Лекция 25

Ориентируемые многообразия. — Интегрирование форм. — Лемма Пуанкаре для финитных форм. — Группа $H^n_{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$. — Случай ориентируемого многообразия.

Чтобы применить интегральное исчисление к вычислению групп когомологий де Рама, нам надо научиться интегрировать не плотности, а формы. Для этого нужно известное нам из первого семестра понятие ориентации линейного (или аффинного) пространства перенести на произвольные гладкие многообразия.

Определение 1. Карты $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(U', h')=(U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ гладкого n-мерного ($n>0$) многообразия $\mathscr{X}$ называются *положительно согласованными*, если либо $U\cap U'=\varnothing$, либо $U\cap U'\neq\varnothing$ и

$$\det\frac{\partial h'}{\partial h}>0 \text{ на } U\cap U',$$

т. е. если в каждой точке $p\in U\cap U'$ базисы

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p \text{ и } \left(\frac{\partial}{\partial x^{1'}}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{n'}}\right)_p$$

касательного пространства $\mathsf{T}_p\mathscr{X}$ одноименны. Атлас, состоящий из положительно согласованных карт, называется *ориентирующим*. Многообразие $\mathscr{X}$, на котором существует хотя бы один ориентирующий атлас, называется *ориентируемым*.

Ясно, что *многообразие тогда и только тогда ориентируемо, когда ориентируемы все его компоненты.*

Легко видеть (ср. следствие 1 предложения 1 лекции 6), что для любого ориентирующего атласа A ориентируемого многообразия $\mathscr{X}$ множество $\mathsf{A}^+_{\text{макс}}$ всех карт, положительно согласованных с каждой картой атласа A, является ориентирующим атласом, содержащим атлас A, и притом максимальным (т. е. обладающим тем свойством, что если ориентирующий атлас A^* содержит атлас A, то $\mathsf{A}^*\subset\mathsf{A}^+_{\text{макс}}$).

Задача 1. Докажите, что ориентируемы

а) сферы $\mathbb{S}^n$, $n\geqslant 0$;

б) проективные пространства $\mathbb{R}P^{2n+1}$ нечетной размерности;

в) овеществления комплексно аналитических многообразий (см. лекцию 11);

г) группы Ли.

[Что же касается проективных пространств четной размерности, в частности проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, то можно показать (что совсем непросто!), что эти пространства неориентируемы.]

Определение 2. Ориентируемое многообразие, в котором выбран максимальный ориентирующий атлас, называется *ориентированным*, а выбранный атлас называется его *ориентацией*. Карты, принадлежащие ориентации ориентированного многообразия, называются *положительно ориентированными* (или просто *положительными*).

По определению для каждой точки $p \in \mathscr{X}$ ориентация касательного пространства $\mathbf{T}_p\mathscr{X}$, определенная базисом

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_p, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_p,$$

одна и та же для всех положительно ориентированных карт $(U, x^1, \ldots, x^n)$. Об этой ориентации говорят, что она *индуцирована* данной ориентацией многообразия $\mathscr{X}$.

Таким образом, ориентация многообразия — это, наглядно говоря, выбор согласованных ориентаций его касательных пространств.

Пусть $(U, h) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — произвольная карта в ориентированном многообразии $\mathscr{X}$. Точку $p \in U$ мы назовем *положительной*, если для одной (а потому и для каждой) положительно ориентированной карты (V, k), обладающей тем свойством, что $p \in V$, имеет место неравенство

$$\det \frac{\partial h}{\partial k} > 0.$$

Ясно, что как множество всех положительных точек, так и его дополнение открыто в U. Поэтому, если карта (U, h) *связна* (т. е. связно множество U), то либо все точки из U положительны, и, значит, карта (U, h) положительно ориентирована, либо в U вообще нет положительных точек, и тогда положительно ориентирована карта $(U, -x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Таким образом, *для любой связной карты $(U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ ориентированного многообразия $\mathscr{X}$ одна (и только одна) из двух карт $(U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ и $(U, -x^1, x^2, \ldots, x^n)$ положительно ориентирована.*

Задача 2. Выведите отсюда, что *на связном ориентируемом многообразии размерности $n > 0$ существуют две и только две ориентации.* [Эти ориентации называются *противоположными.* Если $\mathscr{X}$ — многообразие с одной ориентацией, то снабженное противоположной ориентацией оно обычно обозначается через $-\mathscr{X}$.]

Ясно, что ориентации на различных компонентах ориентируемого многообразия $\mathscr{X}$ можно задавать независимо друг от друга. Поэтому на многообразии $\mathscr{X}$ с N компонентами существует ровно 2^N различных ориентаций.

Значение ориентированных многообразий в теории интегрирования определяется следующим предложением:

Предложение 1. *На ориентированном n-мерном ($n > 0$) многообразии $\mathscr{X}$ существует естественное биективное соответствие между гладкими плотностями и гладкими дифференциальными формами степени n.*

Доказательство. Пусть ρ — произвольная гладкая плотность на $\mathscr{X}$. Для каждой положительной карты $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ мы определим на U форму ω_U степени n формулой

$$\omega_U = \rho^U\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Так как для любых двух положительных (и, значит, положительно согласованных) карт (U, h) и (U', h') имеет место равенство

$$\rho^{U'} = \rho^U \det \frac{\partial h'}{\partial h} \qquad \text{на } U \cap U',$$

то $\omega_U = \omega_{U'}$ на $U \cap U'$, и, значит, формула

$$\omega = \omega_U \qquad \text{на } U$$

корректно определяет дифференциальную форму ω степени n на $\mathscr{X}$.

Обратно, пусть ω — произвольная дифференциальная форма степени n на $\mathscr{X}$, $(U, h) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — произвольная карта в $\mathscr{X}$, и пусть

$$\omega = w^U\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \text{ на } U.$$

Мы определим на U функцию ρ^U, считая, что на каждой компоненте U' множества U

$$(1) \quad \rho^U = \begin{cases} w^U, & \text{если карта } (U', x^1, x^2, \ldots, x^n) \text{ положительно ориентирована,} \\ -w^U & \text{в противном случае (т. е. если положительно ориентирована карта } (U', -x^1, x^2, \ldots, x^n)). \end{cases}$$

Очевидная проверка показывает, что функции ρ^U составляют плотность и что построенные соответствия $\rho \mapsto \omega$ и $\omega \mapsto \rho$ взаимно обратны. □

Формы степени n на n-мерном многообразии называются также *формами максимальной степени.*

Для любой формы ω степени n на n-мерном ориентированном (паракомпактном и хаусдорфовом) многообразии $\mathscr{X}$ и любого кубируемого множества D мы положим

$$\int_D \omega = \int_D \rho,$$

где ρ — плотность (1), отвечающая форме ω. Аналогично, если форма ω *финитна* (т. е. равна нулю вне некоторого компактного множества или, что равносильно, если финитна отвечающая этой форме плотность ρ), то по определению

$$\int \omega = \int \rho.$$

Как и для плотностей, оба вида интегралов непосредственно сводятся друг другу: для любой финитной формы ω

$$\int \omega = \int_D \omega,$$

где D — произвольное кубируемое множество, вне которого форма ω равна нулю, и, наоборот,

$$\int_D \omega = \int \chi_D \omega$$

для любой формы ω и любого кубируемого множества D.

Формула (11) лекции 24 для интегралов от форм имеет вид

$$\int \omega = \sum_\alpha \int_{h_\alpha(U_\alpha)} (\eta_\alpha w^U \circ h_\alpha^{-1})(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \tag{2}$$

где $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ — произвольное нумерируемое локально конечное покрытие, состоящее из положительно ориентированных карт, а $\{\eta_\alpha\}$ — подчиненное этому покрытию разбиение единицы.

Подчеркнем, что интегралы $\int_D \omega$ и $\int \omega$ *зависят* от ориентации многообразия $\mathscr{X}$ (и, например, на связном многообразии при переходе к противоположной ориентации меняют знак).

Задача 3. Пусть на многообразии $\mathscr{X}$ задано семейство форм $\{\omega_t\}$ степени n, гладко (или непрерывно) зависящих от параметра t. Покажите, что тогда интеграл

$$\int \omega_t$$

будет гладкой (или соответственно непрерывной) функцией от t.

Замечание 1. Во всем предыдущем мы предполагали, что $n > 0$. В вырожденном случае $n = 0$ многообразие $\mathscr{X}$ представляет собой множество изолированных точек, и здесь требуется специальное определение ориентации. Мы будем говорить, что нульмерное многообразие $\mathscr{X}$ *ориентировано*, если каждой его точке p сопоставлен знак $\varepsilon(p) = \pm 1$. Формами ω максимальной степени на нульмерном многообразии $\mathscr{X}$ являются произвольные функции f на $\mathscr{X}$, а финитными формами — функции, отличные от нуля только в конечном числе точек $p \in \mathscr{X}$. Интеграл от такой функции по ориентированному нульмерному многообразию $\mathscr{X}$ определяется формулой

$$\int f = \sum_{p \in \mathscr{X}} \varepsilon(p) f(p), \tag{3}$$

имеющей смысл в силу предположения финитности.

В первую очередь мы применим интегралы от форм для вычисления группы $H^n\mathscr{X}$ произвольного ориентируемого n-мерного компактного хаусдорфова гладкого многообразия $\mathscr{X}$. При этом фактически мы будем вычислять — предполагая многообразие $\mathscr{X}$ лишь паракомпактным — не группу $H^n\mathscr{X}$, а некоторую другую группу $H^n_{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$, совпадающую с группой $H^n\mathscr{X}$ в случае, когда многообразие $\mathscr{X}$ компактно. Для этого нам нужно предварительно перенести лемму Пуанкаре на финитные формы, заданные на $\mathbb{R}^n$.

Каждая дифференциальная форма ω степени m на $\mathbb{R}^n$ выражается формулой

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_m \leqslant n} \cdots \sum w_{i_1 \ldots i_m} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_m}, \tag{4}$$

где $w_{i_1 \ldots i_m}$ — гладкие функции на $\mathbb{R}^n$. Мы будем рассматривать *семейства* $\{\omega_p\}$ таких форм, зависящих от точки p некоторого гладкого многообразия $\mathscr{X}$. Каждая форма ω_p такого семейства выражается формулой (4) с коэффициентами, зависящими от p, т. е. являющимися функциями на произведении $\mathbb{R}^n \times \mathscr{X}$. Мы всегда будем предполагать, что все *эти функции гладки*. [Такие семейства $\{\omega_p\}$ естественным образом отождествляются с формами на $\mathbb{R}^n \times \mathscr{X}$, зависящими только от дифференциалов координат $x^1, \ldots, x^n$ (ср. лекцию 20), но здесь это отождествление нам не понадобится.]

В основном мы будем интересоваться семействами финитных форм максимальной степени n. Каждая такая форма ω_p имеет вид

$$\omega_p = w_p\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{5}$$

где w_p — гладкая функция от $\boldsymbol{x}$ (и p), равная нулю вне некоторого куба

$$\mathring{I}_r^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n;\ |x^1| < r,\ \ldots,\ |x^n| < r\}$$

(сторона $2r$ которого зависит, вообще говоря, от p). При этом

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_p = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_p(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}. \tag{6}$$

Предложение 2. *Если для финитной формы* (5) *интеграл* (6) *тождественно* (*по* p) *равен нулю, то на* $\mathbb{R}^n$ *существуют такие финитные формы* θ_p *степени* $n-1$, *гладко зависящие от точки* $p \in \mathscr{X}$, *что*

$$d\theta_p = \omega_p \text{ для любой точки } p \in \mathscr{X}.$$

При этом можно дополнительно считать, что если $\omega_p = 0$ *вне* $\mathring{I}_r^n$, *то и* $\theta_p = 0$ *вне* $\mathring{I}_r^n$ (*в частности, если* $\omega_p = 0$, *то и* $\theta_p = 0$).

Доказательство. Проведем индукцию по размерности n. При $n = 1$ форма ω_p выражается формулой

$$\omega_p = w_p\, dx,$$

где $w_p = w_p(x)$ — гладкая (и гладко зависящая от p) функция от $x \in \mathbb{R}$, равная нулю вне некоторого интервала $(-r, r)$. Пусть

$$\theta_p(x) = \int\limits_{-r}^{x} w_p(x)\, dx.$$

Функция θ_p гладко зависит от p и $d\theta_p = w_p$. Так как $\int \omega_p = \theta_p(r)$, то, согласно условию, $\theta_p(r) = 0$ и, значит,

$\theta_p(x)=0$ при $x \geqslant r$. Поскольку, очевидно, $\theta_p(x)=0$ при $x \leqslant -r$, то, следовательно, $\theta_p(x)=0$ при $|x| \geqslant r$. Этим предложение 1 при $n=1$ доказано.

Предположив теперь, что предложение 1 доказано для семейств форм степени $n-1$ на пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, рассмотрим семейство форм (5) на $\mathbb{R}^n$. Пусть $p \in \mathscr{X}$, и пусть r — такое (зависящее от p) число, что $\omega_p=0$ вне $\mathring{I}_r^n$.

Представив пространство $\mathbb{R}^n$ в виде произведения $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ и соответственно этому отождествив его точки с парами вида $(\boldsymbol{x}, t)$, где $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $t \in \mathbb{R}$, мы можем каждую форму ω_p записать в виде

$$\omega_p=\omega_{t,\,p} \wedge dt,$$

где

$$\omega_{t,\,p}=w_p(\boldsymbol{x}, t)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}, \quad \boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^{n-1}),$$

— форма на $\mathbb{R}^{n-1}$, гладко зависящая от точки (t, p) многообразия $\mathbb{R} \times \mathscr{X}$ и равная нулю вне куба $\mathring{I}_r^{n-1}$ и при $|t| \geqslant r$.

С помощью функции α из леммы 1 лекции 1 немедленно строится такая гладкая неотрицательная функция α на пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$, что $\alpha=0$ вне куба $\mathring{I}_r^{n-1}$ и $\alpha(0) \neq 0$. Для такой функции интеграл

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \alpha(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

положителен и, разделив функцию α на этот интеграл, мы получим функцию α_0 на $\mathbb{R}^{n-1}$, для которой интеграл (7) равен единице. Поэтому для функции $g_{t,\,p}$ на $\mathbb{R}^{n-1}$, определенной формулой

$$g_{t,\,p}(\boldsymbol{x})=w_p(\boldsymbol{x}, t)-\alpha_0(\boldsymbol{x}) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_p(\boldsymbol{x}, t)\, d\boldsymbol{x},$$

будет иметь место равенство

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{t,\,p}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}=0.$$

Форма

$$\tilde{\omega}_{t,\,p}=g_{t,\,p}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1}$$

на $\mathbb{R}^{n-1}$ равна нулю вне $\mathring{I}_r^{n-1}$ (и при $|t| \geqslant r$), гладко зависит от (t, p) и интеграл от этой формы по $\mathbb{R}^{n-1}$ тождественно равен нулю. Следовательно, по предположению индукции, на $\mathbb{R}^{n-1}$ существует такая форма $\theta_{t,\,p}$, гладко зависящая от $(t, p) \in \mathbb{R} \times \mathscr{X}$ и равная нулю вне куба $\mathring{I}_r^{n-1}$ (и при $|t| \geqslant r$), что

$$d\theta_{t,\,p} = \tilde{\omega}_{t,\,p}.$$

Формы $\theta_{t,\,p}$ и $\tilde{\omega}_{t,\,p}$ мы можем рассматривать как формы на $\mathbb{R}^n$, не зависящие от dt. В этом качестве мы будем обозначать их через ϑ_p и $\tilde{\omega}_p$ соответственно. Форма $\tilde{\omega}_p$ связана с формой ω_p равенством

$$\omega_p = \tilde{\omega}_p \wedge dt + f_p \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} \wedge dt,$$

где f_p — функция на $\mathbb{R}^n$, определенная формулой

$$f_p(\boldsymbol{x}, t) = \alpha_0(\boldsymbol{x}) \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \omega_p(\boldsymbol{x}, t) \, d\boldsymbol{x} = w_p(\boldsymbol{x}, t) - g_{t,\,p}(\boldsymbol{x}),$$

а дифференциал $d\vartheta_p$ формы ϑ_p является суммой формы $\tilde{\omega}_p$ и некоторой формы вида $\beta \wedge dt$. Поэтому

$$d\vartheta_p \wedge dt = \tilde{\omega}_p \wedge dt$$

и, значит,

$$d(\vartheta_p \wedge dt) = \tilde{\omega}_p \wedge dt.$$

Мы определим форму θ_p на $\mathbb{R}^n$ формулой

$$\theta_p = \vartheta_p \wedge dt + (-1)^{n-1} F_p \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1},$$

где F_p — функция на $\mathbb{R}^n$, заданная формулой

$$F_p(\boldsymbol{x}, t) = \int\limits_{-r}^{t} f_p(\boldsymbol{x}, t) \, dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned} d\theta_p &= \tilde{\omega}_p \wedge dt + (-1)^{n-1} f_p(x, t) \, dt \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} = \\ &= \tilde{\omega}_p \wedge dt + f_p(x, t) \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{n-1} \wedge dt = \omega_p. \end{aligned}$$

Форма θ_p, очевидно, равна нулю вне бруса $\mathring{I}_r^{n-1} \times \mathbb{R}$. С другой стороны, так как

$$\int\limits_{-r}^{r} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} w_p(\boldsymbol{x}, t) \, d\boldsymbol{x} \, dt = \int \omega_p = 0,$$

то $F_p(\boldsymbol{x}, t) = 0$ при $t \geqslant r$ (и, конечно, при $t \leqslant -r$). Кроме того, так как $\omega_{t,\,p} = 0$ при $|t| \geqslant r$, то $\theta_{t,\,p} = 0$ при $|t| \geqslant r$, т. е. $\vartheta_p = 0$ при $|t| \geqslant r$. Следовательно, $\theta_p = 0$ при $|t| \geqslant r$, т. е. $\theta_p = 0$ вне куба $\mathring{I}_r^n$. $\square$

Следствие 1. *Если для финитной формы* ω *степени* n *на пространстве* $\mathbb{R}^n$ *имеет место равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \omega = 0, \tag{8}$$

то на $\mathbb{R}^n$ *существует такая финитная форма* θ *степени* $n-1$, *что*

$$\omega = d\theta. \tag{9}$$

При этом, если $\omega = 0$ *вне куба* $\mathring{I}^n_r$, *то дополнительно можно считать, что и* $\theta = 0$ *вне* $\mathring{I}^n_r$. □

Замечание 2. В следующей лекции мы покажем, что условие (8) не только достаточно, но и необходимо для выполнения равенства (9).

Пусть теперь $\mathscr{X}$ — произвольное n-мерное многообразие (хаусдорфовое и паракомпактное) и (U, h) — карта в $\mathscr{X}$. Финитную форму ω степени n на многообразии $\mathscr{X}$ мы будем называть *сосредоточенной* (имеется в виду — на U), если $\omega = 0$ вне U. Для такой формы ω на открытом множестве $h(U) \subset \mathbb{R}^n$ определена форма $(h^{-1})^* \omega$. Эта форма равна нулю вне некоторого компактного множества $C \subset h(U)$, откуда следует, что если ее продолжить нулем вне $h(U)$, то получится гладкая (и финитная) форма на всем $\mathbb{R}^n$. Продолженную форму мы также будем обозначать через $(h^{-1})^* \omega$.

Пусть

$$I\omega = \left| \int_{\mathbb{R}^n} (h^{-1})^* \omega \right|.$$

Так как при другом выборе диффеоморфизма h интеграл может лишь изменить знак, то число $I\omega$ зависит только от формы ω (определено корректно).

[Если многообразие $\mathscr{X}$ ориентировано, что мы пока предпочитаем не предполагать, то число $I\omega$ является не чем иным, как абсолютной величиной интеграла $\int \omega$.]

Финитную сосредоточенную форму ω мы будем называть *существенной*, если $I\omega \neq 0$, и *несущественной*, если $I\omega = 0$. Существенную форму, для которой $I\omega = 1$, мы будем называть *нормированной*.

Финитную форму ω на многообразии $\mathscr{X}$ мы будем называть *финитно когомологичной* нулю, если на $\mathscr{X}$

существует такая финитная форма θ, что

$$d\theta=\omega.$$

Лемма 1. Каждая сосредоточенная несущественная финитная форма ω финитно когомологична нулю.

Доказательство. Ясно, что без ограничения общности мы можем считать, что множество $h(U)\subset\mathbb{R}^n$ является кубом $\mathring{I}^n$ и, значит, что форма $(h^{-1})^*\omega$ (рассматриваемая как форма на всем пространстве $\mathbb{R}^n$) равна нулю вне куба $\mathring{I}^n$. При этом по условию

$$\int_{\mathbb{R}^n}(h^{-1})^*\omega=0.$$

Следовательно, согласно следствию 1 предложения 2, на $\mathbb{R}^n$ существует такая финитная форма θ, равная нулю вне $\mathring{I}^n$, что

$$(h^{-1})^*\omega=d\theta.$$

Рассмотрим форму $h^*\theta$. Эта форма определена на U и удовлетворяет на U соотношению

$$d(h^*\theta)=\omega.$$

Кроме того, форма $h^*\theta$ равна нулю вне некоторого компактного подмножества координатной окрестности U (являющегося образом при h^{-1} компактного подмножества куба $\mathring{I}^n=h(U)$, вне которого равна нулю форма θ). Поэтому, продолжив эту форму вне U нулем, мы получим на $\mathscr{X}$ гладкую финитную дифференциальную форму θ_1, удовлетворяющую соотношению

$$d\theta_1=\omega$$

как на U так и вне U, т. е. на всем $\mathscr{X}$. □

Лемма 2. Для любой координатной окрестности $U\subset\mathscr{X}$ существует на $\mathscr{X}$ нормированная финитная форма ω, сосредоточенная на U.

Доказательство. Согласно предложению 2 лекции 14 на $\mathscr{X}$ существует гладкая неотрицательная функция φ, равная нулю вне U и единице на некотором открытом множестве $W\subset U$ с компактным замыканием $\overline{W}\subset U$. Мы определим на $\mathscr{X}$ форму $p\mapsto\omega_p$, полагая

$$\omega_p=\begin{cases}\varphi(p)\,dx_p^1\wedge\ldots\wedge dx_p^n, & \text{если } p\in U,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $x^1, \ldots, x^n$ — локальные координаты на U. Ясно, что форма ω гладка, финитна и сосредоточена на U. Кроме того,

$$(10)\qquad \int\limits_{h(U)} (h^{-1})^* \omega = \int\limits_{h(U)} (\varphi \circ h^{-1})(x)\, dx >$$
$$> \int\limits_{h(\overline{W})} (\varphi \circ h^{-1})(x)\, dx = \int\limits_{h(\overline{W})} dx > 0,$$

где $h\colon U \to h(U)$ — координатный гомеоморфизм. Следовательно, форма ω существенна. Разделив ее на интеграл $I\omega$, мы получим нормированную форму, сосредоточенную на U. □

Замечание 3. Если многообразие $\mathscr{X}$ ориентировано, а карта $(U, x^1, \ldots, x^n)$ положительна, то построенная форма ω обладает тем свойством, что

$$\int \omega > 0.$$

Мы будем говорить, что координатные окрестности U и V в многообразии $\mathscr{X}$ *сцеплены*, если в $\mathscr{X}$ существуют такие координатные окрестности

$$U_0,\ U_1,\ \ldots,\ U_m,$$

что $U_0 = U$, $U_m = V$ и $U_{i-1} \cap U_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \ldots$ $\ldots, m$ (ср. лекцию 20). Легко видеть (см. лемму 1 лекции 20), что *на связном многообразии $\mathscr{X}$ любые две координатные окрестности сцеплены.*

Финитные формы ω_0 и ω_1 на многообразии $\mathscr{X}$ мы будем называть *финитно когомологичными*, если существует такая финитная форма θ, что

$$\omega_1 - \omega_0 = d\theta,$$

т. е. если форма $\omega_1 - \omega_0$ финитно когомологична нулю.

Предложение 3. *Пусть ω_0 и ω_1 — нормированные сосредоточенные финитные формы степени n на n-мерном связном многообразии $\mathscr{X}$. Тогда форма ω_1 финитно когомологична либо форме ω_0, либо форме $-\omega_0$.*

Доказательство. Пусть форма ω_0 сосредоточена на координатной окрестности U_0, а форма ω_1 — на координатной окрестности U_1, и пусть $h_0\colon U_0 \to \mathbb{R}^n$ и $h_1\colon U_1 \to \mathbb{R}^n$ — такие координатные отображения, что

$$(11)\qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} (h_0^{-1})^* \omega_0 = 1 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} (h_1^{-1})^* \omega_1 = 1.$$

Случай 1. Карты (U_0, h_0) и (U_1, h_1) совпадают. Тогда финитная форма $\omega_1-\omega_0$ сосредоточена на U_0 и несущественна. Следовательно, согласно лемме 1, форма $\omega_1-\omega_0$ финитно когомологична нулю.

Случай 2. Совпадают координатные окрестности U_0 и U_1. Так как интегралы (11) при изменении координатных отображений могут лишь изменить знак, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} (h_1^{-1})^* \omega_0 = \varepsilon, \text{ где } \varepsilon = \pm 1.$$

Поэтому, согласно уже доказанному, форма ω_1 финитно когомологична форме $\varepsilon\omega_0$.

Случай 3. Координатные окрестности U_0 и U_1 пересекаются:

$$U_0 \cap U_1 \neq \varnothing.$$

Согласно лемме 2 существует нормированная форма ω, сосредоточенная на координатной окрестности $U_0 \cap U_1$ (а значит, и на координатных окрестностях U_0 и U_1). Поскольку нормированные формы ω_0 и ω сосредоточены на U_0, то по доказанному форма ω_0 финитно когомологична либо форме ω, либо форме $-\omega$, а поскольку нормированные формы ω и ω_1 сосредоточены на U_1, то аналогично форма ω финитно когомологична либо форме ω_1, либо форме $-\omega_1$. Следовательно, форма ω_1 финитно когомологична либо форме ω_0, либо форме $-\omega_0$.

Случай 4. Координатные окрестности U_0 и U_1 сцеплены. Очевидная индукция по длине цепочки координатных окрестностей, соединяющей окрестности U_0 и U_1, немедленно сводит этот случай к уже рассмотренному случаю 3.

Поскольку в связном многообразии любые две координатные окрестности сцеплены, это доказывает предложение 2. □

Следствие 1. *Пусть ω_0 — произвольная существенная сосредоточенная форма степени n на n-мерном связном многообразии $\mathscr{X}$. Тогда для любой финитной формы ω степени n на многообразии $\mathscr{X}$ существует такое число c, что форма ω финитно когомологична форме $c\omega_0$.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что форма ω_0 нормирована.

Поскольку многообразие $\mathscr{X}$ по условию хаусдорфово и паракомпактно, на нем существует нумерируемое покрытие $\{U_\alpha\}$, состоящее из координатных окрестностей. Пусть

$\{\eta_\alpha\}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$. Тогда для любого α форма $\eta_\alpha\omega$ сосредоточена на U_α, и потому определено число

$$c_\alpha = I(\eta_\alpha\omega).$$

Если $c_\alpha \neq 0$, то форма $c_\alpha^{-1}\eta_\alpha\omega$, подобно форме ω_0, нормирована и сосредоточена. Поэтому, согласно предположению 3, эта форма финитно когомологична форме $\varepsilon_\alpha\omega_0$, где $\varepsilon_\alpha = \pm 1$. Следовательно, форма $\eta_\alpha\omega$ финитно когомологична форме $c_\alpha\varepsilon_\alpha\omega_0$.

Ясно, что этот вывод сохраняется и при $c_\alpha = 0$, потому что в этом случае сосредоточенная форма $\eta_\alpha\omega$ несущественна и, значит, согласно лемме 2, финитно когомологична нулю.

Таким образом, в разложении

$$\omega = \sum_\alpha \eta_\alpha \omega$$

(содержащем из-за финитности формы ω лишь конечное число отличных от нуля слагаемых) каждое слагаемое $\eta_\alpha\omega$ финитно когомологично форме $c_\alpha\varepsilon_\alpha\omega_0$. Поэтому форма ω финитно когомологична форме $c\omega_0$, где

$$c = \sum_\alpha c_\alpha \varepsilon_\alpha. \quad \square$$

Для любого $m \geqslant 0$ мы положим

$$H^m_{\text{fin}}\mathscr{X} = Z^m_{\text{fin}}\mathscr{X} / B^m_{\text{fin}}\mathscr{X},$$

где $Z^m_{\text{fin}}\mathscr{X}$ — пространство всех замкнутых финитных форм степени m на $\mathscr{X}$, а $B^m_{\text{fin}}\mathscr{X}$ — его подпространство, состоящее из дифференциалов финитных форм степени $m-1$. (Заметим, что, вообще говоря, существуют точные финитные формы, не принадлежащие $B^m_{\text{fin}}\mathscr{X}$.)

Элементы факторпространства $H^m_{\text{fin}}\mathscr{X}$ называются *финитными классами когомологий* гладкого многообразия $\mathscr{X}$.

Теорема 1. *Для произвольного n-мерного связного хаусдорфова и паракомпактного многообразия $\mathscr{X}$ имеет место неравенство*

$$\dim H^n_{\text{fin}}\mathscr{X} \leqslant 1,$$

т. е. либо $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X} = 0$, либо $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X} \approx \mathbb{R}$.

Доказательство. Согласно следствию 1 предложения 3 линеал $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$ порождается финитным классом когомологий $[\omega_0]$ произвольной сосредоточенной существенной формы ω_0. Поэтому, если $[\omega_0]=0$, то $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}=0$, а если $[\omega_0]\neq 0$, то $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}\approx\mathbb{R}$. □

В случае, когда многообразие $\mathscr{X}$ ориентируемо, можно получить более точный результат.

Выбрав на $\mathscr{X}$ одну из двух возможных ориентаций (напомним, что многообразие $\mathscr{X}$ мы предполагаем связным), мы можем для каждой финитной формы $\omega\in\Omega^n\mathscr{X}$ построить ее интеграл

$$(12)\qquad \int\omega.$$

В лекции 26 мы покажем (см. следствие 1 теоремы 1 лекции 26), что *если $\omega\in B^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$, то интеграл* (12) *равен нулю.* Поэтому интеграл (12) зависит только от финитного класса когомологий $[\omega]\in H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$ формы ω (заметим, автоматически замкнутой), т. е. соответствие

$$(13)\qquad [\omega]\mapsto\int\omega$$

корректно определяет некоторый гомоморфизм $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}\to\mathbb{R}$.

Теорема 2. *Для любого ориентируемого n-мерного связного хаусдорфова и паракомпактного многообразия $\mathscr{X}$ группа $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$ изоморфна $\mathbb{R}$. Изоморфизм определяется соответствием* (13). (*Он зависит от выбора ориентации многообразия $\mathscr{X}$.*)

Доказательство. Из замечания 3 мы знаем, что на многообразии $\mathscr{X}$ существуют финитные формы ω степени n, для которых интеграл (2) отличен от нуля. Это означает, что гомоморфизм (13) нетривиален.

Поскольку $\dim H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}\leqslant 1$, это возможно только при $\dim H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}=1$ и тогда гомоморфизм (13) является изоморфизмом. □

Таким образом, чтобы финитный класс когомологий $[\omega]$ финитной (не обязательно сосредоточенной) формы ω степени n порождал линеал $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$ (составлял его базис), необходимо и достаточно, чтобы интеграл от ω по $\mathscr{X}$ был отличен от нуля:

$$(14)\qquad \int\omega\neq 0.$$

В этом случае для любой другой финитной формы ω_1 степени n на многообразии $\mathscr{X}$ имеет место равенство

$$[\omega_1]=c[\omega],$$

где

$$c = \frac{\int \omega_1}{\int \omega}.$$

Заметим, что условие (14) заведомо выполнено, если форма ω сосредоточена и существенна.

Следствие 1. *Для любого ориентируемого n-мерного связного хаусдорфова компактного многообразия $\mathscr{X}$ группа $H^n\mathscr{X}$ изоморфна $\mathbb{R}$, т. е.*

$$h^n\mathscr{X} = 1. \ \square$$

Замечание 4. Задание изоморфизма (13) равносильно заданию в одномерном линеале $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$ базиса и, значит, некоторой ориентации этого линеала. При изменении ориентации многообразия $\mathscr{X}$ эта ориентация заменяется на противоположную. Следовательно, *ориентации связного многообразия $\mathscr{X}$ можно отождествлять с ориентациями линеала $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$.*

Замечание 5. Можно показать — попытайтесь это сделать! — что равенство $\dim H^n_{\text{fin}}\mathscr{X} = 1$ характеризует ориентируемые многообразия, т. е. *связное многообразие $\mathscr{X}$ тогда и только тогда неориентируемо, когда $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X} = 0$.*

Задача 4. Вычислите группу $H^n_{\text{fin}}\mathscr{X}$ для несвязного многообразия $\mathscr{X}$. Результат сравните с предложением 2 лекции 20.