ и $h^0\mathscr{X} = 1$ тогда и только тогда, когда многообразие $\mathscr{X}$ связно.

Докажем сначала одну геометрическую лемму.

Пусть $\mathfrak{U} = \{U\}$ — произвольное открытое покрытие многообразия $\mathscr{X}$. Мы будем говорить, что элементы U и V этого покрытия *сцеплены*, если в $\mathfrak{U}$ существует такая цепочка элементов $U_0, U_1, \ldots, U_m$, что $U_0 = U$, $U_m = V$ и для каждого $i = 1, \ldots, m$ множества U_{i-1} и U_i пересекаются:

$$U_{i-1} \cap U_i \neq \varnothing.$$

Лемма 1. *Каждая компонента связности C многообразия $\mathscr{X}$ содержится в объединении O подсемейства покрытия $\mathfrak{U}$, состоящего из всех его элементов, сцепленных с некоторым одним (и, следовательно, сцепленных друг с другом). Если все элементы покрытия $\mathfrak{U}$ связны, то $C = O$.*

Доказательство. Пусть p_0 — произвольная точка компоненты C, а U_0 — такой элемент покрытия $\mathfrak{U}$, что $p_0 \in U_0$. Пусть далее O — объединение всех элементов покрытия $\mathfrak{U}$, сцепленных с U_0. Ясно, что O открыто (и содержит точку p_0). Поэтому для доказательства включения $C \subset O$ достаточно доказать, что O одновременно и замкнуто.

Пусть точка p принадлежит замыканию $\overline{O}$ множества O, и пусть U — такой элемент покрытия $\mathfrak{U}$, что $p \in U$. Тогда $U \cap O \neq \varnothing$ и, значит, существует такой элемент V покрытия $\mathfrak{U}$, входящий в O, что $U \cap V \neq \varnothing$. Поэтому элемент U сцеплен с U_0 и, следовательно, $U \subset O$. Таким образом, $p \in U \subset O$ и, значит, O замкнуто.

Если все элементы покрытия $\mathfrak{U}$ связны, то, поскольку объединение связных пересекающихся множеств связно, множество O связно. Поэтому $C = O$. □

Доказательство предложения 2. По определению

$$H^0\mathscr{X} = \operatorname{Ker}\{d\colon \Omega^0\mathscr{X} \to \Omega^1\mathscr{X}\},$$

т. е.

$$H^0\mathscr{X}=\{f\in \mathsf{F}\mathscr{X};\quad df=0\}.$$

Но условие $df=0$ означает, что в любой карте $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$ имеют место равенства $\frac{\partial f}{\partial x^1}=0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^n}=0$, и, следовательно, если координатная окрестность U связна, то $f=\text{const}$ на U. При этом, если $f=c_U$ на U и $f=c_V$ на V, то при $U\cap V\neq\varnothing$ обязательно $c_U=c_V$.

Имея это в виду, рассмотрим произвольное покрытие $\mathfrak{U}$ многообразия $\mathscr{X}$, состоящее из связных координатных окрестностей. По доказанному функция f принимает одно и то же значение на любых двух пересекающихся элементах покрытия $\mathfrak{U}$. Поэтому она принимает одинаковые значения и на любых двух сцепленных элементах покрытия $\mathfrak{U}$. В силу леммы 1 отсюда следует, что функция f постоянна на каждой компоненте связности многообразия $\mathscr{X}$. Поскольку, обратно, каждая функция f, постоянная на любой компоненте связности многообразия $\mathscr{X}$, гладка на $\mathscr{X}$ и удовлетворяет соотношению $df=0$, этим доказано, что линеал $H^0\mathscr{X}$ состоит из всех функций $f\colon \mathscr{X}\longrightarrow\mathbb{R}$, постоянных на каждой компоненте связности многообразия $\mathscr{X}$ и, следовательно, естественно изоморфен линейному пространству всех отображений $\pi_0\mathscr{X}\longrightarrow\mathbb{R}$. ☐

Вычисление чисел $h^m\mathscr{X}$ при $m>0$ представляет собой, как правило, задачу довольно трудную. Для того чтобы изложить основные принципы ее решения, нам в первую очередь надо для любого многообразия $\mathscr{X}$ сравнить его группы когомологий с группами когомологий многообразия $\mathscr{X}\times\mathring{I}$, где $\mathring{I}=\mathring{\mathbb{B}}^1$ — интервал $(-1, 1)$.

Напомним (см. определение 2 лекции 15), что точками многообразия $\mathscr{X}\times\mathring{I}$ являются пары (p, t), где $p\in\mathscr{X}$, $-1<t<1$, и для каждой карты (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ пара $(U\times\mathring{I}, h\times\mathrm{id})$, где

$$(h\times\mathrm{id})(p, t)=(h(p), t)\in\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},$$

является картой многообразия $\mathscr{X}\times\mathring{I}$, причем все карты такого вида составляют атлас на $\mathscr{X}\times\mathring{I}$. Если $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты карты (U, h), то локальными координатами карты $(U\times\mathring{I}, h\times\mathrm{id})$ будут функции $x^1\circ\pi, \ldots, x^n\circ\pi$, t, где π — проекция $(p, t)\mapsto p$. Впрочем, вместо $x^1 \circ \pi, \ldots, x^n \circ \pi$ обычно пишут, не опасаясь недоразумения, просто $x^1, \ldots, x^n$.

Если локальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ и $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ карт (U, h) и (U', h') многообразия $\mathscr{X}$ связаны на $U \cap U'$ соотношениями

$$x^{i'} = x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \quad i' = 1, \ldots, n,$$

то локальные координаты $x^1, \ldots, x^n, t$ и $x^{1'}, \ldots, x^{n'}, t$ карт $(U \times \mathring{I}, h \times \mathrm{id})$ и $(U' \times \mathring{I}, h' \times \mathrm{id})$ многообразия $\mathscr{X} \times \mathring{I}$ будут связаны на $(U \cap U') \times \mathring{I} = (U \times \mathring{I}) \cap (U' \times \mathring{I})$ соотношениями

$$(4) \qquad \begin{aligned} x^{i'} &= x^{i'}(x^1, \ldots, x^n), \quad i' = 1, \ldots, n, \\ t &= t. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что для любой карты (U, h) и любой точки $q_0 = (p_0, t_0) \in U \times \mathring{I}$ последний вектор $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{q_0}$ базиса

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{q_0}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_{q_0}, \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{q_0}$$

пространства $\mathbf{T}_{q_0}(\mathscr{X} \times \mathring{I})$ *один и тот же* для всех карт (U, h) с $p_0 \in U$. Поэтому соответствие

$$q_0 \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{q_0}$$

корректно определяет на многообразии $\mathscr{X} \times \mathring{I}$ некоторое векторное поле $\frac{\partial}{\partial t}$.

Аналогично, ковектор $(dt)_{q_0}$ сопряженного базиса

$$(dx^1)_{q_0}, \ldots, (dx^n)_{q_0}, (dt)_{q_0}$$

пространства $\mathbf{T}^*_{q_0}(\mathscr{X} \times \mathring{I})$ также не зависит от выбора карты (U, h) и, значит, соответствие $q_0 \mapsto (dt)_{q_0}$ корректно определяет на многообразии $\mathscr{X} \times \mathring{I}$ линейную дифференциальную форму dt (являющуюся не чем иным, как дифференциалом гладкой функции $(p, t) \mapsto t$).

Среди дифференциальных форм на $\mathscr{X} \times \mathring{I}$ выделяются формы θ в каждой карте $(U \times \mathring{I}, x^1, \ldots, x^n, t)$, имеющие вид

$$(5) \qquad \theta = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \theta_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m},$$

где $\theta_{i_1 \ldots i_m}$ — гладкие функции от $x^1, \ldots, x^n$ и t. О таких формах мы будем говорить, что они *не зависят от dt*.

При каждом фиксированном t, $-1 < t < 1$, форму (5) мы можем считать дифференциальной формой на координатной окрестности U в многообразии $\mathscr{X}$ и ясно, поскольку формулы преобразования координат $x^1, \ldots, x^n$ на $\mathscr{X} \times \mathring{I}$ и $\mathscr{X}$ одни и те же,— что все такие формы (построенные для всевозможных (U, h)) согласованы на пересечениях и, значит, составляют некоторую форму θ_t на $\mathscr{X}$.

Очевидно, это устанавливает взаимно однозначное соответствие между формами θ на $\mathscr{X} \times \mathring{I}$, не зависящими от dt, и семействами $\{\theta_t\}$ форм на $\mathscr{X}$, *гладко* зависящих от t, $-1 < t < 1$ (т. е. таких, что в каждой координатной окрестности их коэффициенты являются гладкими функциями от t). Как правило, мы будем отождествлять θ и $\{\theta_t\}$.

Для любой формы θ, не зависящей от dt, и всех карт вида $(U \times \mathring{I}, x^1, \ldots, x^n, t)$ формы

$$\int_0^t \theta\, dt = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \!\!\cdots\! \sum \left(\int_0^t \theta_{i_1 \ldots i_m} dt \right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}$$

согласованы на пересечениях и, значит, составляют некоторую форму $\int_0^t \theta\, dt$, также не зависящую от dt.

Аналогично определяется форма $\frac{\partial \theta}{\partial t}$, в каждой карте $(U \times \mathring{I}, x^1, \ldots, x^n, t)$ задающаяся формулой

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \!\!\cdots\! \sum \frac{\partial \theta_{i_1 \ldots i_m}}{\partial t} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}.$$

При этом

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \theta\, dt \right) = \theta$$

для любой формы θ, не зависящей от dt.

Кроме того, для любого фиксированного t на $\mathscr{X}$ определена форма $d\theta_t$. Семейство форм $d\theta_t$, $-1 < t < 1$, рассматриваемое как форма на $\mathscr{X} \times \mathring{I}$, мы будем обозначать символом $\partial\theta$. Форма $\partial\theta$ имеет степень $m+1$, где m — степень формы θ и связана с внешним дифференциалом $d\theta$ формы θ формулой

$$d\theta = \partial\theta + (-1)^m \frac{\partial \theta}{\partial t} \wedge dt. \tag{6}$$

В частности,

$$d\int_0^t \theta\,dt = \partial\int_0^t \theta\,dt + (-1)^m \theta \wedge dt. \tag{7}$$

Среди дифференциальных форм на $\mathscr{X}\times\mathring{I}$, не зависящих от dt, в свою очередь выделяются формы, *не зависящие от t*, т. е. такие, что в их выражениях (5) коэффициенты $\theta_{i_1,\ldots,i_m}$ не зависят от t. Эти формы естественным образом отождествляются с формами на $\mathscr{X}$ (фактически они имеют вид $\pi^*\theta$, где θ — форма на $\mathscr{X}$, а π — проекция $\mathscr{X}\times\mathring{I}\to\mathscr{X}$), так что в силу этого отождествления

$$\Omega^n\mathscr{X}\subset\Omega^m(\mathscr{X}\times\mathring{I}) \text{ для всех } r\geqslant 0. \tag{8}$$

Формы, не зависящие от t, характеризуются, очевидно, соотношением $\frac{\partial\theta}{\partial t}=0$, и потому для них $d\theta=\partial\theta$. Это означает, что вложения (8) составляют коцепное отображение

$$\Omega^\bullet\mathscr{X}\to\Omega^\bullet(\mathscr{X}\times\mathring{I}) \tag{9}$$

и, значит, для любого $m\geqslant 0$ индуцируют гомоморфизм

$$H^m\mathscr{X}\to H^m(\mathscr{X}\times\mathring{I}) \tag{10}$$

групп когомологий (являющийся не чем иным, как гомоморфизмом π^*, индуцированным проекцией π).

Предложение 3. *Для любого $m\geqslant 0$ гомоморфизм* (10) *является изоморфизмом.*

Доказательство. Легко видеть, что произвольная форма ω на $\mathscr{X}\times\mathring{I}$ единственным образом представляется в виде

$$\omega=\theta_1\wedge dt+\theta_2, \tag{11}$$

где θ_1 и θ_2 — формы, не зависящие от dt. (Представление вида (11) возможно, конечно, в каждой координатной окрестности U и ясно, что получающиеся формы θ_1 и θ_2 согласованы на пересечениях.) Положив

$$\theta_3=(-1)^m\int_0^t \theta_1\,dt,$$

мы в силу формулы (7) получим, что

$$\omega=d\theta_3+\theta,$$

где

$$\theta=\theta_2-\partial\theta_3$$

— форма, не зависящая от dt.

Этим доказано — в случае, когда форма ω замкнута, — что

$$[\omega] = [\theta],$$

т. е. любой класс когомологий многообразия $\mathscr{X} \times \mathring{I}$ содержит форму θ, не зависящую от dt. Форма θ замкнута вместе с формой ω, т. е.

$$\partial\theta + \frac{\partial\theta}{\partial t} \wedge dt = 0$$

и, в частности, $\frac{\partial\theta}{\partial t} = 0$. Следовательно, на самом деле форма θ не зависит и от t, т. е. является образом при отображении π^* некоторой формы на $\mathscr{X}$. Этим доказано, что отображение (10) является эпиморфизмом.

С другой стороны, если форма θ, не зависящая от t, имеет вид $d\omega$, где ω — некоторая форма на $\mathscr{X} \times \mathring{I}$, то, представив форму ω в виде (11) и заметив, что

$$d(\theta_1 \wedge dt + \theta_2) = \left(\partial\theta_1 + (-1)^m \frac{\partial\theta_2}{\partial t}\right) \wedge dt + \partial\theta_2,$$

мы немедленно получим, что

$$\partial\theta_1 + (-1)^m \frac{\partial\theta_2}{\partial t} = 0 \quad \text{и} \quad \partial\theta_2 = \theta.$$

Равенство $\partial\theta_2 = \theta$ имеет место тождественно по t и, в частности, при $t = 0$. Поскольку θ от t не зависит, этим доказано, что $\partial(\theta_2)_0 = \theta$, где $(\theta_2)_0$ — значение формы θ_2 при $t = 0$, и, значит, что $d(\theta_2)_0 = \theta$ в $\mathscr{X}$. Следовательно, отображение (10) является изоморфизмом. □

Пусть $\mathring{I}^n$ — открытый куб пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из точек $t = (t_1, \ldots, t_n)$, для которых $-1 < t_1 < 1, \ldots$ $\ldots, -1 < t_n < 1$.

Следствие 1 (лемма Пуанкаре). *Любая замкнутая дифференциальная форма ω степени $m > 0$ на кубе $\mathring{I}^n$ является точной формой, т. е.*

$$h^m \mathring{I}^n = 0 \quad \textit{при} \quad m > 0.$$

Доказательство. Достаточно, заметив, что

$$\mathring{I}^n = \{\mathrm{pt}\} \times \underbrace{\mathring{I} \times \ldots \times \mathring{I}}_{n \text{ раз}},$$

где $\{\mathrm{pt}\}$ — нульмерное многообразие, состоящее из одной точки, n раз применить предложение 3. (Ясно, что $H^m\{\mathrm{pt}\}=0$ при $m>0$.) $\square$

Задача 1. Докажите, что *куб* $\mathring{I}^n$ *диффеоморфен открытому шару* $\mathring{\mathbb{B}}^n=\{x\in\mathbb{R}^n;\ |x|<1\}$. [Указание. Рассмотрите ограничение на $\mathring{\mathbb{B}}^n$ гомеоморфизма $\mathbb{B}^n\longrightarrow I^n$, построенного в доказательстве следствия 1 теоремы 2 лекции 9.]

Задача 2. Докажите, что *куб* $\mathring{I}^n$ *диффеоморфен пространству* $\mathbb{R}^n$. [Указание. Постройте диффеоморфизм $\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathring{\mathbb{B}}^n$.]

Отсюда вытекает, что в следствии 1 куб $\mathring{I}^n$ можно заменить как шаром $\mathring{\mathbb{B}}^n$, так и пространством $\mathbb{R}^n$.

Используя лемму Пуанкаре, вычислим теперь группы когомологий $H^m\mathbb{S}^n$ сферы $\mathbb{S}^n$ размерности n.

Пусть сначала $n=2$ и $m=1$.

Мы знаем (см. пример 9 лекции 6 при $n=2$), что сфера $\mathbb{S}^2$ обладает атласом, состоящим из шести карт, которые мы сейчас обозначим через (U_k, h_k), где $k=\pm1, \pm2, \pm3$. Носителями

$$U_{-3},\ U_{-2},\ U_{-1},\ U_1,\ U_2,\ U_3$$

этих карт являются полусферы, состоящие из точек $(x, y, z)\in\mathbb{S}^2$, для которых соответственно

$$x<0,\quad y<0,\quad z<0,\quad z>0,\quad y>0,\quad x>0.$$

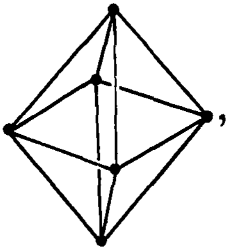
Так как каждый из этих носителей диффеоморфен открытому кругу $\mathring{\mathbb{B}}^2$, то, согласно лемме Пуанкаре, для любой замкнутой линейной дифференциальной формы α на $\mathbb{S}^2$ существуют такие гладкие функции

$$f_k\colon U_k\longrightarrow\mathbb{R},\qquad k=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,$$

что $\alpha=df_k$ на U_k. При этом для любых k и l (для которых пересечение $U_k\cap U_l$ не пусто) формы df_k и df_l совпадают на $U_k\cap U_l$, и значит, поскольку множество $U_k\cap U_l$ связно, существует такая константа c_{kl}, что

$$f_k-f_l=c_{kl}\ \text{на}\ U_k\cap U_l. \tag{12}$$

Условно изобразив окрестности U_k точками и соединив точки, отвечающие пересекающимся окрестностям, отрезками, мы наглядно представим комбинаторную схему пересечений окрестностей диаграммой вида

(13) 

являющейся не чем иным, как системой ребер октаэдра. При этом граням октаэдра будут соответствовать тройки окрестностей U_k, имеющих непустое пересечение.

Докажем теперь следующую комбинаторную лемму.

Лемма 2. *Пусть каждому ориентированному ребру kl октаэдра* (13) *сопоставлено число c_{kl}, причем выполнены следующие условия:*

а) *ребрам kl и lk сопоставлены противоположные числа:*

(14) $$c_{lk}=-c_{kl};$$

б) *для каждой грани klm имеет место соотношение*

(15) $$c_{kl}+c_{lm}+c_{mk}=0.$$

Тогда существуют такие числа b_k, что

(16) $$b_l-b_k=c_{kl}$$

для любого ребра kl.

Доказательство. Нужно доказать, что система 12 линейных уравнений (16) (относительно 6 неизвестных b_k) совместна. Для этого мы, пользуясь соотношениями (15), в первую очередь сократим число этих уравнений. Для любой грани klm октаэдра (13) соотношение (15) утверждает, что из трех уравнений (16), отвечающих ребрам этой грани, одно является следствием двух других. Поэтому каждое из этих соотношений позволяет уменьшить число уравнений (16) на единицу. Следовательно, использовав все эти соотношения (и исключив, скажем, уравнения, отвечающие ребрам, сходящимся в вершинах 1 и -1), мы получим четыре уравнения

(17) $$b_{-2}-b_{-3}=c_{\bar{3}\bar{2}},\quad b_3-b_{-2}=c_{\bar{2}3},$$
$$b_2-b_3=c_{32},\quad b_{-3}-b_2=c_{2\bar{3}}$$

для четырех оставшихся неизвестных b_{-3}, b_{-2}, b_2, b_3 (здесь и в дальнейшем мы вместо индексов -1, -2 и -3 иногда пишем $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$). Положив в этих уравнениях, например, $b_{-3}=0$, мы получим для неизвестных b_{-2}, b_2 и b_3 уравнения

$$b_{-2}=c_{\bar{3}\bar{2}}, \quad b_3-b_{-2}=c_{\bar{2}3}, \quad b_2-b_3=c_{32},$$

из которых они немедленно определяются. [Суть дела здесь в том, что уравнения (17) линейно зависимы: их сумма равна тождественно нулю (проверьте!). Геометрическая причина, почему при суммировании этих уравнений сокращаются все неизвестные, состоит в том, что уравнения (17) отвечают ребрам октаэдра (13), составляющим замкнутый путь, а причина, почему сокращаются свободные члены,— в том, что этот путь является краем пирамиды, состоящей из граней с вершиной в точке 1.]

Таким образом, при выполнении условий (15) (и (14)) уравнения (16) действительно совместны. □

Замечание 1. Лемма 2 остается, очевидно, в силе — вместе с доказательством — если c_{kl} являются элементами произвольной (аддитивно записанной) группы (например, линейного пространства). Конечно, здесь имеется в виду, что b_k ищутся в той же группе (линейном пространстве).

Так как числа c_{kl}, даваемые формулой (12), удовлетворяют, очевидно, соотношениям (14) и (15), то, согласно лемме 2, существуют такие числа b_k, $k=\pm 1, \pm 2, \pm 3$, что для любого ребра kl октаэдра (13)

$$f_k-f_l=b_l-b_k \text{ на } U_k \cap U_l,$$

т. е.

$$f_k+b_k=f_l+b_l \text{ на } U_k \cap U_l.$$

Отсюда следует, что, положив

$$f=f_k+b_k \text{ на } U_k,$$

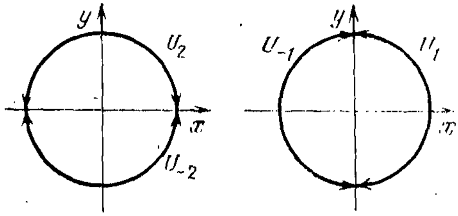
мы однозначно определим на сфере $\mathbb{S}^2$ гладкую функцию f. При этом $df=d(f_k+b_k)=df_k=\alpha$ на U_k и, следовательно, $df=\alpha$ на всей сфере $\mathbb{S}^2$.

Тем самым доказано, что *любая замкнутая дифференциальная форма α степени 1 на сфере $\mathbb{S}^2$ является точной формой*. Это означает, что $H^1\mathbb{S}^2=0$, т. е.

$$h^1\mathbb{S}^2=0. \tag{18}$$

Обратим внимание, что, кроме леммы Пуанкаре, нам понадобилась также комбинаторная лемма 2.

Попытаемся теперь тем же методом вычислить группу $H^1\mathbb{S}^1$, где $\mathbb{S}^1$ — окружность $x^2+y^2=1$.



Пусть

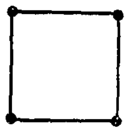
$$U_{-2},\ U_{-1},\ U_1,\ U_2$$

— полуокружности, характеризуемые соответственно неравенствами

$$x<0,\quad y<0,\quad y>0,\quad x>0.$$

Схема пересечений полуокружностей U_k, $k=\pm 1,\ \pm 2$, представляет собой квадрат:

(19)



В силу леммы Пуанкаре для каждой линейной формы ω на $\mathbb{S}^1$ (заметим,— автоматически замкнутой) и любого $k=\pm 1,\ \pm 2$ существуют такие функции f_k на U_k, что

$$\omega=df_k \text{ на } U_k.$$

При этом для любого ребра kl квадрата (19)

$$d(f_k-f_l)=0 \text{ на } U_k\cap U_l,$$

и, значит, поскольку множество $U_k\cap U_l$ связно,

$$f_k-f_l=c_{kl},$$

где c_{kl} — некоторые константы. Эти константы по-прежнему удовлетворяют соотношениям (14) (но соотношения (15) для них бессодержательны).

Мы будем называть функции $c\colon kl\mapsto c_{kl}$, определенные на ребрах квадрата (19) и удовлетворяющие соотношению (14) (т. е. такие, что $c_{lk}=-c_{kl}$), *одномерными коциклами квадрата* (19). (Аналогично, функции $c\colon kl\mapsto c_{kl}$, определенные на ребрах октаэдра (13) и удовлетворяющие соотношениям (14) и (15), называются *одномерными* *коциклами октаэдра* (13), но выше мы обошлись без этого термина.) Ясно, что все коциклы c: $kl \mapsto c_{kl}$ образуют линейное пространство Z^1 размерности 4.

Коциклы c, для которых существует такое отображение b: $k \mapsto b_k$, что

$$b_k - b_l = c_{kl} \tag{20}$$

для любого ребра kl квадрата (19), называются *кограницами*. Они образуют подпространство B^1 пространства Z^1. Соответствующее факторпространство Z^1/B^1 мы обозначим символом H^1. Его элементы (смежные классы пространства Z^1 по подпространству B^1) называются *классами когомологий* квадрата (19). О коциклах, принадлежащих одному классу когомологий, говорят, что они *когомологичны*.

[Терминология подсказывает, что здесь мы на самом деле имеем дело с некоторым коцепным комплексом в смысле определения 1. Мы разовьем эту мысль в следующей лекции.]

Построение коцикла $c \in Z^1$ по форме $\omega \in \Omega^1\mathbb{S}^1$ содержит элемент произвола, заключающийся в выборе функций f_k. Но если $\omega = df_k$ и $\omega = d\hat{f}_k$ на U_k, то $d(\hat{f}_k - f_k) = 0$ на U_k и, значит, $\hat{f}_k = f_k + b_k$, где b_k — некоторые константы. Поэтому, если $c_{kl} = f_k - f_l$ и $\hat{c}_{kl} = \hat{f}_k - \hat{f}_l$ на $U_k \cap U_l$, то

$$\hat{c}_{kl} - c_{kl} = b_k - b_l,$$

т. е. коциклы c: $kl \mapsto c_{kl}$ и $\hat{c}$: $kl \mapsto \hat{c}_{kl}$ когомологичны. Это доказывает, что формула

$$\omega \mapsto [c],$$

где $[c]$ — класс когомологий коцикла c, корректно определяет некоторое отображение

$$\Omega^1\mathbb{S}^1 \to H^1. \tag{21}$$

Если $\omega = df$, то за функции f_k мы можем принять ограничения $f|_{U_k}$ функции f. Поскольку при таком выборе этих функций числа c_{kl} равны, очевидно, нулю, мы видим, следовательно, что *на точных формах отображение* (21) *равно нулю*. Поэтому оно индуцирует некоторое отображение

$$H^1\mathbb{S}^1 \to H^1. \tag{22}$$

Оказывается, что *отображение* (22) *является мономорфизмом*, т. е. если коцикл c: $kl \mapsto c_{kl}$, отвечающий форме $\omega \in \Omega^1\mathbb{S}^1$, является кограницей, то форма ω точна. Действительно, если $c_{kl} = f_k - f_l$ на $U_k \cap U_l$ и если $c_{kl} = b_l - b_k$, то $f_k + b_k = f_l + b_l$ на $U_k \cap U_l$ и, значит, формула

$$f = f_k + b_k \quad \text{на} \quad U_k$$

корректно определяет на $\mathbb{S}^1$ некоторую функцию f. При этом, так как

$$\omega = df_k = d(f_k + b_k) = df \quad \text{на} \quad U_k,$$

то $\omega = df$ на $\mathbb{S}^1$, и, значит, форма ω точна. $\square$

До сих пор мы фактически слово в слово следовали вычислению группы $H^1\mathbb{S}^2$. Продолжая аналогию, мы должны теперь доказать аналог леммы 2 (которая в теперешних терминах утверждает, очевидно, что для октаэдра (13) имеет место равенство $H^1 = 0$). С этой целью нам нужно более внимательно проанализировать равенства (20) (по форме совпадающие с равенствами (16) из леммы 2).

Эти равенства представляют собой систему четырех уравнений

$$\begin{aligned} b_1 - b_2 &= c_{12}, \\ b_2 - b_{-1} &= c_{2\bar{1}}, \\ b_{-1} - b_{-2} &= c_{\bar{1}\bar{2}}, \\ b_{-2} - b_1 &= c_{\bar{2}1} \end{aligned} \tag{23}$$

относительно четырех неизвестных b_{-2}, b_{-1}, b_1, b_2 (как и выше, мы заменяем индексы вида $-k$ на $\bar{k}$), и утверждение, что коцикл c является кограницей, означает, что эти уравнения совместны.

Но сложив уравнения (23) и положив

$$\operatorname{Ind} c = c_{12} + c_{2\bar{1}} + c_{\bar{1}\bar{2}} + c_{\bar{2}1},$$

мы немедленно получим, что для совместности этих уравнений необходимо, чтобы $\operatorname{Ind} c = 0$.

Функция Ind представляет собой линейное отображение $Z^1 \to \mathbb{R}$, а утверждение, что равенство $\operatorname{Ind} c = 0$ необходимо для совместности уравнений (23), означает, что это отображение равно нулю на подпространстве B^1. Поэтому формула

$$\operatorname{Ind}[c] = \operatorname{Ind} c,$$

где $[c]$ — класс когомологий коцикла c, корректно определяет некоторое отображение

$$\text{(24)}\qquad \operatorname{Ind}\colon H^1 \to \mathbb{R}.$$

Из первых трех уравнений (23) мы последовательно находим, что

$$\text{(25)}\qquad \begin{aligned} b_2 &= b_1 - c_{12},\\ b_{-1} &= b_1 - c_{12} - c_{2\bar{1}},\\ b_{-2} &= b_1 - c_{12} - c_{2\bar{1}} - c_{\bar{1}\bar{2}}.\end{aligned}$$

Таким образом, при любом b_1 формулы (25) дают решение первых трех уравнений (23). Если же $\operatorname{Ind} c = 0$, то число b_{-2}, даваемое последней формулой (25), удовлетворяет, очевидно, и четвертому уравнению (23). Следовательно, условие $\operatorname{Ind} c = 0$ не только необходимо, но и достаточно для совместности уравнений (23). Для отображения (24) это означает, что оно представляет собой мономорфизм. Поскольку же это отображение, очевидно, эпиморфно, мы получаем, следовательно, что *отображение* (24) *является изоморфизмом*, и, значит,

$$\dim H^1 = 1.$$

[Таким образом, если для октаэдра $H^1 = 0$, то для квадрата $H^1 \approx \mathbb{R}$.]

В отличие от случая группы $H^1\mathbb{S}^2$, полученный результат еще не позволяет полностью определить группу $H^1\mathbb{S}^1$; из него лишь следует, что либо $H^1\mathbb{S}^1 = 0$, либо $H^1\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{R}$. Оказывается, что на самом деле имеет место второй случай, т. е.

$$\text{(26)}\qquad h^1\mathbb{S}^1 = 1.$$

Чтобы установить это, нам достаточно предъявить форму $\omega_0 \in \Omega^1\mathbb{S}^1$, для которой коцикл $c\colon kl \mapsto c_{kl}$ не является кограницей, т. е. обладает тем свойством, что $\operatorname{Ind} c \neq 0$.

Известная из школы координатизация окружности $\mathbb{S}^1$ состоит в том, что числу $t \in \mathbb{R}$ сопоставляется точка $p = (\cos t, \sin t)$ этой окружности (геометрически координата t представляет собой угол, образуемый радиус-вектором точки p с положительным направлением оси абсцисс; на этом основании мы будем называть ее *угловой координатой* на окружности). Координата t — соответствующим образом ограниченная — является локальной координатой в смысле определения 1 лекции 1 на каждой координатной окрестности U_k (но, конечно, не на всей окружности $\mathbb{S}^1$). Именно, координата t, ограниченная на

$$(0, \pi),\ (-\pi,\ 0),\quad \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right),$$

будет соответственно локальной координатой на

$$U_1,\ U_{-1},\ U_2,\ U_{-2}.$$

Эту локальную координату мы обозначим через t_k.

Таким образом,

$$(27)\qquad \begin{aligned} &t_1 = t_{-2} \text{ на } U_1 \cap U_{-2}, && t_{-1} = t_2 \text{ на } U_{-1} \cap U_2,\\ &t_{-2} = t_{-1} + 2\pi \text{ на } U_{-2} \cap U_{-1}, && t_2 = t_1 \text{ на } U_2 \cap U_1. \end{aligned}$$

Рассмотрение координаты t на всей окружности $\mathbb{S}^1$ фактически означает, что посредством отображения

$$\mathbb{R} \to \mathbb{S}^1,\quad t \mapsto (\cos t,\ \sin t),$$

мы переходим к прямой $\mathbb{R}$. Функции на $\mathbb{S}^1$ оказываются, тем самым, периодическими (с периодом 2π) функциями на $\mathbb{R}$, а линейные дифференциальные формы на $\mathbb{S}^1$ — формами $f(t)\,dt$ на $\mathbb{R}$ с периодическими коэффициентами $f(t)$.

Таким образом, в частности, на $\mathbb{S}^1$ определена форма $\omega_0 = dt$ (хотя t и не является функцией на $\mathbb{S}^1$). При этом

$$dt = dt_k \text{ на } U_k.$$

Поэтому, согласно соотношениям (27), коцикл $c = \{c_{kl}\}$ для формы ω_0 будет выражаться формулами

$$c_{kl} = \begin{cases} 2\pi, & \text{если } k = \bar{2},\ l = \bar{1},\\ -2\pi, & \text{если } k = \bar{1},\ l = \bar{2},\\ 0 & \text{для всех остальных } k \text{ и } l. \end{cases}$$

Следовательно, $\operatorname{Ind} c = 2\pi \neq 0$.

Форму ω_0 можно построить, и не обращаясь к угловой координате t.

Ясно, что x и y являются гладкими функциями на $\mathbb{S}^1$ и, значит, на $\mathbb{S}^1$ определены дифференциальные формы dx и dy.

Задача 3. Покажите, что

$$\omega_0 = x\,dy - y\,dx$$

и

$$\omega_0 = \begin{cases} -\dfrac{dx}{y} \text{ на } U_1 \text{ и } U_{-1},\\ \dfrac{dy}{x} \text{ на } U_2 \text{ и } U_{-2}. \end{cases}$$

Заново выведите отсюда, что $\operatorname{Ind} c = 2\pi$.

Группу $H^1\mathbb{S}^1$ можно также вычислить более легким способом, не использующим покрытия $\{U_k\}$, но зато апеллирующим к аналитическим соображениям.

Этот способ основывается на сопоставлении каждой форме $\omega = f(t)\,dt$ на окружности $\mathbb{S}^1$ интеграла

$$I\omega = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$

Получающееся отображение

$$\Omega^1\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}, \quad \omega \mapsto I\omega, \tag{28}$$

очевидно, линейно и эпиморфно (ибо $I\omega_0 \neq 0$ для формы $\omega = dt$). Если $\omega = dg$, где g—функция на $\mathbb{S}^1$ (периодическая функция на $\mathbb{R}$), т. е. если $f(t) = g'(t)$, то

$$I\omega = g(t)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Обратно, если $I\omega = 0$, то функция

$$g(t) = \int_0^t f(t)\,dt$$

периодична и потому является функцией на $\mathbb{S}^1$, для которой $dg = \omega$.

Таким образом, ядром отображения (28) служит подпространство точных форм, и потому это отображение индуцирует изоморфизм $H^1\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$.

Поэтому $h^1\mathbb{S}^1 = 1$.

Краткость и простота этого доказательства демонстрируют силу методов интегрального исчисления.

Вычислим теперь группу $H^2\mathbb{S}^2$.

Пусть снова $\{U_k,\ k = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3\}$—рассмотренное выше покрытие сферы $\mathbb{S}^2$, схемой взаимных пересечений элементов которого является октаэдр (13), и пусть ω—произвольная (автоматически замкнутая) форма степени 2 на сфере $\mathbb{S}^2$.

Так как каждое множество U_k диффеоморфно кругу $\mathring{\mathbb{B}}^2$, то, согласно лемме Пуанкаре, для каждого $k = \pm 1$, ± 2, ± 3 на U_k существует такая форма α_k степени 1, что $\omega = d\alpha_k$ на U_k. Для любых k и l (для которых $U_k \cap U_l \neq \varnothing$) форма $\alpha_k - \alpha_l$ замкнута на $U_k \cap U_l$, и так как множество $U_k \cap U_l$ также диффеоморфно кругу $\mathring{\mathbb{B}}^2$, то снова, согласно лемме Пуанкаре, существует такая гладкая функция $f_{kl}\colon U_k \cap U_l \to \mathbb{R}$, что

$$\alpha_k - \alpha_l = df_{kl} \text{ на } U_k \cap U_l \tag{29}$$

(при этом без ограничения общности мы можем, конечно, считать, что $f_{kl} = -f_{lk}$ для любых k и l).

Для каждых трех индексов k, l, m (для которых $U_k \cap U_l \cap U_m \neq \varnothing$) имеет место равенство

$$d(f_{kl} + f_{lm} + f_{mk}) = \alpha_k - \alpha_l + \alpha_l - \alpha_m + \alpha_m - \alpha_k = 0,$$

и, значит (поскольку множество $U_k \cap U_l \cap U_m$ связно), существуют такие константы c_{klm}, что

$$f_{kl} + f_{lm} + f_{mk} = c_{klm} \text{ на } U_k \cap U_l \cap U_m$$

(при этом без ограничения общности можно, конечно, считать, что числа c_{klm} кососимметрично зависят от индексов k, l и m, т. е. меняют знак при любой их транспозиции).

В этом построении имеется, конечно, определенный элемент произвола. Действительно, во-первых, вместо форм α_k мы можем взять любые формы $\hat{\alpha}_k$, обладающие тем свойством, что $d\hat{\alpha}_k = d\alpha_k$, т. е. такие — здесь мы снова используем лемму Пуанкаре, — что $\hat{\alpha}_k = \alpha_k + dg_k$, где $g_k\colon U_k \to \mathbb{R}$ — некоторые гладкие функции. Во-вторых, функции f_{kl} мы аналогичным образом можем заменить на функции $f_{kl} + b_{kl}$, где b_{kl} — произвольные константы (удовлетворяющие соотношению $b_{lk} = -b_{kl}$). Учет обеих возможностей приводит к тому, что функции f_{kl} заменяются функциями $f_{kl} + g_k - g_l + b_{kl}$ и, значит, числа c_{klm} — числами

$$\hat{c}_{klm} = c_{klm} + (b_{kl} + b_{lm} + b_{mk}). \tag{30}$$

(Заметим, что зависимость от функций g_k на последнем этапе исчезает.)

Таким образом, форма ω определяет кососимметрическую функцию $c\colon klm \mapsto c_{klm}$ с точностью до эквивалентности, описываемой соотношением (30).

Мы будем называть кососимметрические функции $c\colon klm \mapsto c_{klm}$ *двумерными коциклами* октаэдра (13), а коциклы, имеющие вид

$$c_{klm} = b_{kl} + b_{lm} + b_{mk}, \tag{31}$$

— *кограницами*. Все коциклы образуют линейное пространство Z^2 (размерность которого равна 8 — числу граней октаэдра (13)), а кограницы — его подпространство B^2. Соответствующее факторпространство Z^2/B^2 мы обозначим символом H^2. Его элементы, т. е. смежные классы пространства Z^2 по подпространству B^2, называются *двумерными классами когомологий* октаэдра (13).

Поскольку соотношение (30) в точности означает, что коциклы $c\colon klm \mapsto c_{klm}$ и $\hat{c}\colon klm \mapsto \hat{c}_{klm}$ принадлежат одному и тому же классу когомологий $[c]$, мы видим, что нами построено некоторое (очевидно, линейное) отображение

(32) $$\Omega^2\mathbb{S}^2 \to H^2, \quad \omega \mapsto [c].$$

Если форма ω точна, т. е. имеет вид $d\alpha$, где $\alpha \in \Omega^1\mathbb{S}^2$, то за формы α_k мы можем принять ограничения $\alpha|_{U_k}$ формы α на координатных окрестностях U_k. Тогда разности $\alpha_k - \alpha_l$ будут равны нулю, и соотношения (29) мы можем удовлетворить, приняв за f_{kl} функции, тождественно равные нулю. Поскольку при этом выборе функций f_{kl} все числа c_{klm} будут, очевидно, равны нулю, этим доказано, что *при отображении* (32) *все точные формы переходят в нуль пространства* H^2 (класс когомологий $[0]$ нулевого коцикла), и, значит, что это отображение индуцирует некоторое (также линейное) отображение

(33) $$H^2\mathbb{S}^2 \to H^2.$$

По аналогии со случаем группы $H^1\mathbb{S}^1$ естественно ожидать, что *это отображение является мономорфизмом*, т. е. если коцикл $c\colon klm \mapsto c_{klm}$, отвечающий форме ω, имеет вид (31), то форма ω точна. Но если соотношение (31) выполнено, то, заменив функции f_{kl} на разности $f_{kl} - b_{kl}$, мы получим, что $c_{klm} = 0$. Следовательно, в этом случае мы без ограничения общности можем считать, что для любой грани klm октаэдра (13) имеет место соотношение

(34) $$f_{kl} + f_{lm} + f_{mk} = 0 \text{ на } U_k \cap U_l \cap U_m.$$

Лемма 3. *Если функции $f_{kl} = -f_{lk}$ удовлетворяют соотношению* (34), *то существуют такие функции g_k: $U_k \to \mathbb{R}$, что*

$$f_{kl} = g_k - g_l \text{ на } U_k \cap U_l$$

для любого ребра kl октаэдра (13).

В лекции 20 мы докажем общую теорему 1, частным случаем которой является лемма 3. Пока же мы примем эту лемму без доказательства.

Задача 4. Соотношение (34) по форме идентично с соотношением (15) из леммы 2. Пользуясь этим (и замечанием 1), докажите лемму 3.

Из леммы 3 следует, что формы $\beta_k = \alpha_k - dg_k$ для любого ребра kl октаэдра (13) удовлетворяют соотношениям

$$\beta_k = \beta_l \text{ на } U_k \cap U_l$$

и потому составляют некоторую форму β на $\mathbb{S}^2$. При этом, так как для каждого k

$$d\beta_k = d\alpha_k = \omega \quad \text{на} \quad U_k,$$

то $d\beta = \omega$ на $\mathbb{S}^2$, и, значит, форма ω точна.

Таким образом, действительно отображение (33) является мономорфизмом. □

Далее вычисление идет по уже известному нам пути. Сначала доказывается, что $H^2 \approx \mathbb{R}$ (с помощью функционала Ind: $Z^2 \to \mathbb{R}$, равного сумме чисел c_{klm} по всем — соответствующим образом ориентированным! — граням октаэдра (13)), а затем предъявляется форма ω_0, для которой коцикл c обладает тем свойством, что $\operatorname{Ind} c \neq 0$. Окончательно получается, что $H^2\mathbb{S}^2 \approx \mathbb{R}$, т. е.

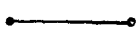
$$h^2\mathbb{S}^2 = 1. \tag{35}$$

Задача 5. Проведите подробно намеченное доказательство равенства (35). [Указание. За форму ω_0 примите форму

$$\omega_0 = x\,dy \wedge dz - y\,dx \wedge dz + z\,dx \wedge dy.$$

Установить, что эта форма не точна, проще всего, если сначала доказать с помощью формулы Стокса (впрочем, можно обойтись и формулой Грина), что *интеграл от точной формы по сфере* $\mathbb{S}^2$ *равен нулю*, а затем вычислить, что интеграл от формы ω_0 равен 4π.]

Мы видим, что даже для самых простых многообразий вычисление групп когомологий наталкивается на определенные трудности как комбинаторного, так и аналитического характера. Впрочем, что касается комбинаторных трудностей, то иногда их можно успешно преодолеть — или хотя бы уменьшить — целесообразным выбором покрытия. Например, вычисление группы $H^1\mathbb{S}^2$ существенно упростится, если мы воспользуемся двухэлементным атласом $\{(U, h), (V, k)\}$ из примера 10 лекции 6. Вместо октаэдра для этого атласа получается отрезок

,

а доказательство равенства (18) делается тривиальным.

[Согласно лемме Пуанкаре $\alpha = df_U$ на U и $\alpha = df_V$ на V, причем $f_U - f_V = b$ на $U \cap V$, где b — некоторая константа. Поэтому формула

$$f = \begin{cases} f_U & \text{на } U, \\ f_V + b & \text{на } V, \end{cases}$$

корректно определяет на $\mathbb{S}^2$ такую функцию f, что $df = \alpha$.]

Поскольку последнее доказательство дословно переносится на случай сферы $\mathbb{S}^n$ произвольной размерности $n \geqslant 2$, мы получаем даже, что

(36) $$h^1\mathbb{S}^n = 0 \quad \text{при} \quad n \geqslant 2.$$

Однако если мы попробуем этим способом вычислить числа $h^m\mathbb{S}^n$ при $m \geqslant 2$, то, помимо всего прочего, натолкнемся на ту трудность, что к пересечению $U \cap V$ карт U и V лемма Пуанкаре непосредственно неприменима (поскольку это пересечение диффеоморфно проколотому пространству $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а не шару). Тем не менее вычисление оказывается возможным, если вместо леммы Пуанкаре воспользоваться общим предложением 3 и провести индукцию по n.

Рассмотрим сначала случай, когда $0 < m < n$.

Предложение 4. *При $0 < m < n$ имеет место равенство*

(37) $$h^m\mathbb{S}^n = 0.$$

Доказательство. При $n = 2$ (когда непременно $m = 1$) равенство (37) нам уже известно (см. (18) или (36)). Проведем индукцию по n. При этом мы можем предполагать, что $m \geqslant 2$, поскольку при $m = 1$ равенство (37) выше уже также доказано.

Пусть уже доказано, что $h^m\mathbb{S}^{n-1} = 0$ при $0 < m < n - 1$, и пусть ω — произвольная замкнутая форма на $\mathbb{S}^n$ степени m, где $0 < m < n$. Рассмотрим двухэлементное покрытие $\{U, V\}$ сферы $\mathbb{S}^n$ из примера 10 лекции 6.

Задача 6. Покажите, что *множество* $U \cap V = \mathbb{S}^n \setminus \{p_0, q_0\}$ *диффеоморфно произведению* $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathring{I}$. [Указание. Постройте диффеоморфизмы $U \cap V \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathring{I} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.]

Согласно лемме Пуанкаре на U и V существуют такие формы θ_U и θ_V степени $m - 1$, что $\omega = d\theta_U$ на U и $\omega = d\theta_V$ на V. Форма $\theta_U - \theta_V$ на пересечении $U \cap V$ замкнута и имеет степень $m-1$. Но, согласно утверждению задачи 6 и предложению 3, число Бетти $h^{m-1}\mathbb{S}^{n-1}$ пересечения $U\cap V$ равно числу Бетти $h^{m-1}\mathbb{S}^{n-1}$ сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, и значит, согласно предположению индукции, равно нулю. Поэтому на $U\cap V$ существует такая форма α степени $m-2$, что

$$\theta_U-\theta_V=d\alpha.$$

Задача 7. Постройте на сфере $\mathbb{S}^n$ гладкую функцию f, принимающую значения в отрезке $[0, 1]$ и равную нулю вблизи точки q_0 (т. е. в некоторой окрестности этой точки) и единице вблизи точки p_0. [Указание. Ср. следствие 2 леммы 1 лекции 1 или предложение 2 лекции 14.]

Используя функцию f из задачи 7, мы определим на U форму α_U, а на V форму α_V, положив

$$(\alpha_U)_p=\begin{cases} f(p)\alpha_p, & \text{если } p\in U\cap V,\\ 0 & \text{в противном случае (т. е. если } p=p_0),\end{cases}$$

$$(\alpha_V)_p=\begin{cases} (f(p)-1)\alpha_p, & \text{если } p\in U\cap V,\\ 0 & \text{в противном случае (т. е. если } p=q_0).\end{cases}$$

Ясно, что формы α_U и α_V гладки и на $U\cap V$ имеет место равенство $\alpha=\alpha_U-\alpha_V$, а значит, и равенство

$$\theta_U-d\alpha_U=\theta_V-d\alpha_V \quad \text{на} \quad U\cap V.$$

Поэтому формула

$$\theta=\begin{cases} \theta_U-d\alpha_U & \text{на} \quad U,\\ \theta_V-d\alpha_V & \text{на} \quad V\end{cases}$$

корректно определяет на всей сфере $\mathbb{S}^n$ некоторую форму θ, для которой $d\theta=\omega$ на $\mathbb{S}^n$. Поскольку ω была произвольной замкнутой формой степени m на сфере $\mathbb{S}^n$, этим доказано, что $h^m\mathbb{S}^n=0$.

Тем самым предложение 4 по индукции полностью доказано. $\square$

Случай $m=n$ трактуется аналогично.

Предложение 5. *Для любого $n\geqslant 1$ имеет место равенство*

(38) $$h^n\mathbb{S}^n=1.$$

Доказательство. Поскольку при $n=1$ равенство (38) уже доказано (см. формулу (26)), мы снова можем воспользоваться индукцией по n.

Пусть $\{U, V\}$ — то же покрытие сферы $\mathbb{S}^n$, что и выше. Так как, по предположению индукции, $h^{n-1}\mathbb{S}^{n-1}=1$ и, значит,

$$h^{n-1}(U\cap V)=h^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}\times\mathring{\mathbb{I}})=h^{n-1}\mathbb{S}^{n-1}=1,$$

то на $U\cap V$ существует замкнутая, но не точная форма $\theta^{(0)}$ степени $n-1$, обладающая тем свойством, что любая форма степени $n-1$ на $U\cap V$ когомологична форме вида $a\theta^{(0)}$, где a — некоторое число.

Известным уже способом, используя функцию f из задачи 7, мы можем форму $\theta^{(0)}$ представить в виде

$$\theta^{(0)}=\theta_U^{(0)}-\theta_V^{(0)}\quad\text{на}\quad U\cap V,\tag{39}$$

где $\theta_U^{(0)}$ и $\theta_V^{(0)}$ — некоторые формы степени $n-1$ на U и V соответственно. Так как по условию $d\theta^{(0)}=0$, то, согласно формуле (39),

$$d\theta_U^{(0)}=d\theta_V^{(0)}\quad\text{на}\quad U\cap V,$$

и потому равенства

$$\omega^{(0)}=\begin{cases} d\theta_U^{(0)} & \text{на } U,\\ d\theta_V^{(0)} & \text{на } V\end{cases}$$

корректно определяют на $\mathbb{S}^n$ некоторую форму $\omega^{(0)}$ степени n.

Пусть теперь ω — произвольная форма степени n на сфере $\mathbb{S}^n$ (автоматически — замкнутая). Согласно лемме Пуанкаре на U и на V существуют такие формы θ_U и θ_V степени $n-1$, что $\omega=d\theta_U$ на U и $\omega=d\theta_V$ на V. Форма $\theta_U-\theta_V$ замкнута на $U\cap V$, и поэтому на $U\cap V$ существует такая форма α степени $n-2$ и такое число $a\in\mathbb{R}$, что

$$\theta_U-\theta_V=d\alpha+a\theta^{(0)}\quad\text{на}\quad U\cap V.$$

Представив, как и выше, форму α в виде $\alpha=\alpha_U-\alpha_V$, где α_U и α_V — формы на U и V соответственно, мы можем переписать это равенство в следующем виде:

$$\theta_U-d\alpha_U-a\theta_U^{(0)}=\theta_V-d\alpha_V-a\theta_V^{(0)}\quad\text{на}\quad U\cap V.$$

Поэтому формула

$$\beta=\begin{cases} \theta_U-d\alpha_U-a\theta_U^{(0)} & \text{на } U,\\ \theta_V-d\alpha_V-a\theta_V^{(0)} & \text{на } V\end{cases}$$

корректно определяет на $\mathbb{S}^n$ некоторую форму β степени $n-1$. При этом

$$d\beta = d\theta_U - a\,d\theta_U^{(0)} = \omega - a\omega^{(0)} \quad \text{на} \quad U$$

и

$$d\beta = d\theta_V - a\,d\theta_V^{(0)} = \omega - a\omega^{(0)} \quad \text{на} \quad V.$$

Следовательно, $d\beta = \omega - a\omega^{(0)}$ на всей сфере $\mathbb{S}^n$, т. е. форма ω когомологична форме $a\omega^{(0)}$.

Для завершения доказательства равенства (38) осталось поэтому лишь показать, что форма $\omega^{(0)}$ не когомологична нулю (не является точной формой). Но если $\omega^{(0)} = d\theta$, то на U имеет место равенство $d\theta_U^{(0)} = d(\theta|_U)$, а поэтому и равенство $\theta_U^{(0)} = \theta|_U + d\varphi_U$, где φ_U—форма степени $n-2$ на U. Аналогично, $\theta_V^{(0)} = \theta|_V + d\varphi_V$, где φ_V — гладкая функция на V.

Следовательно, на $U \cap V$

$$\theta^{(0)} = \theta_U^{(0)} - \theta_V^{(0)} = d(\varphi_U - \varphi_V),$$

т. е. форма $\theta^{(0)}$ является, вопреки предположению, точной формой. Поэтому равенство $\omega^{(0)} = d\theta$ невозможно. $\square$

На примере сфер $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^n$ мы в этой лекции продемонстрировали три главнейших способа вычисления групп когомологий многообразия (с помощью покрытий, пересечения любых подсемейств которых диффеоморфны шару, с помощью более общих покрытий, не удовлетворяющих этому условию, и с помощью интегралов). В следующих лекциях мы рассмотрим эти способы более систематично. Пример сфер будет при этом служить образцом и отправной точкой, хотя, как правило, явных ссылок на этот пример мы делать не будем.