Лекция 21

Симплициальные схемы и их геометрические реализации.— Группы когомологий симплициальных схем.— Двойной комплекс покрытия.— Группы когомологий двойного комплекса.— Окаймленные двойные комплексы.— Краевые гомоморфизмы.— Ациклические комплексы.— Ацикличность по строкам при $p=0$.

В первую очередь мы в абстрактной форме опишем комбинаторные схемы взаимных пересечений элементов покрытий гладких многообразий (или — более общо — топологических пространств).

Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное топологическое пространство и $\mathfrak{U}=\{U_k,\ k\in K\}$ — его произвольное открытое покрытие. Конечное подмножество $\{k_0, \ldots, k_m\}$ множества индексов K мы назовем *отмеченным*, если пересечение $U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_m}$ не пусто:

$$U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_m}\neq\varnothing.$$

Определение 1. Множество K, в котором отмечены некоторые конечные подмножества, называется *симплициальной схемой*, если любое подмножество отмеченного подмножества отмечено.

Ясно, что отмеченные подмножества множества индексов K покрытия $\mathfrak{U}$ удовлетворяют этому условию, и, значит, K является симплициальной схемой. Эта схема называется *нервом* покрытия $\mathfrak{U}$.

Говорят, что $m+1$ точек аффинного пространства *аффинно независимы*, если они не содержатся ни в какой $(m-1)$-мерной плоскости, т. е. если для их радиус-векторов $\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ векторы $\boldsymbol{k}_1-\boldsymbol{k}_0, \ldots, \boldsymbol{k}_m-\boldsymbol{k}_0$ линейно независимы.

Для любых $m+1$ аффинно независимых точек $\boldsymbol{k}_0, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ пространства $\mathbb{R}^n$ (или — более общо — произвольного линейного пространства над полем $\mathbb{R}$) множество всех точек $\boldsymbol{k}$ вида

$$\boldsymbol{k}=t_0\boldsymbol{k}_0+\ldots+t_m\boldsymbol{k}_m,$$

где $t_0, \ldots, t_m$ — такие вещественные числа, что

$$0\leqslant t_0\leqslant 1, \ \ldots, \ 0\leqslant t_m\leqslant 1$$

и

$$t_0+\ldots+t_m=1$$

(мы, как всегда, отождествляем точки из $\mathbb{R}^n$ с их радиус-векторами) называется *m-мерным симплексом с вершинами* $\boldsymbol{k}_0, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ и обозначается символом $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$. При $m=0$ — это точка $\boldsymbol{k}_0$, при $m=1$ — отрезок $\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_1$, при $m=2$ — треугольник $\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2$ и при $m=3$ тетраэдр $\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3$.

Числа $t_0, \ldots, t_m$ для точки $\boldsymbol{k}$ симплекса $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$ называются ее *барицентрическими координатами.*

Точка $\boldsymbol{k}$ симплекса $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$ называется его *внутренней точкой*, если $0 < t_i < 1$ для всех $i = 0, \ldots, m$. (Такая точка является внутренней точкой симплекса $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$ в общетопологическом смысле по отношению к содержащей симплекс m-мерной плоскости.)

Симплициальную схему K мы будем называть *реализуемой*, если ее элементы можно изобразить (при достаточно большом n) такими точками пространства $\mathbb{R}^n$, что:

1) для любого отмеченного множества $\{k_0, \ldots, k_m\} \subset K$ соответствующие точки $\boldsymbol{k}_0, \ldots, \boldsymbol{k}_m$ аффинно независимы (и, значит, определяют симплекс $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$);

2) симплексы $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$ и $\boldsymbol{k}'_0 \ldots \boldsymbol{k}'_{m'}$, отвечающие двум различным отмеченным подмножествам $\{k_0, \ldots, k_m\}$ и $\{k'_0, \ldots, k'_{m'}\}$ схемы K, не имеют общих внутренних точек.

В этом случае объединение всех симплексов $\boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$, отвечающих всевозможным отмеченным подмножествам $\{k_0, \ldots, k_m\}$, называется *геометрической реализацией* схемы K. Обозначается геометрическая реализация символом $|K|$.

Картинки, которые мы рисовали в предыдущей лекции, как раз и изображали геометрические реализации нервов соответствующих покрытий сферы $\mathbb{S}^2$ и окружности $\mathbb{S}^1$.

По характерной для математики тенденции к переносу терминов отмеченные подмножества схемы K принято называть ее *симплексами*. [При этом, чтобы различить — когда в этом возникает необходимость — симплексы в K от симплексов в $\mathbb{R}^n$, первые называются *абстрактными* (или *схемными*) симплексами, а вторые — *евклидовыми* (или *геометрическими*).] Элементы схемы, участвующие хотя бы в одном ее симплексе, называются ее *вершинами*, а симплекс $\{k_0, \ldots, k_m\}$ называется симплексом *с вершинами* $k_0, \ldots, k_m$.

Элементы схемы K, не являющиеся вершинами, не будут в дальнейшем участвовать ни в одной конструкции (подобно тому, как они не участвуют в геометрической реализации $|K|$), и их можно безопасно игнорировать.

[Многие авторы, определяя схемы, вводят поэтому дополнительную аксиому, требующую, чтобы каждый элемент схемы был ее вершиной. Однако тогда, определяя нерв покрытия, надо будет требовать, чтобы покрытие состояло из непустых множеств, что не всегда удобно.]

Замечание 1. Геометрические реализации нам по существу нигде нужны не будут. Мы их описали только для того, чтобы иметь возможность использовать в отношении симплициальных схем геометрический язык. Поэтому, в частности, довольно тонкий вопрос о том, какие симплициальные схемы реализуемы, мы рассматривать здесь не будем. Заметим лишь, что любая конечная симплициальная схема очевидным образом реализуема.

Задача 1. Будем говорить, что симплициальная схема K *вложенно реализуема*, если существует такая ее геометрическая реализация $|K|$, что подмножество $F \subset |K|$ тогда и только тогда замкнуто (в индуцированной топологии), когда для любого симплекса $\{k_0, \ldots, k_m\} \subset K$ замкнуто пересечение $F \cap \boldsymbol{k}_0 \ldots \boldsymbol{k}_m$. Покажите, что симплициальная схема тогда и только тогда вложенно реализуема, когда:

а) множество ее вершин конечно или счетно;

б) каждая ее вершина принадлежит лишь конечному числу симплексов;

в) существует такое n, что каждый симплекс схемы K содержит не более $n+1$ вершин.

Замечание 2. Подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, являющиеся геометрическими реализациями симплициальных схем, называются *полиэдрами*. Их топологическая теория, называемая обычно кусочно линейной топологией, тесно связана с топологической теорией гладких многообразий (можно показать — это трудная теорема! — что любое гладкое хаусдорфово многообразие со счетной базой гомеоморфно некоторому полиэдру) и продвинута весьма далеко, составляя одну из наиболее геометрически ориентированных частей современной топологии. К сожалению, эта теория полностью выходит из рамки настоящего курса.

Пусть K — произвольная симплициальная схема, и пусть K_m, $m \geqslant 0$, — подмножество произведения

$$\underbrace{K \times \ldots \times K}_{m+1 \text{ раз}},$$

состоящее из таких последовательностей $(k_0, \ldots, k_m)$, $k_0, \ldots, k_m \in K$, что множество $\{k_0, \ldots, k_m\}$ является симплексом схемы K. (Элементы из K_m называются обычно *m-мерными упорядоченными симплексами* схемы K.)

Пусть, далее, G — произвольная абелева группа (в аддитивной записи).

Определение 2. Отображение

$$c\colon K_m \to G, \quad (k_0, \ldots, k_m) \mapsto c(k_0, \ldots, k_m)$$

называется *m-мерной коцепью схемы K над группой G* (или *со значениями* в группе G), если это отображение кососимметрично, т. е. если $c(k_0, \ldots, k_m)$ меняет знак при перестановке любых двух соседних аргументов k_a, k_{a+1}, $0 \leqslant a \leqslant m-1$. Другими словами, отображение c является коцепью, если

$$(1) \qquad c(k_{\sigma(0)}, \ldots, k_{\sigma(m)}) = \varepsilon_\sigma c(k_0, \ldots, k_m)$$

для любого упорядоченного симплекса $(k_0, \ldots, k_m) \in K_m$ и любой перестановки σ индексов $0, 1, \ldots, m$ (где, как всегда, ε_σ — знак перестановки σ).

Множество всех таких коцепей является очевидным образом группой. Мы будем обозначать эту группу символом $C^m(K; G)$.

В случае, когда G является полем, группа $C^m(K; G)$ будет линейным пространством над этим полем. В частности, при $G = \mathbb{R}$ (единственно интересный нам сейчас случай!) группа $C^m(K; \mathbb{R})$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$.

Легко видеть, что для любой коцепи $c \in C^m(K; G)$ формула

$$(2) \quad (\delta c)(k_0, \ldots, k_{m+1}) = \sum_{i=0}^{m+1} (-1)^i c(k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_{m+1}),$$

где значок ^ указывает, что соответствующий элемент k_i должен быть пропущен, определяет некоторую коцепь $\delta c \in C^{m+1}(K; G)$. (Действительно, при перестановке двух соседних вершин k_a и k_{a+1}, $0 \leqslant a \leqslant m$, все члены суммы (2) меняют знак, кроме a-го и $(a+1)$-го членов, которые, входя в сумму с различными знаками, переставляются.)

Ясно, что отображение

$$\delta\colon C^m(K; G) \to C^{m+1}(K; G), \quad c \mapsto \delta c,$$

является гомоморфизмом. Этот гомоморфизм называется *кограничным оператором*.

Поскольку оператор δ определен для любого $m \geqslant 0$, мы можем составить последовательность

$$C^{\cdot}(K;G)\colon C^0(K;\ G) \xrightarrow{\delta} C^1(K;\ G) \longrightarrow \ldots$$
$$\ldots \longrightarrow C^m(K;\ G) \xrightarrow{\delta} C^{m+1}(K;\ G) \longrightarrow \ldots$$

Предложение 1. *Последовательность $C^{\cdot}(K;\ G)$ является коцепным комплексом, т. е.*

$$\delta(\delta c) = 0$$

для каждой коцепи $c \in C^m(K;\ G)$ и каждого $m \geqslant 0$.

Доказательство. Для любого упорядоченного комплекса $(k_0,\ \ldots,\ k_{m+2}) \subset K_{m+2}$ элемент $\delta(\delta c)(k_0,\ \ldots$ $\ldots,\ k_{m+2})$ группы G является суммой элементов вида

(3) $c(k_0,\ \ldots,\ \hat{k}_i,\ \ldots,\ \hat{k}_j,\ \ldots,\ k_{m+r}),\quad 0 \leqslant i < j \leqslant m+2,$

каждый из которых появляется дважды: один раз при вычислении слагаемого $(-1)^j(\delta c)(k_0,\ \ldots,\ \hat{k}_j,\ \ldots,\ k_{m+r})$, а другой — при вычислении слагаемого $(-1)^i(\delta c)(k_0,\ \ldots$ $\ldots,\ \hat{k}_i,\ \ldots,\ k_{m+r})$. При этом в первом случае слагаемое (3) будет иметь знак $(-1)^{i+j}$ (поскольку в симплексе $(k_0,\ \ldots,\ \hat{k}_j,\ \ldots,\ k_{m+r})$ вершина k_i имеет номер i), а во втором случае — знак $(-1)^{i+j-1}$ (поскольку в симплексе $(k_0,\ \ldots,\ \hat{k}_i,\ \ldots,\ k_{m+r})$ вершина k_j имеет номер $j-1$). Поэтому все слагаемые (3) сокращаются. □

Коцепи $c \in C^m(K;\ G)$, для которых $\delta c = 0$, называются *коциклами* схемы K над группой G, а коцепи вида δc, где $c \in C^{m-1}(K;\ G)$, — *кограницами*. Коциклы составляют подгруппу $Z^m(K;\ G)$ (ядро гомоморфизма $\delta\colon C^m(K;\ G) \longrightarrow$ $\longrightarrow C^{m+1}(K;\ G)$), а кограницы — подгруппу $B^m(K;\ G)$ (образ гомоморфизма $\delta\colon C^{m-1}(K;\ G) \longrightarrow C^m(K;\ G)$; при $m=0$ условно считается, что $B^0(K;\ G)=0$). Так как $B^m(K;\ G) \subset$ $\subset Z^m(K;\ G)$, то определена факторгруппа

$$H^m(K;\ G) = Z^m(K;\ G)/B^m(K;\ G).$$

Эта факторгруппа называется *m-мерной* (или *m-й*) *группой когомологий схемы K над группой G*, а ее элементы называются *классами когомологий*.

Ср. с общими определениями в начале лекции 20.

Замечание 3. Можно показать (эта трудная теорема!), что группы когомологий (и двойственным образом определяемые группы гомологий; см. ниже лекцию 28) двух схем изоморфны, если геометрические реализации этих схем гомеоморфны. Это позволяет применить аппарат групп когомологий (и гомологий) симплициальных схем к исследованию топологических свойств полиэдров. Соответствующий отдел математики называется комбинаторной топологией. Лет пятьдесят тому назад он имел самостоятельное значение, но ныне комбинаторная топология почти полностью растворилась в более общей алгебраической топологии. [Иногда термин «комбинаторная топология» применяют ко всей алгебраической топологии, однако в настоящее время это уже совершенно не отвечает фактической ситуации.]

Для случая, когда K является нервом покрытия $\mathfrak{U} = \{U_k,\ k \in K\}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$, конструкция коцепного комплекса $C^\bullet(K; G)$ (обозначаемого в этом случае символом $C^\bullet(\mathfrak{U}; G)$) может быть обобщена. Пусть для определенности $G = \mathbb{R}$.

Коцепью размерности $p \geqslant 0$ покрытия $\mathfrak{U}$ со значениями в функциях называется определенное на K_p отображение c, сопоставляющее каждому упорядоченному симплексу $(k_0, \ldots, k_p) \in K_p$ нерва K покрытия $\mathfrak{U}$ гладкую функцию

$$c(k_0, \ldots, k_p)\colon U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_p} \to \mathbb{R},$$

определенную на (непустом!) открытом множестве $U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_p}$, и удовлетворяющее условию кососимметричности (1). Все такие коцепи образуют линеал, который мы будем обозначать символом $C^{p,0}(\mathfrak{U})$. Кограница $\delta c \in C^{p+1,0}(\mathfrak{U})$ коцепи $c \in C^{p,0}(\mathfrak{U})$ определяется прежней формулой (2) (в которой m заменено на p) лишь с тем отличием, что каждое слагаемое $c(k_0, \ldots, \widehat{k_i}, \ldots, k_{p+1})$ правой части предполагается ограниченным на $U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_{p+1}}$ (без этого формула (2) не будет иметь смысла). Ясно, что соотношение $\delta(\delta c) = 0$ (вместе с доказательством) остается справедливым и в этом случае, т. е. *семейство $C^{\bullet,0}(\mathfrak{U}) = \{C^{p,0}(\mathfrak{U}), \delta\}$ линеалов $C^{p,0}(\mathfrak{U})$ и гомоморфизмов*

$$\delta\colon C^{p,0}(\mathfrak{U}) \to C^{p+1,0}(\mathfrak{U})$$

является коцепным комплексом.

Более общим образом, для любого $q \geqslant 0$ мы можем ввести в рассмотрение коцепной комплекс

$$C^{\bullet,q}(\mathfrak{U}) = \{C^{p,q}(\mathfrak{U}), \delta\},$$

состоящий из *коцепей со значениями в формах степени q*, т. е. из определенных на K_p отображений c, удовлетворяющих условию кососимметричности (1), значения $c(k_0, \ldots, k_p)$ которых являются формами степени q, определенными на $U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_p}$ (элементами линеала $\Omega^q(U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_p})$). Оператор δ определяется в этом случае той же формулой (2) (с теми же уточнениями, касающимися операторов ограничения). При $q=0$ мы получаем прежний комплекс $C^{\bullet,0}(\mathfrak{U})$.

Любой коцепи $c \in C^{p,q}(\mathfrak{U})$ мы можем сопоставить коцепь $dc \in C^{p,q+1}(\mathfrak{U})$, считая по определению, что

$$(dc)(k_0, \ldots, k_p) = dc(k_0, \ldots, k_p)$$

для любого упорядоченного симплекса $(k_0, \ldots, k_p) \in K_p$.

Ясно, что отображения

$$d\colon C^{p,q}(\mathfrak{U}) \longrightarrow C^{p,q+1}(\mathfrak{U}) \tag{4}$$

перестановочны с операторами δ, т. е. для любых $p, q \geqslant 0$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^{p,q}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1,q}(\mathfrak{U}) \\ {\scriptstyle d}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle d} \\ C^{p,q+1}(\mathfrak{U}) & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1,q+1}(\mathfrak{U}) \end{array}$$

коммутативна. По определению (см. определение 2 лекции 20) это означает, что отображения (4) составляют коцепное отображение

$$d\colon C^{\bullet,q}(\mathfrak{U}) \to C^{\bullet,q+1}(\mathfrak{U})$$

комплекса $C^{\bullet,q}(\mathfrak{U})$ в комплекс $C^{\bullet,q+1}(\mathfrak{U})$.

Заметим, что $d \circ d = 0$, т. е. для любого $p \geqslant 0$ семейство $C^{p,\bullet}(\mathfrak{U}) = \{C^{p,q}(\mathfrak{U}), d\}$ является коцепным комплексом. При этом отображения

$$\delta\colon C^{p,q}(\mathfrak{U}) \to C^{p+1,q}(\mathfrak{U})$$

будут составлять коцепное отображение комплекса $C^{p,\bullet}(\mathfrak{U})$ в комплекс $C^{p+1,\bullet}(\mathfrak{U})$.

Определение 3. Семейство $C^{\bullet,\bullet} = \{C^{p,q}, \delta, d\}$ групп $C^{p,q}$, где $p, q \geqslant 0$, и отображений

$$\delta\colon C^{p,q} \to C^{p+1,q}, \quad d\colon C^{p,q} \to C^{p,q+1}$$

называется *двойным комплексом*, если

$$\delta \circ \delta = 0, \; d \circ d = 0 \text{ и } d \circ \delta = \delta \circ d,$$

т. е. если

1° для любого $q \geqslant 0$ (для любого $p \geqslant 0$) семейство $C^{\bullet, q} = \{C^{p, q}, \delta\}$ (семейство $C^{p, \bullet} = \{C^{p, q}, d\}$) является коцепным комплексом;

2° отображения d составляют коцепное отображение

$$d\colon C^{\bullet, q} \longrightarrow C^{\bullet, q+1}$$

комплекса $C^{\bullet, q}$ в комплекс $C^{\bullet, q+1}$, и, следовательно, отображения δ — коцепное отображение

$$\delta\colon C^{p, \bullet} \longrightarrow C^{p+1, \bullet}$$

комплекса $C^{p, \bullet}$ в комплекс $C^{p+1, \bullet}$.

Таким образом, мы видим, что для любого покрытия $\mathfrak{U}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ нами построен двойной комплекс

$$C^{\bullet, \bullet}(\mathfrak{U}) = \{C^{p, q}(\mathfrak{U}),\ \delta,\ d\}.$$

Мы будем называть его *двойным комплексом покрытия* $\mathfrak{U}$.

Двойные комплексы мы будем изображать таблицами вида

$$\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
C^{0, q+1} & \longrightarrow & C^{1, q+1} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C^{p, q+1} & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1, q+1} & \longrightarrow \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & d\uparrow & & \uparrow d \\
C^{0, q} & \longrightarrow & C^{1, 0} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C^{p, q} & \xrightarrow{\delta} & C^{p+1, q} & \longrightarrow \ldots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow \\
C^{0, 0} & \longrightarrow & C^{1, 0} & \longrightarrow & \ldots & \longrightarrow & C^{p, 0} & \longrightarrow & C^{p+1, 0} & \longrightarrow \ldots
\end{array} \tag{5}$$

В соответствии с этим комплексы $C^{\bullet, q}$ мы будем называть *строками* двойного комплекса $C^{\bullet, \bullet}$, а комплексы $C^{p, \bullet}$ — его *столбцами*.

Положив для любого $m \geqslant 0$

$$C^m = C^{0, m} \oplus C^{1, m-1} \oplus \ldots \oplus C^{m, 0},$$

мы определим отображение

$$\mathfrak{d}\colon C^m \longrightarrow C^{m+1}$$

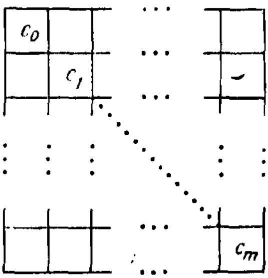
формулой

$$\mathfrak{d}c = \delta c + d'c,$$

где

$$d'c = (-1)^p\, dc, \text{ если } c \in C^{p, m-p}.$$

Таким образом, элементами группы C^m являются цепочки $c = (c_0, \ldots, c_m)$ коцепей комплекса $C^{\cdot,\cdot}$, расположенных на его m-й антидиагонали:



а отображение $\mathfrak{d}$ каждую такую цепочку переводит в цепочку $\mathfrak{d}c = (e_0, \ldots, e_{m+1})$, для которой

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
e_0 &= d'c_0,\\
e_1 &= \delta c_0 + d'c_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
e_m &= \delta c_{m-1} + d'c_m,\\
e_{m+1} &= \delta c_m,
\end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd}
e_0 \\
c_0 \arrow[u] \arrow[r] & e_1 \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
& & \vdots \\
& & c_{m-1} \arrow[u] \arrow[r] & e_m \\
& & & c_m \arrow[u] \arrow[r] & e_{m+1}.
\end{tikzcd}
$$

В частности, $\mathfrak{d}c = 0$ тогда и только тогда, когда

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
dc_0 &= 0,\\
\delta c_0 + d'c_1 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\delta c_{m+1} + d'c_m &= 0,\\
\delta c_m &= 0,
\end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \\
c_0 \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
& & \vdots \\
& & c_{m-1} \arrow[u] \arrow[r] & 0 \\
& & & c_m \arrow[u] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}
$$

Так как $d'\delta c = (-1)^{p+1} d\,\delta c$ и $\delta\, d'c = (-1)^p\, \delta\, dc$, то $d' \circ \delta + \delta \circ d' = 0$, и потому

$$\mathfrak{d} \circ \mathfrak{d} = (\delta + d') \circ (\delta + d') = \delta \circ \delta + \delta \circ d' + d' \circ \delta + d' \circ d' = 0.$$

Это означает, что *семейство* $\{C^m, \mathfrak{d}\}$ *является коцепным комплексом.*

Группы когомологий этого коцепного комплекса мы будем называть *группами когомологий двойного комплекса* $C^{\bullet,\bullet}$ и будем обозначать символом $H^m(C^{\bullet,\bullet})$.

В частном случае $C^{\bullet,\bullet} = C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ эти группы мы будем называть *группами когомологий покрытия* $\mathfrak{U}$ и будем обозначать символом $H^m(\mathfrak{U})$.

Двойной комплекс покрытия $\mathfrak{U} = \{U_k, k \in K\}$ мы можем естественным образом окаймить слева комплексом де Рама $\{\Omega^q \mathscr{X}, d\}$ многообразия $\mathscr{X}$, а снизу — комплексом $\{C^p(\mathfrak{U}; \mathbb{R}), \delta\}$ коцепей покрытия $\mathfrak{U}$ с коэффициентами в поле $\mathbb{R}$:

(8)

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & \Omega^q \mathscr{X} \arrow[u] \arrow[r, "j"] & C^{0,q}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & \ldots & & \ldots \arrow[r] & C^{p,q}(\mathfrak{U}) \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"'] & C^{p+1,q}(\mathfrak{U}) \arrow[u, "d"'] \arrow[r] & \ldots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots & & & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & \Omega^1 \mathscr{X} \arrow[u] \arrow[r, "j"] & C^{0,1}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,1}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & \ldots & & & & \\
0 \arrow[r] & \Omega^0 \mathscr{X} \arrow[u] \arrow[r, "j"] & C^{0,0}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,0}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & & C^{p,0}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,0}(\mathfrak{U}) \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
 & & C^0(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r] & C^1(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & & C^p(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r] & C^{p+1}(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \ldots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

где i — вложения, возникающие в результате отождествления произвольного числа $\lambda \in \mathbb{R}$ с постоянной функцией, принимающей значение λ, а отображения j определяются формулой

$$(j\omega)(k) = \omega|_{U_k},$$

где $\omega \in \Omega^q \mathscr{X}$ и $k \in K$.

Ясно, что отображения i и j перестановочны соответственно с операторами δ и d, т. е. составляют коцепные отображения

$$i\colon C^\bullet(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \to C^{\bullet,0}(\mathfrak{U}), \quad j\colon \Omega^\bullet \mathscr{X} \to C^{0,\bullet}(\mathfrak{U}),$$

Кроме того, они являются мономорфизмами и удовлетворяют соотношениям

$$d \circ i = 0, \quad \delta \circ j = 0.$$

(Соотношение $d \circ i = 0$ следует из того, что если $f = \mathrm{const}$, то $df = 0$, а соотношение $\delta \circ j = 0$ — из того, что по определению

$$(\delta c)(k_0, k_1) = c(k_1) - c(k_0) \text{ на } U_{k_0} \cap U_{k_1}$$

для любого упорядоченного симплекса $(k_0, k_1) \in K_1$, и, значит, если $c(k) = \omega$ на U_k, то $(\delta c)(k_0, k_1) = 0$.)

Эта ситуация заслуживает специального определения.

Определение 4. *Окаймленным двойным комплексом* называется состоящая из групп и гомоморфизмов таблица вида

(9)
$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & B^q \arrow[u, "d"] \arrow[r, "j"] & C^{0,q} \arrow[u] \arrow[r] & & \ldots \arrow[r] & C^{p,q} \arrow[u, "d"] \arrow[r, "\delta"] & C^{p+1,q} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots & & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & B^1 \arrow[u] \arrow[r, "j"] & C^{0,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,1} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C^{p,1} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,1} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
0 \arrow[r] & B^0 \arrow[u] \arrow[r, "j"] & C^{0,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{1,0} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C^{p,0} \arrow[u] \arrow[r] & C^{p+1,0} \arrow[u] \arrow[r] & \ldots \\
 & & A^0 \arrow[u, "i"] \arrow[r] & A^1 \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & A^p \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\delta"] & A^{p+1} \arrow[u, "i"] \arrow[r] & \ldots \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

где часть, обведенная рамкой, является двойным комплексом в смысле определения 3 и где

1° семейства $A^\bullet = \{A^p, \delta\}$ и $B^\bullet = \{B^q, d\}$ являются коцепными комплексами;

2° отображения i составляют коцепное отображение комплекса $A^\bullet$ в комплекс $C^{\bullet, 0}$, обладающее тем свойством, что

$$(10) \qquad d \circ i = 0;$$

3° отображения j составляют коцепное отображение комплекса $B^\bullet$ в комплекс $C^{0, \bullet}$, обладающее тем свойством, что

$$\delta \circ j = 0;$$

4° все отображения i и j являются мономорфизмами.

Замечание 4. В русской топологической литературе окаймленные комплексы называются также *аугментированными двойными комплексами*. Этой фонетически отвратной калькой с английского языка мы пользоваться не будем.

Из соотношения (10) непосредственно следует, что, отождествив для любого элемента $a \in A$ элемент $ia \in C^{m, 0}$ с цепочкой $(0, \ldots, 0, ia) \in C^m$, мы получим коцепное отображение i комплекса $A^\bullet$ в комплекс $\{C^m, \mathfrak{d}\}$. [Действительно, так как $(d \circ i) a = 0$, то $\mathfrak{d}(ia) = (0, \ldots, 0, (\delta \circ i) a) = (0, \ldots, 0, i(\delta a)) = i(\delta a)$.] Индуцированные этим коцепным отображением гомоморфизмы

$$i^*\colon H^m(A^\bullet) \to H^m(C^{\bullet, \bullet}) \tag{11}$$

мы будем называть *нижними краевыми гомоморфизмами*.

Аналогично определяются *левые краевые гомоморфизмы*

$$j^*\colon H^m(B^\bullet) \to H^m(C^{\bullet, \bullet}). \tag{12}$$

Для двойного комплекса $C^{\bullet, \bullet}(\mathfrak{U})$ покрытия $\mathfrak{U}$ многообразия $\mathscr{X}$ нижние краевые гомоморфизмы имеют вид

$$i^*\colon H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \to H^m(\mathfrak{U}),$$

а левые — вид

$$j^*\colon H^m\mathscr{X} \to H^m(\mathfrak{U}).$$

Мы будем говорить, что окаймленный двойной комплекс (9) *ацикличен по столбцам*, если каждый его столбец является точной последовательностью, т. е. для любых $p, q \geqslant 0$ имеет место равенство

$$\operatorname{Ker}(d\colon C^{p, q} \to C^{p, q+1}) = \begin{cases} \operatorname{Im}(i\colon A^p \to C^{p, 0}), & \text{если } q = 0, \\ \operatorname{Im}(d\colon C^{p, q-1} \to C^{p, q}), & \text{если } q > 0. \end{cases}$$

[При $q = 0$ это равенство означает, что мономорфизм i изоморфно отображает группу A^p на группу $H^0(C^{p, \bullet}) = \operatorname{Ker}(d\colon C^{p, 0} \to C^{p, 1})$ комплекса $C^{p, \bullet}$, а при $q > 0$, что группа $H^q(C^{p, \bullet})$ когомологий этого комплекса равна нулю.]

Аналогично определяются двойные комплексы, *ацикличные по строкам*, для которых

$$\operatorname{Ker}(\delta\colon C^{p,q}\to C^{p+1,q})=\begin{cases}\operatorname{Im}(j\colon B^q\to C^{0,q}), & \text{если } p=0,\\ \operatorname{Im}(\delta\colon C^{p-1,q}\to C^{p,q}), & \text{если } p>0.\end{cases}$$

Ключом к вычислению групп когомологий де Рама гладких многообразий является следующая алгебраическая лемма:

Лемма 1. *Если окаймленный двойной комплекс* (9) *ацикличен по столбцам* (*по строкам*), *то для любого* $m\geqslant 0$ *нижний краевой гомоморфизм* (11) (*левый краевой гомоморфизм* (12)) *является изоморфизмом.*

Доказательство. Пусть для коцикла $a\in A^m$ комплекса $A^\bullet$ имеет место равенство $i^*[a]=0$, т. е. существует такая цепочка $c=(c_0, \ldots, c_{m-1})\in C^{m-1}$, что $\mathfrak{d}c=ia$. По определению это означает, что

$$(13)\qquad \begin{aligned} dc_0&=0,\\ \delta c_0+d'c_1&=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \delta c_{m-2}+d'c_{m-1}&=0,\\ \delta c_{m-1}&=ia,\end{aligned}\qquad \begin{tikzcd} 0 & & & & \\ c \arrow[u] \arrow[r] & 0 & & & \\ & c_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & & \\ & & c_{m-2} \arrow[u] \arrow[r] & 0 & \\ & & & c_{m-1} \arrow[u] \arrow[r] & ia. \end{tikzcd}$$

Так как по условию первый столбец комплекса $C^{\bullet,\bullet}$ является точной последовательностью, то существует такая коцепь $b_0\in C^{0,m-1}$, что $db_0=c_0$. Тогда коцепь $c'=c-\mathfrak{d}b_0$ (т. е., точнее, коцепь $c-\mathfrak{d}(b_0, 0, \ldots, 0)$) будет иметь вид $(0, c_1', \ldots, c_{m-1}')$ и по-прежнему будет удовлетворять соотношению $\mathfrak{d}c'=ia$. Поэтому без ограничения общности мы с самого начала можем считать, что $c_0=0$.

Но тогда второе соотношение (13) будет иметь вид $dc_1=0$, и потому, ввиду точности второго столбца комплекса $C^{\bullet,\bullet}$, будет существовать такой элемент $b_1\in C^{1,m-1}$, что $db_1=c_1$. Поэтому, заменив c на $c-\mathfrak{d}b_1$, мы добьемся того, что $c_0=0$ и $c_1=0$ (сохранив соотношение $\mathfrak{d}c=ia$).

Двигаясь таким образом по антидиагонали вниз, мы в конце концов придем к цепочке c вида $(0, \ldots, 0, c_{m-1})$, где c_{m-1} — такая коцепь из $C^{m-1,0}$, что $dc_{m-1}=0$ и $\delta c_{m-1}=ia$. Но так как $dc_{m-1}=0$, то — снова ввиду точности соответствующего столбца — существует такой элемент $a' \in A^{m-1}$, что $ia' = c_{m-1}$, и, значит, такой, что

$$i(\delta a') = \delta(ia') = \delta c_{m-1} = ia.$$

Поскольку отображение i по условию мономорфно, этим доказано, что $\delta a' = a$, т. е. что $[a] = 0$ в $H^m(A^\bullet)$. Следовательно, гомоморфизм (11) является мономорфизмом.

Пусть теперь $c = (c_0, \ldots, c_{m-1})$ — произвольный m-мерный коцикл комплекса $\{C^m, \mathfrak{d}\}$. Тогда для коцепей $c_0, \ldots, c_m$ выполнены соотношения (7). В частности, $dc_0 = 0$. Поэтому снова существует такая коцепь b_0, что для коцикла $c - \mathfrak{d}b_0$ компонента c_0 равна нулю, и, значит, в силу второго соотношения (7) для этого коцикла будет иметь место равенство $dc_1 = 0$, и, следовательно, будет существовать такая коцепь b_1, что у коцикла $c - db_0 - db_1$ будет равна нулю и компонента c_1.

Продолжая процесс, мы в конце концов получим коцикл когомологичный данному, у которого все компоненты $c_0, \ldots, c_{m-1}$ равны нулю, а последняя компонента c_m имеет вид ia, где a — некоторый коцикл комплекса $A^\bullet$, т. е. который является образом коцикла a при отображении $i: A^m \to C^m$. Это означает, что гомоморфизм (11) является эпиморфизмом.

Симметричное утверждение о двойных комплексах, ацикличных по строкам, доказывается аналогично. $\square$

Следствие 1. *Если окаймленный двойной комплекс* (9) *ацикличен по строкам и по столбцам, то для любого $m \geqslant 0$ группа $H^m(A^\bullet)$ изоморфна группе $H^m(B^\bullet)$.* $\square$

Следствие 2. *Если для открытого покрытия $\mathfrak{U} = \{U_k,\ k \in K\}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ окаймленный комплекс* (8) *ацикличен по строкам и столбцам, то для любого $m \geqslant 0$ группа когомологий де Рама $H^m\mathscr{X}$ многообразия $\mathscr{X}$ изоморфна группе когомологий $H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R})$ покрытия $\mathfrak{U}$:*

$$H^m\mathscr{X} \approx H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R}). \ \square$$

Таким образом, в этом случае группу $H^m\mathscr{X}$ мы можем вычислять чисто комбинаторно по нерву K покрытия $\mathfrak{U}$. (Ср. вычисление групп $H^m\mathbb{S}^n$ в предыдущей лекции.)

Условие ацикличности строк двойного комплекса (8) при $p = 0$ означает, что каждый коцикл $c \in C^{0,q}(\mathfrak{U})$ имеет вид $i\omega$, где $\omega \in \Omega^q\mathscr{X}$, т. е. что $c(k) = \omega$ на U_k для любого $k \in K$. Но это действительно так, поскольку условие, что коцепь c: $k \mapsto c(k) \in \Omega\, U_k$ является коциклом, означает, что

$$c(k_0) = c(k_1) \text{ на } U_{k_0} \cap U_{k_1}$$

для любых двух индексов k_0, $k_1 \in K$ (для которых $U_{k_0} \cap U_{k_1} \neq \varnothing$), т. е. формы $c(k)$, $k \in K$, согласованы на пересечениях и потому составляют некоторую форму $\omega \in \Omega^q \mathscr{X}$. Таким образом, *условие ацикличности строк при $p = 0$ выполнено для комплекса* (8) *произвольного покрытия* $\mathfrak{U}$.

Условия, обеспечивающие ацикличность строк (при $p > 0$) и столбцов (при $q \geqslant 0$) комплекса (8), мы рассмотрим в следующей лекции.