Лекция 22

Ацикличность по строкам двойного комплекса нумерируемого покрытия.— Ацикличность по столбцам двойного комплекса покрытия Лере.— Теорема де Рама — Лере.— Обобщение.— Группы $E_2^{p,q}$.—Группы $F^{p,q}$.—Группа, присоединенная к градуированной группе с фильтрацией.

Определение 1. Семейство $\{\eta_k\}$ гладких неотрицательных функций η_k: $\mathscr{X} \to \mathbb{R}$ называется *локально конечным*, если для любой точки многообразия $\mathscr{X}$ существует ее окрестность, в которой только конечное число функций η_k отлично от нуля. Локально конечное семейство $\{\eta_k\}$ функций называется *разбиением единицы*, если

$$\sum_k \eta_k = 1$$

(в силу условия локальной конечности эта сумма имеет смысл). Разбиение единицы $\{\eta_k\}$ называется *подчиненным* открытому покрытию $\{U_k\}$ (с тем же множеством индексов), если $\eta_k = 0$ вне U_k для любого k. (Заметим, что в литературе встречается другое, более ограниченное определение, в котором требуется, чтобы в U_k содержалось не только множество, где $\eta_k \neq 0$, но и его замыкание.) Открытое покрытие $\{U_k\}$ называется *нумерируемым*, если существует подчиненное ему разбиение единицы $\{\eta_k\}$. Многообразие $\mathscr{X}$ называется *паракомпактным*, если каждое его открытое покрытие нумерируемо.

Оказывается, что *если покрытие $\mathfrak{U} = \{U_k;\ k \in K\}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ нумерируемо, то его двойной комплекс $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ ацикличен по строкам.* Действительно, согласно сделанному в конце предыдущей лекции замечанию, нам надо лишь доказать, что для любого $q \geqslant 0$ каждый p-мерный $(p > 0)$ коцикл c коцепного комплекса $C^{\bullet,q} = \{C^{p,q}(\mathfrak{U}), \delta\}$ является кограницей. С этой целью мы отнесем произвольной коцепи $c \in C^{p,q}(\mathfrak{U})$ коцепь $Dc \in C^{p-1,q}(\mathfrak{U})$, определенную (очевидно, корректно) формулой

$$(Dc)(k_0, \ldots, k_{p-1}) = \sum_{k \in K} \eta_k c(k, k_0, \ldots, k_{p-1}), \tag{1}$$

$$(k_0, \ldots, k_{p-1}) \in K_{p-1},$$

где $\{\eta_k\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\mathfrak{U}$.

Тогда для любого симплекса $(k_0, \ldots, k_p) \in K_p$

$$(\delta Dc)(k_0, \ldots, k_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_{k \in K} \eta_k c(k, k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_p) =$$

$$= \sum_{k \in K} \eta_k \sum_{i=0}^{p} (-1)^i c(k, k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_p)$$

и

$$(D\delta c)(k_0, \ldots, k_p) = \sum_{k \in K} \eta_k (\delta c)(k, k_0, \ldots, k_p) =$$

$$= \sum_{k \in K} \eta_k \left[c(k_0, \ldots, k_p) + \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+1} c(k, k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_p)\right] =$$

$$= c(k_0, \ldots, k_p) - \sum_{k \in K} \eta_k \sum_{i=0}^{p} (-1)^i c(k, k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_p) =$$

$$= c(k_0, \ldots, k_p) - (\delta Dc)(k_0, \ldots, k_p),$$

т. е.

$$D\delta c + \delta Dc = c$$

для любой коцепи c. Поэтому, если $\delta c = 0$, то $c = \delta Dc$. □

Рассмотрим теперь условия, обеспечивающие ацикличность комплекса $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ по столбцам.

Напомним (ср. определение 1 лекции 10), что для произвольного семейства множеств $\{\mathscr{X}_\alpha\}$ символом $\prod_\alpha \mathscr{X}_\alpha$ обозначается множество всевозможных семейств $\{x_\alpha\}$, где $x_\alpha \in \mathscr{X}_\alpha$. В случае, когда все $\mathscr{X}_\alpha$ представляют собой линейные пространства, это множество является линейным пространством относительно покомпонентных операций ($\{x_\alpha\} + \{y_\alpha\} = \{x_\alpha + y_\alpha\}$, $\lambda\{x_\alpha\} = \{\lambda x_\alpha\}$) и называется *прямым произведением* линейных пространств $\mathscr{X}_\alpha$. Аналогично определяются прямые произведения групп, коцепных комплексов, двойных комплексов и т. п.

При этом ясно, что, например, *группы когомологий прямого произведения комплексов будут прямыми произведениями групп когомологий сомножителей.*

Сравнив общее определение прямого произведения линеалов с определением линеалов $C^{p,q}(\mathfrak{U})$, мы немедленно обнаружим, что *каждый линеал $C^{p,q}(\mathfrak{U})$ является не чем иным, как прямым произведением*

$$\prod_{\{k_0, \ldots, k_p\} \subset K} \Omega^q(U_{k_0} \cap \ldots \cap U_{k_p})$$

линеалов $\Omega^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$ *по всем p-мерным симплексам* $\{k_0, \ldots, k_p\}$ *симплициальной схемы* K. При этом отображение $d\colon C^{p,q}(\mathfrak{U})\to C^{p,q+1}(\mathfrak{U})$ переводит каждый множитель $\Omega^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$ линеала $C^{p,q}(\mathfrak{U})$ в множитель $\Omega^{q+1}(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$ линеала $C^{p,q+1}(\mathfrak{U})$ и является на нем не чем иным, как внешним дифференциалом

$$d\colon \Omega^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})\to\Omega^{q+1}(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}).$$

Это означает, что для любого $p\geqslant 0$ комплекс $C^{p,\bullet}(\mathfrak{U})$ является прямым произведением комплексов де Рама $\Omega^\bullet(U_{k_0}\cap\ldots$ $\ldots\cap U_{k_p})$ и, значит, его группы когомологий — прямыми произведениями групп $H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$. Поэтому для комплекса $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ условие ацикличности столбцов при $q>0$ выполнено тогда и только тогда, когда для любого симплекса $\{k_0, \ldots, k_p\}\subset K$ все группы когомологий $H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$, $q>0$, равны нулю. Аналогично, так как для любого $p\geqslant 0$ группа $C^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ является не чем иным, как прямым произведением линеалов $\mathbb{R}$ по всем симплексам $\{k_0, \ldots, k_p\}\subset K$, то условие ацикличности столбцов комплекса $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ при $q=0$ равносильно требованию, чтобы для любого симплекса $\{k_0, \ldots, k_p\}\subset K$ группа $H^0(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$ была изоморфна $\mathbb{R}$.

Поскольку в силу леммы Пуанкаре (и предложения 2 лекции 20) оба условия заведомо выполнены, когда все пересечения $U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}$ диффеоморфны открытому шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ (где, как всегда $n=\dim\mathscr{X}$), мы видим, что *комплекс $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ ацикличен по столбцам, если для любых индексов $k_0, \ldots, k_p\in K$ пересечение $U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}$ — когда оно не пусто — диффеоморфно шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$.*

Определение 2. Открытое покрытие $\mathfrak{U}=\{U_k;\ k\in K\}$ гладкого n-мерного многообразия $\mathscr{X}$ мы будем называть *покрытием Лере*, если для любых индексов $k_0, \ldots, k_p\in K$ пересечение $U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}$ либо пусто, либо диффеоморфно шару $\mathring{\mathbb{B}}^n$.

Таким образом, *для любого покрытия Лере $\mathfrak{U}$ комплекс $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ ацикличен по столбцам.*

Сопоставив полученные результаты, мы в силу следствия 2 леммы 1 предыдущей лекции немедленно получим следующую теорему:

Теорема 1. *Для любого нумерируемого покрытия Лере гладкого многообразия $\mathscr{X}$ группы когомологий $H^m(\mathfrak{U};\mathbb{R})$*

изоморфны группам когомологий де Рама $H^m\mathscr{X}$ многообразия $\mathscr{X}$.

Эта теорема называется теоремой де Рама в форме Лере) (или, короче,— теоремой де Рама—Лере).

Нетрудно указать и явную формулу, задающую изоморфизм

$$(2) \qquad H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \to H^m\mathscr{X}.$$

Задача 1. Если к коцепи $ic \in C^{m,0}(\mathfrak{U})$, $c \in C^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R})$, мы m раз применим оператор $d \circ D$, где D—оператор $C^{p,q}(\mathfrak{U}) \to C^{p-1,q}(\mathfrak{U})$, определенный формулой (1), то получится коцепь из $C^{0,m}(\mathfrak{U})$. Покажите, что:

1° в случае, когда c является коциклом, коцепь $(d \circ D)^m c$ имеет вид $j\omega$, где ω—замкнутая форма из $\Omega^m\mathscr{X}$;

2° класс когомологий $[\omega]$ формы ω зависит только от класса когомологий $[c]$ коцикла c;

3° с точностью до знака отображение $[c] \longmapsto [\omega]$ является изоморфизмом (2).

Следствие 1. *Для любого нумерируемого покрытия Лере $\mathfrak{U}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ группы когомологий $H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R})$ не зависят—с точностью до изоморфизма—от этого покрытия и определяются исключительно самим многообразием $\mathscr{X}$.* □

Замечание 1. Можно показать—на основании совершенно иных соображений, не связанных с дифференциальными формами,— что следствие 1 справедливо для групп когомологий $H^m(\mathfrak{U}; G)$ и над произвольной группой G.

Определение 3. Группы $H^m(\mathfrak{U}; G)$, где $\mathfrak{U}$—произвольное нумерируемое покрытие Лере многообразия $\mathscr{X}$, называются *группами когомологий Чеха* многообразия $\mathscr{X}$ и обозначаются символом $H^m(\mathscr{X}; G)$. Они определены, если многообразие $\mathscr{X}$ обладает хотя бы одним нумерируемым покрытием Лере.

В силу замечания 1 это определение корректно. Оно позволяет следующим образом переформулировать теорему 1:

Теорема 1а. *Если для многообразия $\mathscr{X}$ существует нумерируемое покрытие Лере, то его группы когомологий де Рама изоморфны его группам когомологий Чеха:*

$$H^m\mathscr{X} \approx H^m(\mathscr{X}; \mathbb{R}), \qquad m \geqslant 0.$$

Хотя на практике вопрос о существовании нумерируемого покрытия Лере для данного конкретного многообразия $\mathscr{X}$ обычно трудностей не вызывает, но все же, конечно, этот вопрос интересно рассмотреть в общем виде.

Теорема 2. *Любое хаусдорфово многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности (в частности, любое хаусдорфово компактное многообразие), паракомпактно, т. е. каждое его открытое покрытие нумерируемо.*

Замечание 2. Можно показать, что и, обратно, *любое связное паракомпактное хаусдорфово многообразие удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

См. ниже, замечания 2 и 3 лекции 24.

Теорема 3. *Любое паракомпактное хаусдорфово многообразие обладает покрытием Лере. Если многообразие компактно, то оно обладает конечным покрытием Лере.*

Следствие 1. *Группы когомологий Чеха $H^m(\mathscr{X}; G)$ определены для любого паракомпактного хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$. Для компактного многообразия эти группы имеют над G конечное число образующих (при $G = \mathbb{R}$ конечномерны).*

Следствие 2. *Группы когомологий де Рама $H^m\mathscr{X}$ произвольного паракомпактного хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ изоморфны его группам Чеха над полем $\mathbb{R}$:*

$$H^m\mathscr{X} \approx H^m(\mathscr{X}; \mathbb{R}).$$

Следствие 2 обычно называется теоремой де Рама для групп когомологий Чеха.

[Вообще, теоремами де Рама называется целый букет теорем, описывающих группы $H^m\mathscr{X}$ в топологических терминах. Название объясняется тем, что самая первая из этих теорем была на самом деле доказана де Рамом. Мы познакомимся с этой теоремой в лекции 28.]

Следствие 3. *Для компактного хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$ все линейные пространства $H^m\mathscr{X}$ конечномерны (и, значит, числа Бетти $h^m\mathscr{X}$ определены).* $\square$

Мы докажем теорему 2 в лекции 24. Что же касается теоремы 3, то — подобно лемме Гаусса из лекции 5 — мы вынуждены отложить ее доказательство до следующего семестра.

Вообще говоря, даже для самых простых многообразий $\mathscr{X}$ покрытия Лере $\mathfrak{U}$ содержат довольно много элементов, что делает задачу вычисления групп $H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) = H^m(\mathscr{X}; \mathbb{R})$ если не сложной, то, во всяком случае, громоздкой и утомительной. Поэтому интересны способы вычисления групп $H^m(\mathscr{X}; \mathbb{R})$ с помощью покрытий, не являющихся покрытиями Лере. (Как показывают примеры из лекции 20, этот подход может оказаться весьма эффективным.) При этом ввиду теоремы 2 (правда, нами еще не доказанной) мы, практически интересуясь лишь многообразиями, удовлетворяющими второй аксиоме счетности, можем ограничиться лишь нумерируемыми покрытиями $\mathfrak{U}=\{U_k, k\in K\}$, для которых окаймленный комплекс $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$, как мы знаем, ацикличен по строкам, и, значит, его группы когомологий $H^m(\mathfrak{U})$ изоморфны группам когомологий де Рама $H^m\mathscr{X}$ многообразия $\mathscr{X}$. Таким образом, задача вычисления групп $H^m\mathscr{X}$ сводится к задаче вычисления групп $H^m(\mathfrak{U})$.

Мы будем считать, что нам известны

а) нерв K покрытия $\mathfrak{U}$ (т. е. известно, для каких индексов $k_0, \ldots, k_p \in K$ пересечение $U_{k_0}\cap \ldots \cap_{k_p}$ не пусто);

б) для любого симплекса $\{k_0, \ldots, k_p\}$ нерва K известны все группы когомологий де Рама $H^q(U_{k_0}\cap \ldots \cap U_{k_p})$ открытого подмногообразия $U_{k_0}\cap \ldots \cap U_{pk}$;

и будем искать алгебраическую процедуру, позволяющую на основе этих сведений, если не полностью вычислить группы $H^m(\mathfrak{U})\approx H^m\mathscr{X}$ — это останется недостижимым идеалом,— то, по крайней мере, получить об этих группах достаточно обширную информацию.

Пусть $C^{\bullet,\bullet}=\{C^{p,q}; \delta, d\}$ — пока произвольный двойной комплекс. Так как столбцы $C^{p,\bullet}=\{C^{p,q}; d\}$ комплекса $C^{\bullet,\bullet}$ являются обычными коцепными комплексами, то определены их группы когомологий $H^{\bullet}(C^{p,\bullet})$. По традиции принято обозначать эти группы символом $E_1^{p,q}$. (Обратите внимание на порядок верхних индексов!)

Поскольку горизонтальные кограничные операторы δ: $C^{p,q}\to C^{p+1,q}$ составляют по определению коцепное отображение $C^{p,\bullet}\to C^{p+1,\bullet}$, они индуцируют гомоморфизмы

$$\delta^*: E_1^{p,q}\to E_1^{p+1,q}. \tag{3}$$

Так как $\delta\circ\delta=0$, то $\delta^*\circ\delta^*=0$ и, значит, для каждого $q\geqslant 0$ семейство $E_1^{\bullet,q}=\{E_1^{p,q}; \delta^*\}$ групп и гомоморфизмов является коцепным комплексом. (В дальнейшем вместо δ^* мы будем писать просто δ.) Группы когомологий $H^p(E_1^{\bullet,q})$ комплексов $E_1^{\bullet,q}$ мы — также по традиции — будем обозначать символом $E_2^{p,q}$ и будем располагать их в таблицу вида

(4)

$E_2^{0,q}$	$E_2^{1,q}$	$\dots$	$E_2^{p,q}$	$\dots$
$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$	$\cdot\ \cdot\ \cdot$
$E_2^{0,1}$	$E_2^{1,1}$	$\dots$	$E_2^{p,1}$	$\dots$
$E_2^{0,0}$	$E_2^{1,0}$	$\dots$	$E_2^{p,0}$	$\dots$

Условно $E_2^{p,q}=H_\delta^pH_d^q(C^{\bullet,\bullet})$ (и $E_2^{p,q}=H_\delta^pH_d^q(\mathfrak{U})$, если $C^{\bullet,\bullet}=C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$), где нижние индексы указывают кограничный оператор, по отношению к которому вычисляются группы когомологий.

Заметим, что в специальном случае двойного комплекса вида $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ *информация, содержащаяся в пунктах* а *и* б (*см. выше*), *в принципе достаточна для вычисления групп* $E_2^{p,q}$. Действительно, как мы знаем, каждый столбец $C^{p,\bullet}(\mathfrak{U})$ комплекса $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ является прямым произведением комплексов де Рама вида $\Omega^\bullet(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$ и, значит, его группы когомологий $E_1^{p,q}=H^q(C^{p,\bullet}(\mathfrak{U}))$ — прямыми произведениями групп когомологий де Рама $H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$. Это означает, что переход от группы $C^{p,q}(\mathfrak{U})$ к группе $E_1^{p,q}$ состоит в том, что мы, ограничиваясь коцепями

$$c\colon (k_0, \ldots, k_p)\to c(k_0, \ldots, k_p)\in\Omega^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}),$$

значения $c(k_0, \ldots, k_p)$ которых являются замкнутыми формами, переходим к их классам когомологий

$$[c(k_0, \ldots, k_p)]\in H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}).$$

Следовательно, элементами группы $E_1^{p,q}$ мы можем считать определенные на K_p кососимметрические функции

$$\bar{c}\colon (k_0, \ldots, k_p)\mapsto\bar{c}(k_0, \ldots, k_p),$$

для которых $\bar{c}(k_0, \ldots, k_p)\in H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$ (*коцепи со значениями в когомологиях*). При этом оператор (3) будет задаваться формулой

$$(\delta^*\bar{c})(k_0, \ldots, k_{p+1})=\sum_{i=0}^{p+1}(-1)^i\bar{c}(k_0, \ldots, \hat{k}_i, \ldots, k_{p+1}),$$

где справа пропущены подразумеваемые гомоморфизмы ограничения

$$H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap\hat{U}_{k_i}\cap\ldots\cap U_{k_p})\to H^q(U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p})$$

(ср. формулу (2) предыдущей лекции). Все это дает алгорифм — в не очень громоздких случаях вполне работоспособный — для вычисления групп $E_2^{p,q}$. □

Таким образом, группы $E_2^{p,q}$ для двойных комплексов вида $C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{U})$ мы можем считать известными, по крайней мере теоретически.

Пример 1. Если $\mathfrak{U}=\{U, V\}$ — двухэлементное покрытие сферы $\mathbb{S}^n$, рассмотренное в лекции 20, то среди групп $H^m(U)$, $H^m(V)$ и $H^m(U\cap V)$ отличны от нуля только группы

$$H^0(U)\approx\mathbb{R},\quad H^0(V)\approx\mathbb{R},\quad H^0(U\cap V)\approx\mathbb{R}$$

и

$$H^{n-1}(U\cap V)\approx H^{n-1}\mathbb{S}^{n-1}\approx\mathbb{R}.$$

Поэтому комплекс $E_1^{\bullet,0}$ изоморфен комплексу $C^\bullet(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ и, значит, *группы $E_2^{p,0}$ изоморфны группам $H^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$*. (Это — общий факт, справедливый для любого многообразия $\mathscr{X}$ и любого его покрытия $\mathfrak{U}$ со *связными* пересечениями $U_{k_0}\cap\ldots\cap U_{k_p}$.)

С другой стороны, легко видеть, что $H^0(\mathfrak{U};\mathbb{R})\approx\mathbb{R}$ (это — опять общий факт, справедливый для любой связной — в понятном смысле — симплициальной схемы), и что $H^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})=0$ при $p>0$ (нервом покрытия $\mathfrak{U}$, или, точнее, его геометрической реализацией является отрезок

(5) 

и, значит, при $p>1$ равна нулю даже группа $C^p(\mathfrak{U};\mathbb{R})$, а при $p=1$ любой элемент группы $C^1(\mathfrak{U};\mathbb{R})=Z^1(\mathfrak{U};\mathbb{R})$ однозначно определяется числом $\lambda=c(0, 1)$ и потому равен δe, где e — нульмерная коцепь, определенная формулой $e(0)=0$, $e(1)=\lambda$).

Таким образом,

$$E_2^{p,0}=\begin{cases}\mathbb{R}, & \text{если } p=0,\\ 0, & \text{если } p>0.\end{cases}$$

Что же касается групп $E_1^{p,q}$ при $q>0$, то среди них отлична от нуля только группа $E_1^{1,n-1}=C^1(\mathfrak{U};\mathbb{R})$, изоморфная $\mathbb{R}$. Поэтому среди групп $E_2^{p,q}$, $q>0$, также отлична от нуля только группа $E_2^{1,n-1}\approx\mathbb{R}$.

Таким образом, таблица групп $E_2^{p,q}$ для покрытия $\{U, V\}$ сферы $\mathbb{S}^n$ имеет вид

$n-1$		$\mathbb{R}$	$\ldots$		$\ldots$
	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
0	$\mathbb{R}$		$\ldots$		$\ldots$
	0	1			

(в остальных клетках, кроме двух указанных, стоят нули).

Осталось научиться переходить от групп $E_2^{p,q}$ к группам $H^m(C^{\bullet,\bullet})$. Для этого мы в первую очередь опишем группы $E_2^{p,q}$ непосредственно по группам $C^{p,q}$. При этом, во избежание многочисленных оговорок, мы будем считать, что группы $C^{p,q}$ определены и для *отрицательных* p, q и равны в этом случае нулю:

$$C^{p,q}=0, \text{ если } p<0 \text{ или } q<0.$$

По определению каждый элемент x группы $E_2^{p,q}$ является классом δ-когомологий некоторого δ-коцикла $\bar{c}\in E_1^{p,q}$, который в свою очередь является классом d-когомологий некоторого d-коцикла $c\in C^{p,q}$. (В комплексе покрытия $\mathfrak{U}$ элемент $\bar{c}$ представляет собой коцикл со значениями в когомологиях, а c получается из $\bar{c}$ выбором в каждом классе когомологий $\bar{c}(k_0, \ldots, k_p)$ некоторого представителя.) Таким образом, каждый элемент $x\in E_2^{p,q}$ задается некоторым элементом $c\in C^{p,q}$. Мы будем писать $x=[c]_2$ (и $\bar{c}=[c]_1$).

Чтобы элемент $[c]_2$ был определен, необходимо, конечно, чтобы $dc=0$. Кроме того, элемент $\delta c\in C^{p+1,q}$ должен иметь вид dc_1, где $c_1\in C^{p+1,q-1}$ (чтобы элемент $[c]_1\in E_1^{p,q}$ был δ-коциклом). Впрочем, нам будет удобнее здесь заменить d на d' и представлять δc в виде $-d'c_1$ (что, конечно, никакого принципиального значения не имеет). Обратно, если $dc=0$, то определен элемент $[c]_1$, а если $\delta c=-d'c_1$, то $\delta[c]_1=0$ и, значит, определен элемент $[c]_2$. Таким образом, *элемент* $[c]_2$ *определен тогда и только тогда, когда существует двучленная цепочка* (c, c_1) *вида*

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ {\scriptstyle d'}\uparrow & & \\ c & \xrightarrow{\delta} & \\ & & \uparrow{\scriptstyle d_1} \\ & & c_1, \end{array} \qquad \begin{array}{l} d'c=0,\\ \delta c+d'c_1=0. \end{array} \tag{6}$$

Аналогично показывается, что $[c]_2=[c']_2$ *тогда и только тогда, когда существуют такие коцепи* $a\in C^{p-1,q}$ *и* $b\in C^{p,q-1}$, *что*

$$da=0 \text{ и } c'-c=\delta a-d'b;$$

схематически:

$$\begin{array}{ccc} 0 & & \\ \uparrow & & \\ a & \longrightarrow & c'-c \\ & & \uparrow \\ & & b. \end{array} \tag{7}$$

С другой стороны, мы знаем (см. формулы (7) предыдущей лекции), что коциклами комплекса $C^{\bullet,\bullet}$ (по отношению к оператору δ) являются цепочки вида

$$\begin{array}{l} 0 \\ \uparrow \\ c_0 \longrightarrow \\ \quad\ \uparrow \\ \quad\ c_1 \longrightarrow \\ \qquad\ \uparrow \\ \qquad\ c_2 \longrightarrow \\ \qquad\qquad \cdot \\ \qquad\qquad\ \ \cdot \\ \qquad\qquad\quad\ \cdot \\ \qquad\qquad\qquad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad c_{m-1} \longrightarrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \uparrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad c_m \longrightarrow 0, \end{array} \qquad \begin{aligned} d'c_0&=0,\\ \delta c_0+d'c_1&=0,\\ \delta c_1+d'c_2&=0,\\ \dots&\dots\\ \delta c_{m-1}+d'c_m&=0,\\ \delta c_m&=0, \end{aligned} \tag{8}$$

имеющие максимально возможную длину (кончающиеся на нижней строке комплекса $C^{\bullet,\bullet}$). Поэтому, если коцикл (8) обладает тем свойством, что $c_0=0, \dots, c_{p-1}=0$, то для его компоненты c_p будет определен элемент $[c_p]_2$ группы $E_2^{p,m-p}$.

Таким образом, соответствие $c\longmapsto[c_p]_2$ определяет некоторое отображение

$$Z^{p,m-p}\longrightarrow E_2^{p,m-p}, \tag{9}$$

где $Z^{p,m-p}$ — подгруппа группы δ-коциклов $Z^m(C^{\bullet,\bullet})$ двойного комплекса $C^{\bullet,\bullet}$, состоящая из коциклов $c=(c_0, \dots, c_n)$, для которых $c_0=0, \dots, c_{p-1}=0$. При этом из определения оператора δ (см. формулы (6) предыдущей лекции) непосредственно следует, что если коциклы $c=(0, \dots, 0, c_p, \dots, c_m)$ и $c'=(0, \dots, 0, c'_p, \dots, c'_m)$

из группы $Z^{p,m-p}$ когомологичны, то существует такая цепочка $(a_0, a_1, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$, что

(10)
$$\begin{aligned} d'a_0 &= 0, \\ \delta a_1 + d'a_1 &= 0, \\ &\ldots\ldots \\ \delta a_{p-2} + d'a_{p-1} &= 0, \\ \delta a_{p-1} + d'a_p &= c'_p - c_p, \end{aligned} \qquad \begin{array}{llllll}
0 &&&&& \\
\uparrow &&&&& \\
a_0 \to & &&&& \\
& \uparrow &&&& \\
& a_1 \to &&&& \\
&& \ddots &&& \\
&&& \uparrow && \\
&&& a_{p-2} \to && \\
&&&& \uparrow & \\
&&&& a_{p-1} \to & c'_p - c_p \\
&&&&& \uparrow \\
&&&&& a_p.
\end{array}$$

Это отношение превращается в отношение, выражаемое диаграммой (7) при $a_0 = 0, \ldots, a_{p-2} = 0$, но в общем случае оно слабее отношения (7). Это вынуждает нас ввести в рассмотрение факторгруппу $\overline{E}_2^{p,m-p}$ группы $E_2^{p,m-p}$ по подгруппе всех элементов вида $[\delta a_{p-1} + d'a_p]_2$ и композицию

(11) $$Z^{p,m-p} \to \overline{E}_2^{p,m-p}$$

гомоморфизма (9) с гомоморфизмом факторизации $E_2^{p,m-p} \to \overline{E}_2^{p,m-p}$. Все кограницы, содержащиеся в $Z^{p,m-p}$, гомоморфизм (11), в отличие от гомоморфизма (9), переводит в нуль и, значит, индуцирует некоторый гомоморфизм

(12) $$F^{p,m-p} \to \overline{E}_2^{p,m-p},$$

где $F^{p,m-p}$ — подгруппа группы $H^m(C^{\bullet,\bullet})$, являющаяся образом подгруппы $Z^{p,m-p}$ при гомоморфизме факторизации $Z^m(C^{\bullet,\bullet}) \to H^m(C^{\bullet,\bullet})$, т. е. состоящая из классов когомологий $[c]$, содержащих коцикл c вида $(0, \ldots, 0, c_p, \ldots, c_m)$.

Ясно, что при гомоморфизме (12) подгруппа $F^{p+1,m-p-1}$ группы $F^{p,m-p}$ переходит в нуль. Поэтому этот гомоморфизм индуцирует некоторый гомоморфизм

(13) $$F^{p,m-p}/F^{p+1,m-p-1} \to \overline{E}_2^{p,m-p}.$$

С другой стороны, утверждение, что класс когомологий $[c] \in F^{p,m-p}$, $c = (0, \ldots, 0, c_p, \ldots, c_{m-p})$, переходит при гомоморфизме (12) в нуль, означает, что существует такая цепочка $a=(a_0, \ldots, a_p, 0, \ldots, 0)$, что

$$
\begin{aligned}
d'a_0 &= 0,\\
\delta a_0 + d'a_1 &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\delta a_{p-2} + d'a_{p-1} &= 0,\\
\delta a_{p-1} + d'a_p &= c_p,
\end{aligned}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 & & & & \\
a_0 \arrow[u] \arrow[r] & {} & & & \\
& a_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & & \\
& & a_{p-2} \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
& & & a_{p-1} \arrow[u] \arrow[r] & c_p \\
& & & & a_p . \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Но тогда для коцикла $c'=c-\delta a$ компонента c_p будет равна нулю, т. е. этот коцикл будет принадлежать подгруппе $Z^{p+1,\, m-p-1}$. Поскольку $[c]=[c']$, это доказывает, что подгруппа $F^{p+1,\, m-p-1}$ является ядром гомоморфизма (12) и, значит, что *гомоморфизм* (13) *представляет собой мономорфизм.*

Подгруппы $F^{p,\, m-p}$ составляют ряд вложенных подгрупп

$$H^m(C^{\bullet,\bullet})=F^{0,\, m}\supset F^{1,\, m-1}\supset\ldots\supset F^{m,\, 0}\supset F^{m+1,\, -1}=\{0\}, \tag{14}$$

начинающийся со всей группы $H^m(C^{\bullet,\bullet})=F^{0,\, m}$ и кончающийся нулевой подгруппой $F^{m+1,\, -1}=\{0\}$.

Здесь удобно ввести соответствующую общую терминологию.

Определение 4. *Градуированной абелевой группой* называется произвольная последовательность

$$H^{\bullet}=\{H^0, H^1, \ldots, H^m, \ldots\}$$

абелевых групп H^m. *Фильтрацией* градуированной группы $H^{\bullet}$ называется такое семейство $\{F^{p,\, q}\}$ абелевых групп, где $-1\leqslant p,\ q<\infty$, что:

1) каждая группа $F^{p,\, q}$ является подгруппой группы H^{p+q};

2) для любого $m\geqslant 0$ имеют место включения

$$H^m=F^{0,\, m}\supset F^{1,\, m-1}\supset\ldots\supset F^{m,\, 0}\supset F^{m+1,\, -1}=\{0\}.$$

Группой, *присоединенной* к градуированной группе $H^{\bullet}$

с фильтрацией, называется градуированная группа $\mathrm{Gr}(H^{\bullet}) = \{\mathrm{Gr}(H^m)\}$, для которой

(15) $\mathrm{Gr}(H^m) = F^{0,m}/F^{1,m-1} \oplus \ldots \oplus F^{m,0}/F^{m+1,-1}$.

Вообще говоря, группы (15) еще не позволяют восстановить группы H^m, но *если группа H^m является конечномерным линейным пространством (а группы $F^{p,m-p}$ — ее подпространствами), то группа* $\mathrm{Gr}(H^m)$ *изоморфна группе H^m*. Действительно, в этом случае обе группы H^m и $\mathrm{Gr}(H^m)$ являются конечномерными линейными пространствами одной и той же размерности (равной сумме размерностей факторпространств $F^{p,m-p}/F^{p+1,m-p-1}$, $p = 0, \ldots, m$), а мы знаем, что линейные пространства одной и той же размерности изоморфны. [Чтобы построить изоморфизм $H^m \to \mathrm{Gr}(H^m)$ надо в каждом подпространстве $F^{p,m-p}$ выбрать подпространство $R^{p,m-p}$, дополнительное к подпространству $F^{p+1,m-p-1}$ (т. е. такое, что $F^{p,m-p} = F^{p+1,m-p-1} \oplus R^{p,m-p}$). Тогда

$$H^m = R^{0,m} \oplus R^{1,m-1} \oplus \ldots \oplus R^{m,0}$$

и отображения факторизации $F^{p,m-p} \to F^{p,m-p}/F^{p+1,m-p-1}$ индуцируют изоморфизмы $R^{p,m-p} \to F^{p,m-p}/F^{p+1,m-p-1}$, составляющие изоморфизм $H^m \to \mathrm{Gr}(H^m)$. (Заметим, что изоморфизм $H^m \to \mathrm{Gr}(H^m)$ строится тем самым со значительным произволом, избежать которого в принципе нельзя.)] □

Замечание 3. Утверждение об изоморфизме линейных пространств H^m и $\mathrm{Gr}(H^m)$ *верно и без предположения конечномерности*, поскольку теорема о существовании для любого подпространства дополнительного подпространства этого предположения не требует.

Действительно, пусть $\mathcal{V}$ — произвольное линейное пространство. Напомним (см. определение 5 лекции I.2 и определеиие 4 лекции I.3), что семейство (множество) векторов пространства $\mathcal{V}$ называется *линейно независимым*, если любое его конечное подсемейство (подмножество) линейно независимо, и *полным*, если любой вектор пространства $\mathcal{V}$ является линейной комбинацией векторов некоторого конечного его подсемейства (подмножества). Линейно независимое и полное семейство векторов называется *базисом*. Ясно, что объединеиие любого линейно упорядоченного по включению семейства (цепи) линейно независимых подмножеств пространства $\mathcal{V}$ линейно незавнсимо. Следовательно, по лемме Цорна (см. лекцию 10) в множестве всех линейно независнмых подмножеств пространства $\mathcal{V}$ существуют максимальные элементы. Поскольку каждый такой элемент является, очевидно, полным подмножеством, этим доказано, что *каждое линейное пространство $\mathcal{V}$ обладает базисом.* При этом — по той же лемме Цорна — каждое линейно независимое подмножество пространства $\mathcal{V}$ содержится в некотором базисе. В частности, если $\mathcal{P}$ — подпространство пространства $\mathcal{V}$, то любой базис $\{x_\alpha\}$ подпространства $\mathcal{P}$ содержится в некотором базисе $\{x_\alpha, y_\beta\}$ всего пространства $\mathcal{V}$. Линейная оболочка Q дополнительных векторов y_β и будет, очевидно, подпространством пространства $\mathcal{V}$, дополнительным к подпространству $\mathcal{P}$.

Наша ближайшая цель будет состоять в вычислении для градуированной группы $H^\bullet(C^{\bullet,\bullet}) = \{H^m(C^{\bullet,\bullet})\}$ с фильтрацией (14) присоединенных групп (15). Для этого нам надо, во-первых, охарактеризовать образ каждого гомоморфизма (9), а во-вторых, описать переход от групп $E_2^{p,q}$ к группам $\overline{E}_2^{p,q}$. Мы займемся этим в следующей лекции.