Лекция 24

Компактно исчерпываемые и паракомпактные топологические пространства.— Паракомпактиые многообразия.— Интегралы в $\mathbb{R}^n$.— Кубируемые миожества и плотности в произвольных многообразиях.— Интегрирование плотностей.

Аналитические методы вычисления групп когомологий требуют предварительного построения на многообразиях интегрального исчисления. Мы начнем это построение с изложения необходимых сведений из топологии.

Напомним (см. определение 5 лекции 14), что топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *локально компактным*, если любая его точка обладает окрестностью U, замыкание $\overline{U}$ которой компактно.

Ясно, что *любое хаусдорфово многообразие $\mathscr{X}$ локально компактно*. (Для нехаусдорфовых многообразий это уже не так; например, нехаусдорфова прямая с особой точкой бесконечной кратности не является локально компактным пространством.)

Легко видеть также, что *если пространство $\mathscr{X}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности, локально компактно и хаусдорфово, то в нем существует счетная база $\{U_i\}$, замыкания $\overline{U}_i$ всех элементов которой компактны.* (Для доказательства достаточно отобрать в произвольной счетной базе пространства $\mathscr{X}$ множества с компактными замыканиями. Контрольный вопрос: Зачем нужно требование хаусдорфовости?)

Определение 1. Топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *компактно исчерпываемым*, если оно является объединением такой возрастающей последовательности

$$O_1 \subset O_2 \subset \ldots \subset O_n \subset O_{n+1} \subset \ldots$$

открытых множеств (называемой *компактным исчерпанием* пространства $\mathscr{X}$), что замыкание $\overline{O}_n$ каждого множества O_n компактно и содержится в O_{n+1}.

Предложение 1. *Каждое хаусдорфово локально компактное и удовлетворяющее второй аксиоме счетности топологическое пространство $\mathscr{X}$ компактно исчерпываемо.*

Доказательство. Пусть $\{U_i,\ 1 \leqslant i < \infty\}$ — счетная база пространства $\mathscr{X}$, состоящая из множеств с компактными замыканиями. Положив $O_1 = U_1$, предположим, что для некоторого $n \geqslant 2$ множество O_{n-1} уже построено. Поскольку множества U_i покрывают $\mathscr{X}$ (а множество $\overline{O}_{n-1}$ компактно), существует такое $j \geqslant 1$ (которое для определенности можно выбрать наименьшим), что $\overline{O}_{n-1} \subset U_1 \cup \ldots \cup U_j$. Мы положим $O_n = U_1 \cup \ldots \cup U_j$. Тем самым множества O_n по индукции будут построены для всех $n \geqslant 1$, и ясно, что они составляют компактное исчерпание пространства $\mathscr{X}$. □

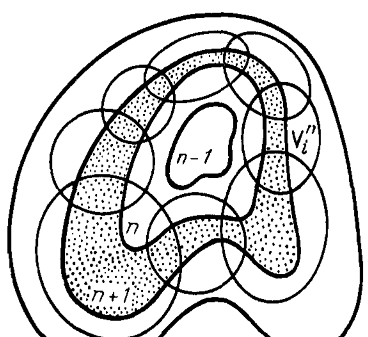
В частности, мы видим, что *любое хаусдорфово многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, компактно исчерпываемо.*

Определение 2. Открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ топологического пространства $\mathscr{X}$ называется *локально конечным*, если любая точка $p \in \mathscr{X}$ обладает окрестностью, пересекающейся лишь с конечным числом элементов этого покрытия.

Напомним (см. определение 1 лекции 8), что покрытие $\{U_\alpha\}$ пространства $\mathscr{X}$ *вписано* в покрытие $\{V_\beta\}$, если для любого α существует такое β, что $U_\alpha \subset V_\beta$.

Предложение 2. *Если хаусдорфово пространство $\mathscr{X}$ компактно исчерпываемо, то для любого его открытого покрытия $\{V_\beta\}$ существует вписанное в него локально конечное покрытие.*

Доказательство. Пусть $\{O_n\}$ — произвольное компактное исчерпание пространства $\mathscr{X}$. Для каждого $n \geqslant 1$ множества $V_\beta^n = (O_{n+2} \setminus \overline{O}_{n-1}) \cap V_\beta$ (условно считаем, что $O_0 = \varnothing$) составляют открытое покрытие множества $\overline{O}_{n+1} \setminus O_n$. Поскольку множество $\overline{O}_{n+1} \setminus O_n$ компактно (почему?), из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\left\{V_{\beta_1}^n, \ldots \right.$ $\left. \ldots, V_{\beta_{m(n)}}^n\right\}$. Так как множества $\overline{O}_{n+1} \setminus O_n$ покрывают $\mathscr{X}$, то все множества вида $V_{\beta_i}^n$, $1 \leqslant n < \infty$, $1 \leqslant$



$\leqslant i \leqslant m(n)$, составляют покрытие пространства $\mathscr{X}$, очевидно, вписанное в покрытие $\{V_\beta\}$, а так как каждое множество O_k не пересекается с множествами $V_{\beta_i}^n$ с $n > k$ (и, значит, пересекается лишь с конечным числом множеств вида $V^n_{\beta_i}$, $n \leqslant k$), то покрытие $\{V^n_{\beta_i}\}$ локально конечно (для любой точки $p \in \mathscr{X}$ существует такое k, что $p \in O_k$ и, значит, множество O_k является окрестностью этой точки, пересекающейся лишь с конечным числом элементов покрытия $\{V^n_{\beta_i}\}$). $\square$

Замечание 1. В общей топологии топологическое пространство $\mathscr{X}$ называется *паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать локально конечное покрытие. В этой терминологии предложение 2 означает, что *любое хаусдорфово компактно исчерпываемое пространство паракомпактно.*

Для случая, когда $\mathscr{X}$ является гладким многообразием, предложение 2 можно уточнить.

Будем называть открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ гладкого многообразия $\mathscr{X}$ *компактно нумерируемым*, если существует такое подчиненное ему разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$, что $\eta_\alpha = 0$ вне некоторого компактного множества $C_\alpha \subset \mathscr{X}$.

Предложение 3. *В любое открытое покрытие $\{V_\beta\}$ гладкого хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, можно вписать локально конечное компактно нумерируемое покрытие $\{U_\alpha\}$.*

Доказательство. Поскольку, согласно предложению 1, многообразие $\mathscr{X}$ компактно исчерпываемо, к нему применимо предложение 2. Пусть $\{V^n_{\beta_i}\}$ — покрытие, построенное при доказательстве предложения 2. Для любой точки $p \in V^n_{\beta_i}$ существует содержащаяся в $V^n_{\beta_i}$ координатная окрестность $U_{p,i,n}$ этой точки с компактным замыканием $\overline{U}_{p,i,n}$. Согласно предложению 2 лекции 14 существуют такие открытые множества $V_{p,i,n}$ и $W_{p,i,n}$, что

$$p \in W_{p,i,n}, \quad \overline{W}_{p,i,n} \subset V_{p,i,n}, \quad \overline{V}_{p,i,n} \subset U_{p,i,n},$$

и пара $(V_{p,i,n}, W_{p,i,n})$ обладает функцией Урысона. Для каждого фиксированного i все множества вида $W_{p,i,n}$ образуют открытое покрытие компактного множества $\overline{O}_{n+1} \setminus O_n$. Выбрав в этом покрытии конечное подпокрытие и сделав это для всех i, обозначим выбранные множества $W_{p,i,n}$ через W_α. Пусть V_α и U_α — соответствующие множества $V_{p,i,n}$ и $U_{p,i,n}$.

По построению

а) для любого α имеют место включения

$$\overline{W}_\alpha \subset V_\alpha, \quad \overline{V}_\alpha \subset U_\alpha,$$

причем множество $\overline{U}_\alpha$ (а значит, и каждое из множеств $\overline{W}_\alpha$ и $\overline{V}_\alpha$) компактно;

б) для каждой пары (V_α, W_α) существует функция Урысона

$$\varphi_\alpha\colon \mathscr{X} \to \mathbb{R}$$

(обладающая — напомним — тем свойством, что $\varphi_\alpha = 1$ на $\overline{W}_\alpha$ и $\varphi_\alpha = 0$ вне V_α);

в) семейство $\{W_\alpha\}$, а значит, и каждое из семейств $\{V_\alpha\}$ и $\{U_\alpha\}$ является открытым покрытием пространства $\mathscr{X}$ (очевидно, локально конечным и вписанным в покрытие $\{V_\beta\}$).

Так как покрытие $\{V_\alpha\}$ локально конечно, то семейство функций $\{\varphi_\alpha\}$ также локально конечно. Поэтому определена функция

$$\varphi = \sum_\alpha \varphi_\alpha.$$

Так как $\varphi_\alpha = 1$ на $\overline{W}_\alpha$ и $\varphi_\alpha \geqslant 0$ на $\mathscr{X}$, то $\varphi \geqslant 1$ на $\mathscr{X}$ и, в частности, $\varphi \neq 0$ на $\mathscr{X}$. Поэтому определены функции

$$\eta_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\varphi}.$$

Функции η_α составляют разбиение единицы, подчиненное, очевидно, покрытию $\{U_\alpha\}$. Поскольку $\eta_\alpha = 0$ вне компактного множества $\overline{V}_\alpha$, этим доказано, что покрытие $\{U_\alpha\}$ компактно нумерируемо. Поскольку это покрытие локально конечно и вписано в покрытие $\{V_\beta\}$, предложение 3 тем самым полностью доказано. $\square$

Следствие 1. *Каждое открытое покрытие $\{V_\beta\}$ гладкого хаусдорфова многообразия $\mathscr{X}$, удовлетворяющего второй аксиоме счетности, нумерируемо.*

Доказательство. В силу предложения 3 достаточно показать, что *покрытие $\{V_\beta\}$ нумерируемо, если в него вписано нумерируемое покрытие $\{U_\alpha\}$*. Выбрав для каждого индекса α такой индекс $\beta(\alpha)$, что $U_\alpha \subset V_{\beta(\alpha)}$, рассмотрим разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Пусть

$$\zeta_\beta = \sum_{\beta(\alpha) = \beta} \eta_\alpha,$$

где суммирование распространено на все α, для которых $\beta(\alpha)=\beta$. (Если таких α нет, то $\zeta_\beta=0$.) Ясно, что функция ζ_β определена и неотрицательна. Кроме того, так как $\zeta_\beta(p)\neq 0$ только тогда, когда существует такое α, что $\beta=\beta(\alpha)$ и $\eta_\alpha(p)\neq 0$, то семейство функций $\{\zeta_\beta\}$ локально конечно, а так как каждая функция η_α входит слагаемым в одну и только одну функцию ζ_β, то

$$\sum_\beta \zeta_\beta=\sum_\alpha \eta_\alpha=1.$$

Наконец, если $p\notin V_\beta$, то $p\in U_\alpha$ для всех α с $\beta(\alpha)=\beta$, и, значит, $\eta_\alpha(p)=0$. Следовательно, $\zeta_\beta(p)=0$. Таким образом, $\{\zeta_\beta\}$ является разбиением единицы, подчиненным покрытию $\{V_\beta\}$. Поэтому это покрытие нумерируемо. $\square$

Следствие 1 означает, что *любое гладкое хаусдорфово многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, паракомпактно*. Это утверждение составляет содержание теоремы 2 лекции 22, которую тем самым мы можем теперь считать доказанной.

Замечание 2. Можно показать—это трудная теорема!—что *каждая компонента локально компактного и метризуемого пространства удовлетворяет второй аксиоме счетности*. С другой стороны, в следующем семестре мы покажем, что *любое паракомпактное и хаусдорфово гладкое многообразие метризуемо*. Поэтому *в классе связных и хаусдорфовых гладких многообразий паракомпактность равносильна второй аксиоме счетности*.

Замечание 3. Согласно предложению 3 каждое хаусдорфово гладкое многообразие, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, паракомпактно как топологическое пространство (см. выше замечание 1). Поскольку топологическое пространство тогда и только тогда паракомпактно, когда паракомпактна каждая его компонента, отсюда, ввиду сказанного в замечании 2, немедленно вытекает, что хаусдорфово паракомпактное многообразие паракомпактно и как топологическое пространство. С другой стороны, несколько усложнив доказательство предложения 3, можно показать, что заключение этого предложения (а значит, и следствия 1) остается в силе и для любого хаусдорфова гладкого многообразия, которое паракомпактно как топологическое пространство. Следовательно, *хаусдорфово многообразие тогда и только тогда паракомпактно, когда оно паракомпактно как топологическое пространство*.

Замечание 4. Понятие нумерируемого покрытия, конечно, немедленно переносится на любые топологические пространства (достаточно в определении разбиения единицы гладкие функции заменить непрерывными), и легко видеть, что *если в топологическом пространстве $\mathscr{X}$ любое открытое покрытие нумерируемо, то пространство паракомпактно* (поскольку для каждого разбиения единицы $\{\eta_\alpha\}$ множества $O_\alpha = \{p \in \mathscr{X};\ \eta_\alpha(p) \neq 0\}$ составляют локально конечное открытое покрытие, вписанное в любое покрытие, которому подчинено разбиение $\{\eta_\alpha\}$). Интересно, что в классе хаусдорфовых пространств верно и обратное утверждение, т. е. *в хаусдорфовом паракомпактном пространстве каждое открытое покрытие нумерируемо.* [Заметим, что утверждение замечания 3 для гладких многообразий отсюда еще непосредственно не следует, поскольку нумерируемые открытые покрытия гладкого многообразия априори составляют лишь часть его нумерируемых открытых покрытий как топологического пространства.] Доказательство этого утверждения отнюдь не просто и опирается на целый ряд трудных теорем общей топологии. В первую очередь требуется теорема Урысона, утверждающая, что в хаусдорфовом нормальном пространстве для любой пары (V, W) открытых множеств, удовлетворяющих соотношению $\overline{W} \subset V$, существует непрерывная функция, равная единице на W и нулю вне V, а также предложение 3 лекции 4 о существовании сжатий (которое у нас доказано — напомним — лишь частично). С помощью этих двух теорем уже без особого труда доказывается, что в *хаусдорфовом нормальном пространстве любое локально конечное открытое покрытие нумерируемо.* После этого остается лишь доказать (также непростую!) теорему Дьедонне, согласно которой *каждое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.*

Теперь мы уже можем приступить к построению интегрального исчисления на гладких многообразиях.

Напомним из курса анализа, что множество A пространства $\mathbb{R}^n$ называется *нуль-множеством в смысле Жордана* (или *множеством объема* 0), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное семейство шаров (или, что равносильно, кубов или параллелепипедов) пространства $\mathbb{R}^n$, покрывающих A, общий объем которых $< \varepsilon$. (Ср. с определением нуль-множеств в смысле Лебега в лекции 14, в котором допускаются счетные семейства.)

Подмножество $D\subset\mathbb{R}^n$ называется *кубируемым* (или *измеримым в смысле Жордана*), если оно ограничено (т. е. его замыкаиие $\overline{D}$ компактно) и его граиица $\operatorname{Fr} D$ является иуль-миожеством. (*Границей* $\operatorname{Fr} D$ подмножества D топологического простраиства называется множество $\overline{D}\setminus\operatorname{Int} D$.)

Во избежаиие миогочислениых оговорок, мы будем предполагать, что все рассматриваемые фуикции определеиы иа *всем* простраистве $\mathbb{R}^n$. Это предположение ие умеиьшает общности, поскольку каждую фуикцию f, определеииую иа подмножестве $D\subset\mathbb{R}^n$, мы можем без измеиеиия иитеграла продолжить иулем вие D, т. е. считать, что $f(x)=0$ при $x\notin D$.

Фуикцию $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ мы будем называть *финитной*, если существует такое компактиое миожество $C\subset\mathbb{R}^n$, что $f=0$ вие C, *локально ограниченной*, если иа любом компактиом миожестве $C\subset\mathbb{R}^n$ эта функция ограиичеиа, и *почти непрерывной*, если для любого компактиого множества $C\subset\mathbb{R}^n$ фуикция f иепрерывиа иа C вие иекоторого иуль-миожества, т. е. если существует такая иепрерывиая иа C фуикция f_C и такое иуль-множество $A\subset C$, что $f=f_C$ иа $C\setminus A$.

Из курса аналнза известно, что *любая локально ограниченная и почти непрерывная функция f интегрируема по каждому кубируемому множеству D*, т. е. существует конечиый иитеграл

$$\int_D f(x)\,dx. \tag{1}$$

При этом иитеграл (1) не измеиится, если мы произвольиым образом измеиим функцию f на иекотором иуль-миожестве или прибавим, или отиимем от множества D произвольное иуль-множество.

[Здесь мы имеем в виду интеграл в смысле Римана. Если поиимать интеграл (1) в смысле Лебега, то требование кубируемости множества D можно заменить требованием его измеримости. Однако в этом обобщении мы не нуждаемся.]

В случае, когда функцня f финитна, нитеграл (1) для каждого кубируемого множества D, вне которого f равна иулю, имеет одно и то же значенне. Это общее значенне мы будем называть *интегралом от f по $\mathbb{R}^n$* и будем обозначать символом

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

или символом

$$\int f(x)\,dx, \tag{2}$$

опуская указание на $\mathbb{R}^n$.

Так как для любого кубируемого множества D и любой интегрируемой по D функции f имеет место равенство

$$\int\limits_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f\chi_D)(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

где χ_D — *характеристическая функция* множества D, задаваемая формулой

$$\chi_D(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{x} \in D, \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \notin D, \end{cases}$$

то, следовательно, при желании можно обойтись лишь интегралом вида (2).

Если U и V — открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, то для любого гладкого отображения $\varphi\colon U \to V$ и любого нуль-множества $A \subset U$ множество φA также является нуль-множеством. [Приведенное в лекции 14 доказательство этого факта для нуль-множеств в смысле Лебега дословно сохраняется и для нуль-множеств в смысле Жордана.] Отсюда следует, что для любого кубируемого множества $D \subset U$, обладающего тем свойством, что $\overline{D} \subset U$, множество $\varphi D \subset V$ также кубируемо. В частности, это верно, когда φ является диффеоморфизмом. Более того, как доказывается в анализе, в этом случае для любой интегрируемой по множеству φD функции f функция $(f \circ \varphi)\,|J_\varphi|$, где

$$J_\varphi = \det \left\| \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \right\|, \quad i = j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

— якобиан диффеоморфизма φ, интегрируема по D, и имеет место равенство

$$\int\limits_{\varphi D} f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int\limits_D (f \circ \varphi)\,|J_\varphi|\,(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}. \tag{4}$$

Это утверждение известно как **теорема о замене переменных**. Для интегралов вида (2) формула (4) имеет вид

$$\int f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} = \int (f \circ \varphi)\,|J_\varphi|\,(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}, \tag{5}$$

где f — произвольная финитная интегрируемая функция, равная нулю вне множества V, а J_φ — в соответствии с принятым выше соглашением — якобиан (3), продолженный нулем вне множества U.

Чтобы построить теорию интегрирования на гладком многообразии $\mathscr{X}$ (которое мы будем предполагать хаусдорфовым и паракомпактным), надо в первую очередь определить в $\mathscr{X}$ кубируемые подмножества.

Это делается без всякого труда.

Определение 3. Подмножество A гладкого n-мерного многообразия $\mathscr{X}$ называется *нуль-множеством*, если существует такое конечное семейство карт $(U_1, h_1), \ldots, (U_N, h_N)$, что $A \subset \bigcup U_i$ и для каждого $i = 1, \ldots, N$ множество $h_i(A \cap U_i)$ является нуль-множеством в $\mathbb{R}^n$ (ср. определение 3 лекции 14). Подмножество $D \subset \mathscr{X}$ называется *кубируемым*, если его замыкание $\overline{D}$ компактно, а граница

$$\operatorname{Fr} D = \overline{D} \setminus \operatorname{Int} D$$

является нуль-множеством.

Задача 1. Докажите, что если A тогда и только тогда является нуль-множеством, когда для любого конечного семейства карт $(U_1, h_1), \ldots, (U_N, h_N)$, покрывающего множество A (т. е. такого, что $A \subset \bigcup U_i$), все множества $h_i(A \cap U_i)$, $1 \leqslant i \leqslant N$, являются нуль-множествами в $\mathbb{R}^n$.

С выражениями под знаком интеграла ситуация оказывается более деликатной. Чтобы интеграл не зависел от выбора локальных координат, нужно, чтобы при замене координат подинтегральное выражение преобразовывалось в соответствии с формулами (4) или (5). Это приводит к следующему определению:

Определение 4. Пусть в каждой карте (U, h) многообразия $\mathscr{X}$ определена некоторая функция $\rho^{(U, h)}: U \to \mathbb{R}$ (которую в дальнейшем мы будем короче обозначать через ρ^U), и пусть для любых двух пересекающихся карт (U, h) и (V, k) имеет место равенство

$$\rho^V = \rho^U \left| \det \frac{\partial k}{\partial h} \right| \quad \text{на } U \cap V, \tag{6}$$

где $\det \frac{\partial k}{\partial h}$ — якобиан диффеоморфизма $\varphi = k \circ h^{-1}$ (интерпретированный как функция на $U \cap V \subset U$, т. е. связанный с его якобианом J_φ в $\mathbb{R}^n$ формулой $\det \frac{\partial k}{\partial h} = J_\varphi \circ h$). Тогда семейство $\{\rho^U\}$ называется *плотностью* на $\mathscr{X}$.

Пример 1. Произвольная дифференциальная форма ω степени n на многообразии $\mathscr{X}$ (где, как всегда, $n = \dim \mathscr{X}$) в каждой карте $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$\omega = w^U dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

где w^U — некоторая гладкая функция на U. При этом для любых двух карт (U, h) и (V, k) соответствующие функции w^U и w^V связаны формулой

$$w^V = w^U \det \frac{\partial k}{\partial h} \quad \text{на } U \cap V.$$

Следовательно, положив $\rho^U = |\omega^U|$, мы определим на $\mathscr{X}$ некоторую плотность.

Плотность $\rho = \{\rho^U\}$ называется *гладкой*, если все функции ρ^U гладки, *локально ограниченной*, если функции ρ^U локально ограничены, и *почти непрерывной*, если все функции ρ^U почти непрерывны.

Все локально ограниченные и почти непрерывные плотности на многообразии $\mathscr{X}$ образуют линейное пространство $\Pi\mathscr{X}$, естественным образом являющееся модулем над кольцом всех локально ограниченных и почти непрерывных функций на $\mathscr{X}$. Аналогично, линейное пространство $\Pi_{\text{гл}}\mathscr{X}$ всех гладких плотностей является модулем над кольцом гладких функций.

Мы будем говорить, что в точке $p \in \mathscr{X}$ плотность ρ *равна нулю* (соответственно *положительна*), если для любой координатной окрестности U, содержащей точку p, имеет место равенство $\rho^U(p) = 0$ (соответственно неравенство $\rho^U(p) > 0$). Поскольку функция $\det \frac{\partial k}{\partial h}$ нигде не обращается в нуль, из соотношения (6) следует, что это определение корректно (не зависит от выбора координатной окрестности U).

[Заметим, что о значении плотности ρ в точке p говорить бессмысленно.]

Плотность на многообразии $\mathscr{X}$ называется *финитной*, если существует такое компактное множество $C \subset \mathscr{X}$, что $\rho = 0$ вне C. Все финитные плотности образуют подпространство (подмодуль) $\Pi^{\text{fin}}\mathscr{X}$ пространства (модуля) $\Pi\mathscr{X}$. На компактном (и только на компактном!) многообразии $\mathscr{X}$ каждая плотность финитна.

Плотность, положительная в каждой точке $p \in \mathscr{X}$, называется *плотностью объема* на $\mathscr{X}$. По традиции для плотности объема используется обозначение dv. Для каждой плотности ρ формула

$$f = \frac{\rho^U}{dv^U} \quad \text{на } U$$

(при данной плотности объема dv) корректно определяет на $\mathscr{X}$ функцию f, обладающую тем свойством, что $\rho = f\,dv$ на $\mathscr{X}$. Следовательно, *если на многообразии $\mathscr{X}$ существует гладкая плотность объема, то линейные пространства $\Pi\mathscr{X}$ и $\Pi_{\text{гл}}\mathscr{X}$ являются одномерными свободными модулями (над кольцом локально ограниченных и почти непрерывных функций и соответственно над кольцом глад-*

ких функций). [Их же подмодули, состоящие из финитных плотностей, не будут, вообще говоря, ни свободными, ни одномерными.]

При заданной плотности объема интеграл

$$\int_D dv$$

называется *объемом* кубируемого множества D.

Пример 2. Пусть $\mathscr{X}$ — двумерное подмногообразие евклидова пространства (поверхность). Тогда (см. лекцию 3) в каждой координатной окрестности $U \subset \mathscr{X}$ (являющейся элементарной поверхностью в смысле определения 2 лекции 3) определены функции E, F и G (коэффициенты первой квадратичной формы), обладающие тем свойством, что при преобразовании координат определитель

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = EG - F^2 > 0$$

умножается на квадрат определителя матрицы перехода. Поэтому формула

$$\rho^U = \sqrt{EG - F^2}$$

задает на $\mathscr{X}$ некоторую плотность объема (или, лучше сказать, площади). Эта плотность обозначается символом $d\sigma$ (или как-нибудь похоже, например dS) и называется *элементом площади* поверхности $\mathscr{X}$. (Ср. лекцию 3.)

Задача 2. Докажите, что на каждом хаусдорфовом паракомпактном гладком многообразии $\mathscr{X}$ существует гладкая плотность объема dv.

Таким образом, на хаусдорфовом паракомпактном многообразии плотности можно, выбрав некоторую плотность объема, отождествлять с функциями.

Теперь мы уже можем сформулировать основную теорему о существовании и единственности интеграла. Мы сделаем это даже в двух вариантах.

Пусть $\mathscr{X}$ — гладкое хаусдорфово паракомпактное многообразие.

Теорема 1. *Для каждого кубируемого множества $D \subset \mathscr{X}$ существует единственный линейный функционал*

$$\int_D : \Pi\mathscr{X} \to \mathbb{R}, \tag{7}$$

обладающий следующими двумя свойствами:

а) *Если* $D=D_1\sqcup D_2$ (*т. е. если* $D=D_1\cup D_2$ *и* $D_1\cap\cap D_2=\varnothing$), *то*

$$\int_D \rho=\int_{D_1}\rho+\int_{D_2}\rho$$

для любой плотности $\rho\in\Pi\mathscr{X}$.

б) *Если для плотности* $\rho\in\Pi\mathscr{X}$ *существует такая карта* $(U,\ h)$, *что* $\rho=0$ *вне* U, *то*

$$\int_D \rho=\int_{h(D\cap U)}(\rho^U\circ h^{-1})(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

где справа — интеграл в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1а. *Существует единственный линейный функционал*

$$\int\colon \Pi^{\mathrm{fin}}\mathscr{X}\to\mathbb{R}, \tag{8}$$

обладающий тем свойством, что

$$\int\rho=\int_{h(U)}(\rho^U\circ h^{-1})(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \tag{9}$$

для любой карты $(U,\ h)$ *и любой финитной плотности* ρ, *равной нулю вне* U.

Функционал (8) обозначается также символом $\int\limits_{\mathscr{X}}$.

Чтобы вывести теорему 1а из теоремы 1, достаточно для любой плотности $\rho\in\Pi^{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$ положить

$$\int\rho=\int_D\rho, \tag{10}$$

где D — произвольное кубируемое множество, вне которой плотность ρ равна нулю. (Ясно, что такое множество существует и что интеграл (10) от его выбора не зависит.) Обратно, так как для любой плотности $\rho\in\Pi\mathscr{X}$ и любого кубируемого множества $D\subset\mathscr{X}$ плотность $\chi_D\rho$, где χ_D — характеристическая функция множества D, является, очевидно, финитной локально ограниченной и почти непрерывной плотностью, то, положив

$$\int_D\rho=\int\chi_D\rho,$$

мы по интегралу (8) построим интеграл (7). (Свойство б для последнего интеграла очевидно, а свойство а вытекает из того, что $\chi_{D_1 \sqcup D_2} = \chi_{D_1} + \chi_{D_2}$.) Таким образом, теоремы 1 и 1а вытекают одна из другой, и потому в доказательстве нуждается только одна из них. Мы докажем теорему 1а.

Доказательство теоремы 1а. Как всегда, докажем сначала единственность.

Так как многообразие $\mathscr{X}$ по условию хаусдорфово и паракомпактно, то оно обладает нумерируемым локально конечным покрытием $\{U_\alpha\}$, состоящим из координатных окрестностей. Пусть $\{\eta_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Тогда для любой плотности $\rho \in \Pi^{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$ лишь конечное число плотностей $\eta_\alpha \rho$ будет отлично от нуля (докажите!) и, значит, будет иметь место формула

$$\rho = \sum_\alpha \eta_\alpha \rho.$$

Поскольку $\eta_\alpha \rho = 0$ вне U_α, отсюда следует (см. формулу (9)), что

$$\int \rho = \sum_\alpha \int\limits_{h_\alpha(U_\alpha)} (\eta_\alpha \rho_\alpha^{U_\alpha} \circ h_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \tag{11}$$

где h_α — координатное отображение $U_\alpha \to \mathbb{R}^n$. Поскольку правая часть формулы (11) не зависит от выбора функционала (8), это доказывает его единственность.

Для доказательства существования мы определим функционал (8) формулой (11). Ясно, что этот функционал линеен. Кроме того, если $\rho = 0$ вне U, то, согласно теореме о замене переменных (см. формулу (4)),

$$\int\limits_{h_\alpha(U_\alpha)} (\eta_\alpha \rho^{U_\alpha} \circ h_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int\limits_{h_\alpha(U_\alpha \cap U)} (\eta_\alpha \rho^{U_\alpha} \circ h_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} =$$
$$= \int\limits_{h(U_\alpha \cap U)} (\eta_\alpha \rho^{U_\alpha} \circ h^{-1})\, |J_\varphi|\, (\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x},$$

где $\varphi = h \circ h_\alpha^{-1}$. Так как по определению

$$J_\varphi = \det \frac{\partial h}{\partial h_\alpha} \circ h^{-1}$$

и

$$(\eta_\alpha \rho^{U_\alpha} \circ h^{-1}) \cdot \left| \det \frac{\partial h}{\partial h_\alpha} \circ h^{-1} \right| = \eta_\alpha \rho^{U} \circ h^{-1}$$

(см. формулу (6)), то, следовательно,

$$\int\limits_{h_\alpha(U_\alpha)} (\eta_\alpha \rho^{U_\alpha} \circ h_\alpha^{-1})(x)\,dx = \int\limits_{h(U_\alpha \cap U)} (\eta_\alpha \rho^U \circ h^{-1})(x)\,dx = \\ = \int\limits_{h(U)} (\eta_\alpha \rho^U \circ h^{-1})(x)\,dx$$

и, значит,

$$\int \rho = \sum_\alpha \int\limits_{h(U)} (\eta_\alpha \rho^U \circ h^{-1})(x)\,dx = \\ = \left(\sum_\alpha \eta_\alpha\right) \int\limits_{h(U)} (\rho^U \circ h^{-1})(x)\,dx = \int\limits_{h(U)} (\rho^U \circ h^{-1})(x)\,dx. \ \square$$

Если на многообразии $\mathscr{X}$ задана плотность объема dv, то для любой финитной локально ограниченной и почти непрерывной на $\mathscr{X}$ функции f определен интеграл

$$\int f\,dv = \int\limits_{\mathscr{X}} f\,dv,$$

называемый *интегралом от f по $\mathscr{X}$ относительно dv.*

Пример 3 (продолжение примера 2). Для любой финитной (и, скажем, гладкой) функции f на поверхности $\mathscr{X}$ евклидова пространства определен интеграл

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f\,d\sigma, \tag{12}$$

где $d\sigma$ — элемент площади на $\mathscr{X}$ (см. выше пример 2). Интегралы вида (12) называются *поверхностными интегралами первого рода.* В курсе анализа показывается, что они являются пределами естественным образом определяемых интегральных сумм, возникающих при разбиении поверхности на большое число (в дальнейшем устремляемое к бесконечности) элементарных площадок.

[Ср. сделанные в лекции 3 замечания об измерении площадей на поверхности.]

Пример 4. Пусть $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ — произвольная гладкая кривая в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, не подчиненная, вообще говоря, никаким требованиям регулярности, т. е., иными словами, произвольная гладкая вектор-функция

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b$$

(см. лекцию 1). Для любой функции $f = f(\boldsymbol{r})$ на $\mathbb{R}^n$, область определения которой содержит носитель $\gamma[a, b]$

кривой γ, мы положим

$$\int_{\gamma} f\,ds = \int_{a}^{b} f(\boldsymbol{r}(t))\,|\boldsymbol{r}'(t)|\,dt. \tag{13}$$

Этот интеграл называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции f по кривой γ. Он является пределом интегральных сумм вида $\sum f(\boldsymbol{r}_i)\,s_i$, где s_i — длины отрезков произвольного разбиения кривой γ, а $\boldsymbol{r}_i$— некоторые их точки. В силу введенных выше общих определений этот интеграл представляет собой интеграл по гладкому многообразию $\mathscr{X}=(a, b)$ от функции $f\circ\gamma$: $t\longmapsto f(\boldsymbol{r}(t))$ относительно плотности ds, задаваемой в карте $(\mathscr{X}, \mathrm{id})$ формулой $t\longmapsto|\boldsymbol{r}'(t)|$. В частном случае, когда кривая γ (или, точнее, ее ограничение на (a, b)) проста и регулярна, т. е. когда ее носитель $\mathscr{L}$ является одномерным вложенным подмногообразием, а пара $(\mathscr{L}, \gamma^{-1})$—картой на $\mathscr{L}$, интеграл (13) можно интерпретировать также как интеграл по $\mathscr{L}$ от функции f (точнее—от ее ограничения $f|_{\mathscr{L}}$ на $\mathscr{L}$) относительно плотности объема ds (называемый в этом случае *элементом длины*), задаваемой в карте $(\mathscr{L}, \gamma^{-1})$ функцией $t\longmapsto|\boldsymbol{r}'(t)|$.