Лекция 26

Степень гладкого собственного отображения.— Алгебраическое число прообразов регулярного значения.— Инвариантность степени при гладких гомотопиях.— Доказательство теоремы о барабане.— Инвариантность степени при любых гомотопиях.

Определение 1. Отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называется *собственным*, если прообраз $f^{-1}C$ каждого компактного множества $C \subset \mathscr{Y}$ компактен. Ясно, что если гладкое отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ собственное, то для любой финитной формы ω на $\mathscr{Y}$ форма $f^*\omega$ на $\mathscr{X}$ также финитна. Поэтому для любого $m \geqslant 0$ каждое гладкое собственное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ индуцирует гомоморфизм

$$f^*\colon H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{Y} \to H^m_{\mathrm{fin}}\mathscr{X}.$$

Мы рассмотрим этот гомоморфизм в частном случае, когда оба многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ ориентированы и имеют одну и ту же размерность $n = m$. Кроме того, мы будем предполагать, что *многообразие $\mathscr{Y}$ связно.*

Пусть финитная форма ω степени n на многообразии $\mathscr{Y}$ финитно не когомологична нулю (ее финитный класс когомологий $[\omega]$ составляет базис линеала $H^n_{\mathrm{fin}}\mathscr{Y}$). Тогда, как мы знаем, $\int_{\mathscr{Y}} \omega \neq 0$ и для любой другой финитной формы ω_1 степени n на $\mathscr{Y}$ имеет место равенство $[\omega_1] = c[\omega]$, где

$$c = \frac{\int_{\mathscr{Y}} \omega_1}{\int_{\mathscr{Y}} \omega}.$$

Так как формы ω_1 и $c\omega$ финитно когомологичны, то формы $f^*\omega_1$ и $f^*(c\omega) = cf^*\omega$ также финитно когомологичны, и, значит,— в случае, когда $[f^*\omega] \neq 0$ в $H^n_{\mathrm{fin}}\mathscr{X}$ — имеет место равенство

$$c = \frac{\int_{\mathscr{X}} f^*\omega_1}{\int_{\mathscr{X}} f^*\omega}.$$

При $c \neq 0$, т. е. при $\int\limits_{\mathscr{Y}} \omega_1 \neq 0$, отсюда следует, что

$$\frac{\int\limits_{\mathscr{X}} f^*\omega}{\int\limits_{\mathscr{Y}} \omega} = \frac{\int\limits_{\mathscr{X}} f^*\omega_1}{\int\limits_{\mathscr{Y}} \omega_1},$$

т. е. число

$$\deg f = \frac{\int\limits_{\mathscr{X}} f^*\omega}{\int\limits_{\mathscr{Y}} \omega} \tag{1}$$

не зависит от выбора формы ω.

Ясно, что этот вывод сохраняется и при $f^*[\omega] = 0$.

Замечание 1. Алгебраическим основанием проведенного рассуждения является тот очевидный факт, что каждое линейное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является умножением на некоторое число.

Определение 2. Число (1) называется *степенью* собственного гладкого отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$.

Равенство (1) может быть переписано в виде

$$\int\limits_{\mathscr{X}} f^*\omega = \deg f \cdot \int\limits_{\mathscr{Y}} \omega, \tag{2}$$

и в этом виде оно имеет место для любой финитной формы ω максимальной степени на $\mathscr{Y}$.

Подчеркнем, что для того, чтобы степень $\deg f$ была определена, необходимо, чтобы отображение f было собственным. Это условие всегда выполнено, когда многообразие $\mathscr{X}$ компактно. Таким образом, *если многообразие $\mathscr{X}$ компактно, то степень $\deg f$ определена для любого гладкого отображения $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$* (конечно, при прежнем условии, что многообразие $\mathscr{Y}$ связно).

Задача 1. Покажите, что если многообразие $\mathscr{X}$ компактно, а многообразие $\mathscr{Y}$ нет, то степень любого отображения $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ равна нулю.

Замечание 2. Чтобы степень была определена, нужно также, чтобы многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ были не только ориентируемы, но и ориентированы. При этом при смене ориентации одного из них степень меняет знак. Однако при $\mathscr{Y}=\mathscr{X}$ смена ориентации многообразия $\mathscr{X}$ оставляет степень неизменной (она дважды меняет знак). Поэтому о степени собственных отображений $\mathscr{X}\to\mathscr{X}$ (где $\mathscr{X}$ — связное, хаусдорфово и паракомпактное многообразие) можно говорить, и не предполагая многообразие $\mathscr{X}$ обязательно ориентированным (нужно лишь, чтобы оно было ориентируемым).

Согласно теореме Сарда (см. лекцию 15) гладкое отображение $f\colon \mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ обладает регулярными значениями $q\in\mathscr{Y}$, а, согласно предложению 1 лекции 13, для любого регулярного значения $q\in\mathscr{Y}$ множество $f^{-1}(q)$ является вложенным нульмерным подмногообразием многообразия $\mathscr{X}$ (напомним, что по условию $\dim\mathscr{Y}=\dim\mathscr{X}$), т. е. состоит из изолированных точек (см. лекцию 7). При этом, поскольку отображение f собственное, это множество компактно и, значит, конечно.

Пусть p — произвольная точка множества $f^{-1}(q)$, $(U, h)=(U, x^1, \ldots, x^n)$ — положительная карта многообразия $\mathscr{X}$, центрированная в точке p, $(V, k)=(V, y^1, \ldots, y^n)$ — положительная карта многообразия $\mathscr{Y}$, центрированная в точке q, и

$$y^j=f^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j=1, \ldots, n, \tag{3}$$

— функции, выражающие в этих картах отображение f. По условию якобиан

$$D_f(p)=\det\left\|\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right\|, \quad i,\ j=1, \ldots, n,$$

функций (3) в точке p отличен от нуля. Поэтому определен его знак $\operatorname{sign} D_f(p)=\pm 1$. Очевидно, что этот знак не зависит от выбора (положительных!) карт (U, h) и (V, k). Мы будем называть его *знаком отображения* f в точке p и будем обозначать его символом $\operatorname{sign}_p f$.

Пусть

$$\sum_{f(p)=q}\operatorname{sign}_p f \tag{4}$$

— сумма знаков отображения f по всем точкам $p\in f^{-1}(q)$ («алгебраическое число прообразов точки q при отображении f»). Эта сумма определена, так как множество $f^{-1}(q)$ конечно.

Предложение 1. *Число* (4) *не зависит от выбора точки $q\in\mathscr{Y}$ и равно степени $\deg f$ отображения f.*

Доказательство. Пусть W — произвольная окрестность точки q в многообразии $\mathcal{Y}$, замыкание $\overline{W}$ которой компактно.

Так как отображение f непрерывно, а множество всех его критических точек замкнуто, то каждая точка $p \in f^{-1}(q)$ обладает окрестностью $U'_p \subset f^{-1}W$, не содержащей ни одной критической точки отображения f. При этом окрестности U'_p можно, конечно, выбрать так, чтобы для различных точек $p \in f^{-1}(q)$ они не пересекались, чтобы все множества $f(U'_p)$ были открыты в $\mathcal{Y}$ и чтобы все отображения $f|_{U'_p}: U'_p \to f(U'_p)$ были диффеоморфизмами.

Пусть

$$U' = \bigcup_{f(p)=q} U'_p$$

— объединение всех окрестностей U'_p, и пусть $C = f^{-1}\overline{W} \setminus U'$. Множество C компактно и обладает тем свойством, что $q \notin f(C)$. Его образ $f(C)$ также компактен и потому замкнут. Следовательно, на многообразии $\mathcal{Y}$ существует такая координатная окрестность V' точки q, что $V' \subset W \setminus f(C)$ и, значит, такая, что $f^{-1}V' \subset U'$.

Пусть

$$V = \bigcap_{f(p)=q} f(U'_p) \cap V'.$$

Поскольку множество $f^{-1}(q)$ конечно, множество V (содержащее точку q) открыто и, значит, является окрестностью точки q. Для любой точки $p \in f^{-1}(q)$ мы положим

$$U_p = U'_p \cap f^{-1}V.$$

Очевидно, что множества U_p обладают следующими свойствами:

а) Каждое множество U_p является окрестностью точки p.

б) Окрестности U_p, отвечающие различным точкам p, не пересекаются.

в) Объединение U всех окрестностей U_p, $p \in f^{-1}(q)$, является прообразом $f^{-1}V$ окрестности V.

г) На каждой окрестности U_p отображение f является ее диффеоморфизмом на окрестность V.

Поскольку окрестность V содержится в координатной окрестности V', она сама является координатной окрестностью, т. е. является носителем некоторой карты $(V, k) = (V, y^1, \ldots, y^n)$ многообразия $\mathcal{Y}$, которую мы без ограничения общности можем считать положительной. В силу свойства г отсюда следует, что для любой точки $p\in f^{-1}(q)$ пара (U_p, h_p), где $h_p=k\circ(f|_{U_p})$, также является картой. Поскольку в картах (U_p, h_p) и (V, k) отображение f записывается формулами вида $y^i=x^i$, $i=1, \dots, n$, карта (U_p, h_p) тогда и только тогда положительна, когда $\operatorname{sign}_p[f]=1$.

Как мы знаем, для вычисления степени $\deg f$ мы можем использовать произвольную финитно не когомологичную нулю финитную форму ω степени n на многообразии $\mathscr{Y}$. Пользуясь этой свободой, мы примем за ω сосредоточенную на V существенную форму. Такая форма существует согласно лемме 2 лекции 25.

Но если форма ω сосредоточена на V, то форма $f^*\omega$ равна нулю вне окрестностей U_p, и потому

$$\int_{\mathscr{X}} f^*\omega=\sum_{f(p)=q}\int_{U_p} f^*\omega,$$

где справа U_p рассматривается как открытое подмногообразие, снабженное ориентацией, индуцированной ориентацией многообразия $\mathscr{X}$. Поэтому, если

$$\omega=w\,dy^1\wedge\dots\wedge dy^n \quad \text{на } V$$

и, значит,

$$f^*\omega=(w\circ f)\,dx^1\wedge\dots\wedge dx^n \quad \text{на } U_p,$$

где $x^1=y^1\circ f, \dots, x^n=y^n\circ f$, то

$$\int_{U_p} f^*\omega=\varepsilon_p\int_{h_p(U_p)}(w\circ f\circ h_p^{-1})(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x},$$

где $\varepsilon_p=1$, если карта (U_p, h_p) положительна, и $\varepsilon_p=-1$ в противном случае. С другой стороны, так как $h_p=k\circ(f|_{U_p})$ и, значит, $h_p(U_p)=k(V)$ и $w\circ f\circ h_p^{-1}=w\circ k^{-1}$, то

$$\int_{h_p(U_p)}(w\circ f\circ h_p^{-1})(\boldsymbol{x})(d\boldsymbol{x})=\int_{k(V)}(w\circ k^{-1})(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}=\int_{\mathscr{Y}}\omega.$$

Кроме того, согласно сделанному выше замечанию, равенство $\varepsilon_p=+1$ имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{sign}_p f=1$. Поскольку $\varepsilon_p=\pm 1$ и $\operatorname{sign}_p f=\pm 1$, это означает, что

$$\varepsilon_p=\operatorname{sign}_p f \quad \text{для любой точки } p\in f^{-1}(q).$$

Сопоставив все эти факты, мы немедленно получим, что

$$\int_{\mathscr{X}} f^*\omega = \Bigl(\sum_{f(p)=q} \operatorname{sign}_p f\Bigr) \int_{\mathscr{Y}} \omega.$$

По определению (см. формулу (1)) это и означает, что число (4) равно степени $\deg f$ отображения f. □

Следствие 1. *Степень* $\deg f$ *произвольного собственного гладкого отображения* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *является целым числом.* □

Удивительный результат!

Следствие 2. *Если отображение* $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ *не надъективно, то* $\deg f = 0$.

Доказательство. Достаточно заметить, что любая точка $q \notin f(\mathscr{X})$ является регулярным значением отображения f. □

Определение 3. Непрерывные (собственные) отображения $f, g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ называются (*собственно*) *гомотопными*, если существует такое непрерывное (собственное) отображение $F\colon \mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathscr{Y}$, что

$$F(p, 0) = f(p), \quad F(p, 1) = g(p)$$

для любой точки $p \in \mathscr{X}$.

Отображение F называется (*собственной*) *гомотопией*, связывающей отображения f и g. Его удобно отождествлять с семейством $\{f_t\}$ непрерывных (собственных) отображений $f_t\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, определенных формулой

$$f_t(p) = F(p, t), \quad p \in \mathscr{X}.$$

Гомотопия F называется *гладкой*, если она является ограничением на $\mathscr{X} \times [0, 1]$ некоторого гладкого отображения $\mathscr{X} \times (a, b) \to \mathscr{Y}$, где (a, b) — интервал оси $\mathbb{R}$, содержащий отрезок $[0, 1]$. Гладкие (и собственные) отображения $f, g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, связанные гладкой (и собственной) гомотопией $F\colon \mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathscr{Y}$, называются *гладко* (*и собственно*) *гомотопными*.

Так как для гладкой и собственной гомотопии $F\colon \mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathscr{Y}$ все отображения $f_t\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, гладки и собственны, то для каждого из них определена степень

$$\det f_t = \frac{\int\limits_{\mathscr{X}} f_t^*\omega}{\int\limits_{\mathscr{Y}} \omega}.$$

Участвующая в этой формуле форма $f_t^*\omega$, очевидно, непрерывно (даже гладко) зависит от t, т. е. в каждой карте ее единственный коэффициент является непрерывной функцией от t (и, конечно, от локальных координат). Поэтому (см. задачу 3 лекции 25) число $\deg f_t$ также непрерывно зависит от t. Следовательно, являясь целым числом, оно постоянно. В частности, $\deg f = \deg f_0 = \deg f_1 = \deg g$.

Таким образом, *если гладкие собственные отображения f, g: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гладко и собственно гомотопны, то их степени равны*:

$$\deg f = \deg g. \tag{5}$$

Это утверждение известно как **теорема о гомотопической инвариантности степени.**

Теперь мы можем легко доказать анонсированную в лекции 9 теорему о барабане.

Доказательство теоремы 1 лекции 9. Пусть существует ретрагирующее отображение

$$r\colon \mathbb{B}^n \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

и пусть $r(0) = s_0$. Тогда формула

$$F(x,\ t) = r(tx), \quad x \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{6}$$

определяет гомотопию

$$F\colon \mathbb{S}^{n-1} \times [0,\ 1] \to \mathbb{S}^{n-1},$$

связывающую постоянное отображение

$$\mathrm{const}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}, \quad x \mapsto s_0,$$

с тождественным отображением $\mathrm{id}\colon \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$, $x \mapsto x$. Поэтому в силу гомотопической инвариантности степени отображения const и id (очевидно, гладкие) должны иметь одну и ту же степень (о собственности этих отображений нам беспокоиться не нужно, так как сфера $\mathbb{S}^{n-1}$ компактна). Но ясно, что $\deg \mathrm{id} = 1$, а $\deg \mathrm{const} = 0$. Полученное противоречие доказывает, что ретракции r существовать не может. $\square$

Замечание 3. Это доказательство не проходит при $n=1$ (хотя бы потому, что сфера $\mathbb{S}^0$ состоит из двух точек и не является связным многообразием). Но невозможность существования ретракции $\mathbb{B}^1 \to \mathbb{S}^0$ в этом случае очевидна (связный отрезок $\mathbb{B}^1$ нельзя непрерывно отобразить на несвязную сферу $\mathbb{S}^0$).

Внимательный читатель должен заметить, что изложенное доказательство теоремы о барабане содержит лакуну и потому, собственно говоря, доказательством считаться не может. Действительно, гомотопия (6), вообще говоря, лишь непрерывна, тогда как в равенстве (5) предполагается, что связывающая отображения f и g гомотопия гладка. Поэтому, чтобы подвести под теорему о барабане прочный фундамент, нам надо доказать (хотя бы для отображений $\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^{n-1}$), что *равенство* (5) *остается справедливым и тогда, когда связывающая отображения f и g гомотопия лишь непрерывна*. Для этого достаточно, конечно, доказать следующее общее предложение:

Предложение 2. *Для любых компактных* (*и хаусдорфовых*) *многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ гладкие отображения f, g: $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ тогда и только тогда гомотопны, когда они гладко гомотопны.*

[За счет усложнения технических деталей аналогичное утверждение можно доказать и для собственных отображений некомпактных многообразий, но поскольку для доказательства теоремы о барабане нам нужен лишь случай, когда $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathbb{S}^{n-1}$, мы этим заниматься не будем. Кроме того, строго говоря, мы докажем предложение 2 лишь при некоторых дополнительных предположениях, наложенных на многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, которые заведомо выполнены при $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathbb{S}^{n-1}$. (На самом деле они выполнены для любых $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, но этот факт мы сможем установить лишь в следующем семестре.)]

Подчеркнем, что в предложении 2 размерности многообразий $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ одинаковыми не предполагаются (а сами многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ могут быть и несвязными).

Многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ мы будем считать вложенными в пространство $\mathbb{R}^n$, где n — некоторое достаточно большое число. (Таким образом, мы здесь отходим от обыкновения употреблять букву n для обозначения размерности многообразия $\mathscr{X}$). Согласно теореме вложения (предложение 1 лекции 14) это предположение общности не ограничивает.

Определение 4. Подмножество $\mathscr{X}$ пространства $\mathbb{R}^n$ называется *окрестностным ретрактом*, если существует открытое множество $O \supset \mathscr{X}$, ретрагирующееся на $\mathscr{X}$. При этом в случае, когда $\mathscr{X}$ представляет собой подмногообразие, дополнительно требуется, чтобы существовала ретракция $r\colon O \to \mathscr{X}$, являющаяся гладким отображением.

Например, *окрестностным ретрактом является сфера* $\mathbb{S}^{n-1}$ *пространства* $\mathbb{R}^n$. (За окрестность O можно в этом случае принять проколотое пространство $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а ретракцию $r\colon O \to \mathbb{S}^{n-1}$ определить формулой $r(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.)

Мы докажем предложение 2 лишь в предположении, что *подмногообразия* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$ *пространства* $\mathbb{R}^n$ *являются окрестностными ретрактами.* [Как мы покажем в следующем семестре, это предположение общности не ограничивает. Кроме того, оно во всяком случае выполнено при $\mathscr{X} = \mathscr{Y} = \mathbb{S}^{n-1}$.]

Доказательство предложения 2. Конечно, если гладкие отображения $f, g\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гладко гомотопны, то они и гомотопны. Поэтому нам надо доказать лишь обратное утверждение. Естественный путь состоит в том, чтобы преобразовать произвольную непрерывную гомотопию $F\colon \mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathscr{Y}$, связывающую отображения f и g, в гладкую.

Пусть $r\colon O_{\mathscr{X}} \to \mathscr{X}$ — ретракция на $\mathscr{X}$ некоторой окрестности $O_{\mathscr{X}} \supset \mathscr{X}$. Определим отображение

$$F'\colon O_{\mathscr{X}} \times \mathbb{R} \to \mathscr{Y}$$

формулой

$$F'(x, t) = \begin{cases} f(r(x)), & \text{если } t \leqslant 3/7, \\ F(r(x), 7t-3), & \text{если } 3/7 \leqslant t \leqslant 4/7, \\ g(r(x)), & \text{если } 4/7 \leqslant t. \end{cases}$$

Ясно, что отображение F' непрерывно (при $t < 3/7$ и $t > 4/7$ даже гладко) и его ограничение на $\mathscr{X} \times [0, 1]$ является гомотопией, связывающей отображения f и g.

Из анализа известна следующая теорема:

Теорема Вейерштрасса (о полиномиальной аппроксимации). *Пусть O — открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$, K — компактное подмножество множества O и $F\colon O \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение. Тогда* *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое полиномиальное отображение* $P\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(задаваемое полиномиальными функциями координат), что*

$$|P(x) - F(x)| < \varepsilon \textit{ для любой точки } x \in K.$$

[Заметим, что эту теорему достаточно, очевидно, доказать лишь при $m=1$, т. е. когда F является числовой функцией. Только этот случай обычно и рассматривается в курсе анализа.]

Мы применим теорему Вейерштрасса к открытому множеству $O_{\mathscr{X}} \times \mathbb{R}$ (рассматриваемому как подмножество пространства $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$), к компактному множеству $\mathscr{X} \times [0, 1]$ и к отображению F' (рассматриваемому как отображение в $\mathbb{R}^n$). Обозначив ограничение полиномиального отображения P на $\mathscr{X} \times [0, 1]$ снова через P, мы в силу этой теоремы получим, что *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое гладкое отображение*

$$P\colon \mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n,$$

что

$$|P(x, t) - F'(x, t)| < \varepsilon \textit{ для любой точки } (x, t) \in \mathscr{X} \times [0, 1].$$

Пусть теперь λ — такая гладкая функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что

$$\lambda(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \leqslant 1/7 \text{ или } 6/7 \leqslant t, \\ 1, & \text{если } 2/7 \leqslant t \leqslant 5/7 \end{cases}$$

и $0 \leqslant \lambda(t) \leqslant 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$. [Такую функцию можно, например, задать формулой

$$\lambda(t) = \frac{\alpha\left(\frac{5}{14} - \left|\frac{1}{2} + t\right|\right)}{\alpha\left(\frac{5}{14} - \left|\frac{1}{2} + t\right|\right) + \alpha\left(\left|t + \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{14}\right)}, \quad -\infty < t < +\infty,$$

где α — функция из леммы 1 лекции 1; ср. замечание 3 лекции 1.] Мы положим

$$G(x, t) = F'(x, t) + \lambda(t)(P(x, t) - F'(x, t))$$

для любой точки $(x, t) \in \mathscr{X} \times [0, 1]$.

Так как $\lambda(t) = 0$ при $t=0$ и $t=1$, то

$$G(x, 0) = F'(x, 0) = f(x) \text{ и } G(x, 1) = F'(x, 1) = g(x)$$

для любой точки $x \in \mathscr{X}$, т. е. G является гомотопией, связывающей отображения f и g. При этом, так как при $t < 3/7$ и $4/7 < t$ отображение F' (а значит, и отображение G) гладко, а при $2/7 < t < 5/7$ отображение G совпадает с отображением P (а потому также гладко), то G является гладкой гомотопией.

Мы построили гладкую гомотопию, но она принимает значения не в многообразии $\mathscr{Y}$, а в пространстве $\mathbb{R}^n$. Чтобы поправить дело, мы вспомним, что построение гомотопии G зависело от параметра $\varepsilon > 0$ и что

$$|G(x, t)-F'(x, t)| \leqslant \lambda(t)|P(x, t)-F'(x, t)| < \varepsilon$$

для любой точки $(x, t) \in \mathscr{X} \times [0, 1]$. Поскольку $F'(x, t) \in \mathscr{Y}$, это по определению означает, что *расстояние точки $G(x, t)$ от многообразия $\mathscr{Y}$ меньше* ε, т. е. точка $G(x, t)$ содержится в ε-окрестности многообразия $\mathscr{Y}$.

С другой стороны, по условию существует окрестность многообразия $O_{\mathscr{Y}}$, ретрагирующаяся на $\mathscr{Y}$. При этом, так как многообразие $\mathscr{Y}$ компактно, то существует такое $\varepsilon > 0$, что вся ε-окрестность многообразия $\mathscr{Y}$ содержится в $O_{\mathscr{Y}}$ (докажите!). Следовательно, гомотопия G, построенная для этого ε, будет обладать тем свойством, что $G(x, t) \in O_{\mathscr{Y}}$ для любой точки $(x, t) \in \mathscr{X} \times [0, 1]$. Поэтому формула

$$H(x, t) = r_{\mathscr{Y}}(G(x, t)), \qquad (x, t) \in \mathscr{X} \times [0, 1],$$

где $r_{\mathscr{Y}}\colon O_{\mathscr{Y}} \to \mathscr{Y}$ — гладкая ретракция, определяет гладкую гомотопию $H\colon \mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathscr{Y}$, связывающую отображение $r_{\mathscr{Y}} \circ f = f$ с отображением $r_{\mathscr{Y}} \circ g = g$.

Тем самым предложение 2 (в предположении, что многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ являются окрестностными ретрактами) полностью доказано. $\square$

Одновременно полностью доказана и теорема о барабане.

Замечание 4. Подобно тому как мы приблизили произвольную гомотопию $\mathscr{X} \times [0, 1] \to \mathscr{Y}$ гладкой гомотопией, можно любое непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ аппроксимировать гладким отображением.

Задача 2. В следующем семестре мы докажем, что для любого компактного многообразия $\mathscr{Y}$, вложениого в пространство $\mathbb{R}^n$, существует такая константа $d > 0$, что любые две точки $p, q \in \mathscr{Y}$, расстояние между которыми (измереииое по $\mathscr{Y}$) меньше d, можно соеднинть в $\mathscr{Y}$ единственной кратчайшей (для сферы константа d равна π, а кратчайшей является дуга большого круга). Пользуясь этим, покажите, что *любые два достаточно близкие отображения $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ гомотопны.*

В частности, отсюда следует, что любые два гладких отображения $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, достаточно близко аппроксимирующие данное непрерывное отображение $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, имеют (если многообразия $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ ориентированы, компактны и их размерности одинаковы) одну и ту же степень. Эта степень называется *степенью непрерывного отображения* f.

Задача 3. Докажите, что *степени гомотопных непрерывных отображений равны.*