Лекция 23

Группы $E_r^{p,q}$.— Спектральные последовательности.— Спектральная последовательность двойного комплекса.— Спектральная последовательность покрытия.

Продолжим изучение групп $E_2^{p,q}$ для двойного комплекса $C^{\bullet,\bullet}=\{C^{p,q};\ \delta,\ d\}$.

Как мы знаем (см. предыдущую лекцию),

а$_2$) *Элемент* $[c]_2\in E_2^{p,q}$, $c\in C^{p,q}$, *определен тогда и только тогда, когда* $d'c=0$ *и существует такая коцепь* c_1, *что* $\delta c+d'c_1=0$; *схематически*:

$$
\begin{tikzcd}
0 & \\
c \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& c_1 . \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

При этом

б$_2$) *Равенство* $[c]=[c']_2$ *имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие коцепи* a *и* b, *что* $d'a=0$ *и* $c'-c=\delta a+d'b$; *схематически:*

$$
\begin{tikzcd}
0 & \\
a \arrow[u] \arrow[r] & a'-c \\
& b . \arrow[u]
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

С другой стороны, элемент $[c]_2$ тогда и только тогда принадлежит образу гомоморфизма $Z^{p,m-p}\longrightarrow E_2^{p,m-p}$, когда существует цепочка (1), которую можно удлинить до цепочки

$$
\begin{tikzcd}
0 & & & \\
c \arrow[u] \arrow[r] & {} & & \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \, \cdot \, \cdot & \\
& & \cdot \arrow[d, phantom] & \\
& & c_{q-1} \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& & & c_q \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
d'c&=0,\\
\delta c+d'c_1&=0,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\\
\delta c_{q-1}+d'c_q&=0,\\
\delta c_q&=0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

длины $q+1$, опускающейся до нижней строки комплекса $C^{\bullet,\bullet}$.

Таким образом, мы должны среди всех цепочек вида (1) отобрать цепочки, удлиняемые до цепочки вида (3). Естественно это делать, шаг за шагом удлиняя цепочку (1).

Чтобы удлинить цепочку (1) на один член, мы рассмотрим коцепь $\delta c_1 \in C^{p+2,\,q-1}$

$$\begin{tikzcd} 0 & & \\ c \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\ & c_1 \arrow[u] \arrow[r] & \delta c_1. \end{tikzcd}$$

Так как $d\,\delta c_1 = \delta\, dc_1 = \pm\,\delta\,\delta c = 0$ и $\delta(\delta c_1) = 0$, то для коцепи δc_1 имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ \delta c_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\ & 0, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

показывающая, что эта коцепь определяет некоторый элемент $[\delta c_1]_2 \in E_2^{p+2,\,q-1}$. Так как коцепь c_1 в цепочке (1) может быть заменена любой коцепью вида $c_1' = c_1 + a$, где $d'a = 0$, то коцепь δc_1 определена с точностью до слагаемого δa:

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ a \arrow[u] \arrow[r] & \delta c_1' - \delta c_1 \\ & 0. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Это показывает (см. б_2), что элемент $[\delta c_1]_2$ не зависит от выбора коцепи c_1 и однозначно определяется коцепью c. Более того, если $[c']_2 = [c]_2$, т. е. (см. снова б_2) если

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ a \arrow[u] \arrow[r] & c' - c \\ & b, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

то

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ c' \arrow[u] \arrow[r] & {} \\ & c_1', \arrow[u] \end{tikzcd}$$

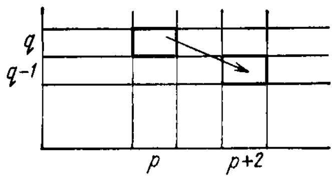
где $c_1' = c_1 + \delta b$, и потому $\delta c_1' = \delta c_1$. Следовательно, $[\delta c_1]_2$ зависит только от $[c]_2$, и, значит, формула

$$d_2 [c]_2 = [\delta c_1]_2$$

корректно определяет некоторое отображение

$$d_2\colon\ E_2^{p,\,q} \to E_2^{p+2,\,q-1}; \tag{4}$$

схематически:



Из определения отображения d_2 и утверждения **б$_2$** немедленно вытекает, что

в$_2$) *Равенство* $d_2[a]_2 = [c]_2$ *равносильно существованию цепочки вида*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ \uparrow & & & & \\ a & \to & & & \\ & & \uparrow & & \\ & & a_1 & \to & c \\ & & & & \uparrow \\ & & & & b. \end{array} \tag{5}$$

В частности, $d_2[c]_2 = 0$ *тогда и только тогда, когда существует цепочка вида*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ \uparrow & & & & \\ c & \to & & & \\ & & \uparrow & & \\ & & c_1 & \to & \\ & & & & \uparrow \\ & & & & c_2. \end{array} \tag{6}$$

Но если имеет место (5), то имеет место и (6) с $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$. Поэтому

$$d_2 \circ d_2 = 0, \tag{7}$$

т. е. для любых p и q имеет место включение

$$B_2^{p,\,q} \subset Z_2^{p,\,q},$$

где

$$Z_2^{p,\,q} = \operatorname{Ker}(d_2\colon\ E_2^{p,\,q} \to E_2^{p+2,\,q-1})$$

— ядро отображения d_2: $E_2^{p,q} \to E_2^{p+2,q-1}$, а

$$B_2^{p,q} = \operatorname{Im}(d_2\colon E_2^{p-2,q+1} \to E_2^{p,q})$$

— образ отображения d_2: $E_2^{p-2,q+1} \to E_2^{p,q}$. Мы положим

$$E_3^{p,q} = Z_2^{p,q}/B_2^{p,q}.$$

Для элемента $[c]_2 \in Z_2^{p,q}$ соответствующий элемент группы $E_3^{p,q}$ (смежный класс $[c]_2 + B_2^{p,q}$) мы будем обозначать символом $[c]_3$.

По определению элемент $[c]_3$ определен тогда и только тогда, когда определен элемент $[c]_2$ и $d_2[c]_2 = 0$. В силу второго утверждения **в**$_2$ это означает, что

а$_3$) *Элемент* $[c]_3 \in E_3^{p,q}$, $c \in C^{p,q}$, *определен тогда и только тогда, когда существует цепочка вида*

(8)
$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
c \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& & c_2. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

При этом, согласно первому утверждению **в**$_2$,

б$_3$) *Равенство* $[c]_3 = [c']_3$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует цепочка вида*

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
a \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
& a_1 \arrow[u] \arrow[r] & c' - c \\
& & b. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Для любой цепочки (8) коцепь δc_2 обладает тем свойством, что

$$\begin{tikzcd}
0 & \\
\delta c_2 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& 0. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Поэтому определен элемент $[\delta c_2]_2 \in E_2^{p+3,q-2}$, причем

$$d_2[\delta c_2]_2 = 0,$$

и, значит, определен элемент $[\delta c_2]_3$. Так как разность двух цепочек вида (8) имеет вид

$$\begin{array}{ll} 0 & \\ \uparrow & \\ a_1 \longrightarrow & \\ & \uparrow \\ & a_2, \end{array}$$

то при изменении цепочки (8) к элементу $[\delta c_2]_2$ прибавляется элемент $[\delta a_2]_2 = d_2[a_1]_2$, и потому элемент $[\delta c_2]_3$ остается прежним. Это означает, что формула

$$d_3[c]_2 = [\delta c_2]_3$$

корректно определяет некоторое отображение

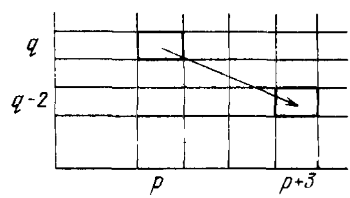
$$d_3\colon Z_2^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,\,q-2}. \tag{9}$$

Чтобы достичь здесь полной аналогии с предыдущим случаем, мы заметим, что если $[c]_2 \in B_2^{p,q}$, т. е. если

$$\begin{array}{ll} 0 & \\ \uparrow & \\ a_1 \longrightarrow & \\ & \uparrow \\ & a_2 \longrightarrow c, \end{array}$$

то для c существует цепочка (8) с $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$. Следовательно, $d_3[c]_2 = 0$, и поэтому отображение (9) индуцирует некоторое отображение

$$d_3\colon E_3^{p,q} \longrightarrow E_3^{p+3,\,q-2}. \tag{10}$$



Из определения отображения (10) и утверждения б$_3$ немедленно вытекает, что в$_3$) *Равенство* $d_3[a]_3=[c]_3$ *равносильно существованию цепочки вида*

(11)
$$\begin{tikzcd}
0 & & & \\
a \arrow[u] \arrow[r] & {} & & \\
& a_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
& & a_2 \arrow[u] \arrow[r] & c \\
& & & b. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В частности, $d_3[c]_3=0$ *тогда и только тогда, когда существуют цепочки вида*

(12)
$$\begin{tikzcd}
0 & & & \\
c \arrow[u] \arrow[r] & {} & & \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} & \\
& & c_2 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& & & c_3. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Поскольку из (11) следует, что для коцепи c существует цепочка (12) с $c_1=0$, $c_2=0$, $c_3=0$ мы видим, что подобно отображению d_2 отображение d_3 удовлетворяет соотношению

$$d_3\circ d_3=0,$$

и потому определены группы

$$E_4^{p,\,q}=Z_3^{p,\,q}/B_3^{p,\,q},$$

где

$$Z_3^{p,\,q}=\operatorname{Ker}(d_3\colon\ E_3^{p,\,q}\longrightarrow E_3^{p+3,\,q-2}),$$
$$B_3^{p,\,q}=\operatorname{Im}(d_3\colon\ E_3^{p-3,\,q+2}\longrightarrow E_3^{p,\,q}).$$

Продолжая процесс, мы для любого $r\geqslant 2$ получим группы $E_r^{p,\,q}$, состоящие из элементов вида $[c]_r$, где $c\in C^{p,\,q}$, причем будут иметь место следующие утверждения:

а$_r$) *Элемент $[c]_r$ определен тогда и только тогда, когда существует цепочка вида*

(13)
$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
0 & & & \\
c \arrow[u] \arrow[r] & {} & & \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & \\
& & & {} \\
& & & c_{r-1}. \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

б$_r$) *Равенство $[c]_r = [c']_r$ имеет место тогда и только тогда, когда существует цепочка вида*

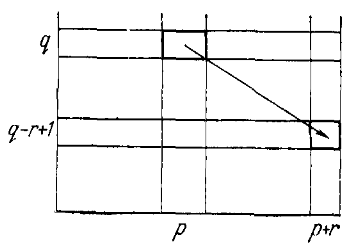
(14)
$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
0 & & & \\
a_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdots & & \\
& {} & & \\
& a_{r-2} \arrow[u] \arrow[r] & c' \arrow[r, dash] & c \\
& & b. \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Для любой цепочки (13) элемент $[\delta c_{r-1}]_r$ зависит только от элемента $[c]_r$, так что формула

$$d_r [c]_r = [\delta c_{r-1}]_r$$

корректно определяет некоторое отображение

(15) $$d_r \colon E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\, q-r+1}$$



При этом

в$_r$) *Равенство* $d_r[a]_r=[c]_r$ *равносильно существованию цепочки вида*

$$\begin{tikzcd}
0 \\
a \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& a_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& & \ddots \\
& & & {} \\
& & & a_{r-1} \arrow[u] \arrow[r] & c \\
& & & & b. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

В частности, $d_r[c]_r=0$ *тогда и только тогда, когда существует цепочка вида*

$$\begin{tikzcd}
0 \\
c \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& c_1 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& & \ddots \\
& & & {} \\
& & & c_{r-1} \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& & & & c_r. \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Поэтому $d_r \circ d_r=0$, и, значит, определены группы

$$E_{r+1}^{p,q}=Z_r^{p,q}/B_r^{p,q},$$

где

$$Z_r^{p,q}=\operatorname{Ker}(d_r\colon E_r^{p,q}\longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}),$$
$$B_r^{p,q}=\operatorname{Im}(d_r\colon E_r^{p+r,\,q+r-1}\longrightarrow E_r^{p,q}),$$

и т. д.

Построенный объект заслуживает специального определения.

Определение 1. *Спектральной последовательностью* (или, более точно, *когомологической спектральной последовательностью первой четверти*) называется семейство

$$\{E_r^{p,q};\ d_r\} \tag{16}$$

групп (или линейных пространств) $E_r^{p,q}$ и гомоморфизмов

$$d_r\colon E_r^{p,q}\longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}, \tag{17}$$

где $r \geqslant 2$ и $0 \leqslant p, q < \infty$ (впрочем, во избежание многочисленных оговорок удобно считать, что группы $E_r^{p,q}$ определены и для отрицательных p и q, причем $E_r^{p,q} = 0$, если $p < 0$ или $q < 0$), обладающих тем свойством, что для любого $r \geqslant 2$

$$d_r \circ d_r = 0 \tag{18}$$

и

$$E_{r+1}^{p,q} = Z_r^{p,q}/B_r^{p,q}, \tag{19}$$

где

$$Z_r^{p,q} = \operatorname{Ker}(d_r\colon\ E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,\,q-r+1}),$$
$$B_r^{p,q} = \operatorname{Im}(d_r\colon\ E_r^{p-r,\,q+r-1} \longrightarrow E_r^{p,q})$$

(согласно (18) имеет место включение $B_r^{p,q} \subset Z_r^{p,q}$, и, значит, факторгруппа (19) определена).

Гомоморфизмы (17) принято называть *дифференциалами* спектральной последовательности (16).

Для каждого фиксированного $r \geqslant 2$ группы $E_r^{p,q}$ удобно располагать в таблицу вида

E_r:

$E_r^{0,q}$	...	$E_r^{p,q}$	...
. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$E_r^{0,0}$	...	$E_r^{p,0}$	...

Эта таблица называется *r-м членом* спектральной последовательности (16).

Переход от таблицы E_r к таблице E_{r+1} состоит из двух шагов. На первом шаге («чистке») мы оставляем в каждой клетке (p, q) лишь элементы, переходящие при дифференциале (17) в нуль. Этот шаг не меняет содержимого клетки (p, q), когда клетка $(p+r,\ q-r+1)$, в которую бьет дифференциал (17), содержит только нуль. Так как клетка $(p+r,\ q-r+1)$ расположена на $r-1$ рядов ниже клетки (p, q), то в клетке (p, q) чистка заведомо прекращается, поэтому на дифференциале d_{q+1}:

$$Z_{q+2}^{p,q} = Z_{q+3}^{p,q} = \ldots$$

Второй шаг («сокращение») состоит в том, что очищенное содержимое клетки (p, q) факторизуется по подгруппе элементов, приходящих из клетки $(p-r, q+r-1)$, расположенной на r столбцов левее. Поэтому этот шаг не меняет содержания клетки (p, q), когда $p-r<0$, т. е. при $r \geqslant p+1$:

$$B_{p+1}^{p, q}=B_{p+2}^{p, q}=\ldots$$

Таким образом, для любых p и q начальное содержимое $E_2^{p, q}$ клетки (p, q), постепенно уменьшаясь при увеличении r, рано или поздно *стабилизируется*, т. е. существует такое $r_0 \geqslant 2$ (а именно, $r_0=\max(p+1, q+2)$), что

$$E_{r_0}^{p, q}=E_{r_0+1}^{p, q}=\ldots$$

Мы положим

$$E_{\infty}^{p, q}=E_{r_0}^{p, q}.$$

Согласно (19) каждый элемент y группы $E_r^{p, q}$ является образом некоторого элемента группы $E_{r-1}^{p, q}$ (принадлежащего подгруппе $Z_{r-1}^{p, q}$), который в свою очередь является образом некоторого элемента группы $E_{r-2}^{p, q}$ (принадлежащего прообразу в $E_{r-2}^{p, q}$ подгруппы $Z_{r-1}^{p, q}$) и т. д. Тот факт, что в результате этого попятного движения мы доходим до элемента x группы $E_2^{p, q}$, записывается формулой $y=[x]_r$. При $r=r_0$ вместо $[x]_{r_0}$ мы будем писать $[x]_\infty$. (Таким образом, для элементов $[c]_r$ построенной выше по двойному комплексу спектральной последовательности символ $[x]_r$ будет иметь то же значение, что и символ $[c]_r$, где c — такая коцепь, что $x=[c]_2$.)

Если для элемента $x \in E_2^{p, q}$ элемент $[x]_r$ определен, то говорят, что элемент x *доживает до* E_r. Элемент x тогда и только тогда доживает до E_{r+1}, когда он доживает до E_r и $d_r[x]_r=0$.

Удобно (особенно в устных, неформальных обсуждениях) считать каждый дифференциал d_r частичным и многозначным отображением из $E_2^{p, q}$ в $E_2^{p+r, q-r+1}$. [Эпитет «частичный» означает, что на самом деле d_r определен только на некоторой подгруппе группы $E_2^{p, q}$ (а именно, на подгруппе элементов, доживающих до E_r), а эпитет «многозначный» — что значения дифференциала d_r принадлежат на самом деле не группе $E_2^{p+r, q-r+1}$, а некоторой ее факторгруппе (или, точнее говоря, некоторой подгруппе этой факторгруппы).] Соответственно этому элемент $d_r[x]_r$ обычно обозначается символом $d_r x$. Он определен тогда и только тогда, когда $d_2 x=0, \ldots, d_{r-1} x=0$.

Если $d_r x = 0$, то элемент x называется *циклом дифференциала* d_r. В частности, если $d_r x = 0$ при любом $r \geqslant 2$, то элемент x называется *циклом всех дифференциалов*. Это имеет место тогда и только тогда, когда определен элемент $[x]_\infty$ (элемент x доживает до E_∞).

Циклы всех дифференциалов образуют подгруппу $Z_\infty^{p,q}$ группы $E_2^{p,q}$. Группа $E_\infty^{p,q}$ является эпиморфным образом группы $Z_\infty^{p,q}$ при отображении

$$x \mapsto [x]_\infty, \quad x \in Z_\infty^{p,q}.$$

Таким образом, если $B_\infty^{p,q}$ — ядро этого отображения, то

$$E_\infty^{p,q} = Z_\infty^{p,q} / B_\infty^{p,q}$$

для любых p и q.

Вернемся теперь к двойному комплексу $C^{\cdot\cdot} = \{C^{p,q};\ \delta,\ d\}$. Поставленные в конце предыдущей лекции задачи — охарактеризовать образ гомоморфизма

$$Z^{p,q} \longrightarrow E_2^{p,q} \tag{20}$$

и ядро эпиморфизма

$$E_2^{p,q} \longrightarrow \overline{E}_2^{p,q} \tag{21}$$

— тривиальным образом решаются в терминах построенной по этому комплексу спектральной последовательности $\{E_r^{p,q};\ d_r\}$. Действительно, по определению элемент $x = [c]_2$ группы $E_2^{p,q}$ тогда и только тогда принадлежит образу гомоморфизма (20), когда для коцепи c существует цепочка вида (3), т. е. (см. утверждение в$_r$) когда элемент x является циклом всех дифференциалов. Следовательно, *образом гомоморфизма* (20) *является подгруппа* $Z_\infty^{p,q}$.

Аналогично, ядро эпиморфизма (21) состоит из элементов $[c]_2$, для которых существует цепочка

$$\begin{tikzcd}
0 \\
a_0 \arrow[u] \arrow[r] & {} \\
& a_1 \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \\
& & \cdot \\
& & \cdot & {} \\
& & & a_{p-1} \arrow[u] \arrow[r] & c \\
& & & & b \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

длины $p+1$, начинающаяся в первом столбце комплекса $C^{\cdot,\cdot}$. Поскольку, как показывает непосредственное сравнение определений, это в точности элементы подгруппы $B_\infty^{p,q}$, этим доказано, что

$$\overline{E}_2^{p,q} = E_2^{p,q}/B_\infty^{p,q}.$$

Следовательно, $E_\infty^{p,q} \subset \overline{E}_2^{p,q}$ и *мономорфизм* (13) *лекции* 22 *представляет собой изоморфизм факторгруппы* $F^{p,m-p}/F^{p+1,m-p+1}$ *на группу* $E_\infty^{p,q}$.

Таким образом, группа $\mathbf{Gr}(H^m(C^{\cdot,\cdot}))$, присоединенная к группе $H^m(C^{\cdot,\cdot})$, является прямой суммой групп, расположенных на m-й антидиагонали таблицы E_∞:

$E_\infty^{0,m}$		...			...
	$E_\infty^{1,m-1}$	...			...
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
		...	$E_\infty^{m-1,1}$		...
·		...		$E_\infty^{m,0}$	...

$$\mathbf{Gr}(H(C^{\cdot,\cdot})) = E_\infty^{0,m} \oplus E_\infty^{1,m-1} \oplus \ldots \oplus E_\infty^{m-1,1} \oplus E_\infty^{m,0}.$$

Определение 2. Пусть $H^\cdot = \{H^m\}$ — градуированная группа с **фильтрацией**

$$H^m = F^{0,m} \supset F^{1,m-1} \supset \ldots \supset F^{m,0} \supset F^{m+1,-1} = \{0\}.$$

Говорят, что спектральная последовательность $\{E_r^{p,q};\ d_r\}$ *сходится к группе* $H^\cdot$, и пишут

$$E_r^{p,q} \Longrightarrow H^m,$$

если

$$E_\infty^{p,q} = F^{p,q}/F^{p+1,q-1}$$

для любых p и q.

В силу этого определения все произведенное исследование мы можем теперь резюмировать в следующей окончательной теореме:

Теорема 1. *Для любого двойного комплекса* $C^{\cdot,\cdot} = \{C^{p,q};\ \delta, d\}$ *существует такая спектральная последовательность* $\{E_r^{p,q};\ d_r\}$, *что*

$$E_2^{p,q} = H_\delta^p H_d^q (C^{\cdot,\cdot})$$

и

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^m (C^{\cdot,\cdot}). \ \square$$

Эта теорема фактически была известна Лере (хотя явно он ее, по-видимому, не формулировал).

Следствие 1. *Для любого нумерируемого покрытия* $\mathfrak{U}$ *хаусдорфова гладкого многообразия* $\mathscr{X}$ *существует такая спектральная последовательность*

$$\{E_r^{p,q};\ d_r\}, \tag{22}$$

что

$$E_2^{p,q} = H_\delta^p H_\delta^q (\mathfrak{U}) \tag{23}$$

и

$$E_r^{p,q} \Rightarrow H^m \mathscr{X}. \ \square \tag{24}$$

Как мы уже отмечали, для вычисления групп (23) достаточны сведения, содержащиеся в пп. **а** и **б** на стр. 355, и, значит, эти группы мы можем считать известными. Важно отметить, что *никакая другая информация о спектральной последовательности* (22) *нам, как правило, недоступна*. В частности, в общем случае мы ничего не можем сказать о том, как действуют дифференциалы d_r (за исключением того, что из клетки (p, q) они бьют в клетку $(p+r, q-r+1)$), или о том, каковы фильтрующие подгруппы $F^{p,q}$. Короче говоря, единственно, что мы знаем и чем можем пользоваться,— это голый факт существования спектральной последовательности (22) с начальным членом (23), обладающей свойством (24).

Удивительно, что во многих интересных и важных ситуациях этой информации оказывается достаточно! (Впрочем, если подумать, что этот факт теряет почти всю свою таинственность—просто ситуации, где этой информации недостаточно, настолько безнадежны, что они теряют статус важных и интересных.)

Пример 1 (продолжение примера 1 лекции 22). Как было показано в примере 1 лекции 22, для спектральной последовательности двухэлементного покрытия $\{U, V\}$ сферы $\mathbb{S}^n$ член E_2 имеет вид

$n-1$		$\mathbb{R}$	...
. . .	. . .	. . .	. . .
0	$\mathbb{R}$		...
	0	1	

Поэтому все дифференциалы d_r действуют либо из клетки, либо в клетку, содержащую лишь нуль. Поэтому они все равны нулю и, значит, $E_2 = E_\infty$. (Обладающая этим свойством спектральная последовательность называется *вырожденной*.) Таким образом, все антидиагонали таблицы E_∞ состоят только из нулей, за исключением нулевой и n-й, которые содержат по одной группе $\mathbb{R}$. Поэтому

$$H^m\mathbb{S}^n = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{если } m=0 \text{ или } m=n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Конечно, это то же самое вычисление, что и в лекции 20, лишь изложенное с достигнутой нами теперь высоты.

Пример 2. Если покрытие $\mathfrak{U}$ является покрытием Лере, то $E_1^{p,q}=0$ и, тем более, $E_2^{p,q}=0$ при $q>0$. Поэтому снова спектральная последовательность покрытия вырождается и

$$H^m\mathscr{X} = E_2^{m,0}.$$

С другой стороны, ясно, что в рассматриваемом случае комплекс $\{E^{\bullet,0}; \delta^*\}$ является не чем иным, как коцепным комплексом $C^\bullet(\mathfrak{U}; \mathbb{R})$ покрытия $\mathfrak{U}$ и, значит,

$$E_2^{m,0} = H^m(\mathfrak{U}; \mathbb{R}) \text{ для любого } m \geqslant 0.$$

Тем самым мы снова получаем теорему 1 лекции 22, которая оказывается, таким образом, тривиальным частным случаем следствия 1.