Лекция 27

Области с регулярной границей.— Теорема Стокса.— Формулы Гаусса — Остроградского, Грина и Ньютона — Лейбница.— Многообразия с краем.— Внутренние и краевые точки.— Вложенные ∂-подмногообразия.— Теорема Стокса для многообразий с краем и ∂-подмногообразий.— Теорема Стокса для поверхностных интегралов.— Теорема Стокса для сингулярных подмногообразий.— Криволинейные интегралы второго рода.

Пусть, как и выше, $\mathscr{X}$ — гладкое n-мерное хаусдорфово и паракомпактное многообразие.

Определение 1. Подмножество D многообразия $\mathscr{X}$ называется *областью с регулярной границей*, если

1° подмножество D является замыканием своей внутренности:

$$D = \overline{\operatorname{Int} D};$$

2° его граница

$$\operatorname{Fr} D = \overline{D} \setminus \operatorname{Int} D$$

является вложенным $(n-1)$-мерным подмногообразием.

Для такой области D граница $\operatorname{Fr} D$ называется ее *краем* и обозначается символом ∂D.

Как мы знаем (см. лекцию 13), для каждой точки подмногообразия ∂D в многообразии $\mathscr{X}$ существует такая содержащая эту точку карта $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$, что пара

$$(V, k) = (V, y^1, \ldots, y^{n-1}),$$

где $V = U \cap \partial D$ и $y^1 = x^2|_V, \ldots, y^{n-1} = x^n|_V$, является картой на ∂D, а равенство $x^1(p) = 0$ для точки $p \in U$ имеет место тогда и только тогда, когда $p \in \partial D$. При этом без ограничения общности мы можем предполагать, что $x^1 < 0$ на $U \cap \operatorname{Int} D$.

О карте (U, h), обладающей этими свойствами, мы будем говорить, что она *приспособлена к D*, а о карте (V, k), что она *высечена на ∂D* картой (U, h).

Пусть теперь $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ и $(U', h') = (U', x^{1'}, \ldots, x^{n'})$ — две карты на $\mathscr{X}$, приспособленные к D, а (V, k) и (V', k') — высекаемые ими карты на ∂D. Так как на $V \cap V'$ функция $x^{1'}$ тождественно равна нулю, то на $V \cap V'$ имеют место равенства

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^k} = 0, \quad k = 2, \ldots, n.$$

Поэтому

$$\det \frac{\partial h'}{\partial h} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \cdot \det \frac{\partial k'}{\partial k} \quad \text{на } V \cap V'.$$

С другой стороны, так как $x^{1'} < 0$ тогда и только тогда, когда $x^1 < 0$, то

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} > 0 \quad \text{на } V \cap V'.$$

Следовательно, *если карты* (U, h) *и* (U', h') *положительно согласованы, то* (*при* $n > 1$) *карты* (V, k) *и* (V', k') *также положительно согласованы.*

Предположим теперь, что многообразие $\mathscr{X}$ ориентируемо и ориентировано. Так как при $n > 1$ для любой точки $p \in \partial D$, очевидно, существует положительная карта, содержащая точку p и приспособленная к D, то все приспособленные к D положительные карты высекают на ∂D атлас положительно согласованных карт. Об ориентации на ∂D, задаваемой этим атласом, мы будем говорить, что она *индуцирована* ориентацией многообразия $\mathscr{X}$.

При $n = 1$ область D является системой отрезков (на прямой или окружности), а ∂D состоит из их концов. Ориентация многообразия $\mathscr{X}$ задает на этих отрезках направление, и мы введем на ∂D ориентацию (в смысле замечания 1 лекции 25), считая, что правый конец каждого отрезка имеет знак $+$, а левый знак $-$.

Таким образом, *в ориентируемом* (*ориентированном*) *многообразии* $\mathscr{X}$ *край любой области с регулярной границей является ориентируемым* (*ориентированным*) *многообразием.*

Так как, согласно теореме Сарда (см. лекцию 15) край произвольной области с регулярной границей является нуль-множеством, то каждая компактная область D с регулярной границей кубируема. Поэтому, в предположении, что многообразие $\mathscr{X}$ ориентировано, для любой формы ω степени n на $\mathscr{X}$ и любой компактной области D с регулярной границей определен интеграл

$$\int_D \omega.$$

Этот интеграл определен также и для некомпактных областей D, если только форма ω финитна.

В частности, для любой формы ω степени $n-1$ (финитной, если область D некомпактна) определен интеграл

$$\int_D d\omega. \tag{1}$$

С другой стороны, определен (по отношению к индуцированной ориентации многообразия ∂D) также и интеграл

$$\int_{\partial D} i^*\omega,$$

где $i\colon \partial D \to \mathscr{X}$ — вложение. Для сокращения формул мы будем этот интеграл обозначать символом

$$\int_{\partial D} \omega. \tag{2}$$

Теорема 1 (теорема Стокса для областей с регулярной границей). *Для любой области D с регулярной границей хаусдорфова паракомпактного ориентированного n-мерного многообразия $\mathscr{X}$ и любой формы $\omega \in \Omega^{n-1}\mathscr{X}$ (финитной, если область D некомпактна) имеет место равенство*

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega. \tag{3}$$

Доказательство. Ясно, что все карты (U_α, h_α) многообразия $\mathscr{X}$, либо не пересекающиеся с ∂D, либо приспособленные к D, составляют атлас на $\mathscr{X}$. Так как многообразие $\mathscr{X}$ по условию паракомпактно и хаусдорфово, то существует подчиненное покрытию $\{U_\alpha\}$ разбиение единицы $\{\eta_\alpha\}$. Так как $\omega = \sum\limits_\alpha \eta_\alpha\omega$ и $d\omega = \sum\limits_\alpha d(\eta_\alpha\omega)$, то

$$\int_D d\omega = \sum_\alpha \int_D d(\eta_\alpha\omega)$$

и

$$\int_{\partial D} \omega = \sum_\alpha \int_{\partial D} \eta_\alpha\omega$$

(ясно, что интеграл аддитивен и по отношению к бесконечным суммам рассматриваемого здесь типа, имеющих в окрестности любой точки лишь конечное число отличных от нуля членов). Поэтому формулу (3) достаточно доказать лишь для формы вида $\eta_\alpha\omega$, т. е., иначе говоря, в предположении, что $\omega = 0$ вне некоторой положительной карты $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ многообразия $\mathscr{X}$, либо не пересекающейся с ∂D, либо приспособленной к D. При этом, если на U

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dx^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

то

$$d\omega = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x^k} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \qquad \text{на } U$$

(см. формулу (4) лекции 19) и, значит,

$$\int_D d\omega = \int_{U \cap D} d\omega = \int_{h(U \cap D)} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x^k} \right) dx^1 \ldots dx^n.$$

Функции $w_1, \ldots, w_n$, рассматриваемые как функции на $h(U)$, равны нулю вне некоторого замкнутого множества, и потому, если их продолжить нулем вне $h(U)$ на все $\mathbb{R}^n$, то получатся снова гладкие функции. С другой стороны, открытое множество $h(U)$ мы можем без ограничения общности считать ограниченным, т. е. содержащимся в некотором кубе

$$I_R^n = \{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ |x^1| \leqslant R, \ \ldots, |x^n| \leqslant R \}$$

(на границе которого все функции w_k равны, следовательно, нулю).

Случай 1. Карта (U, h) не пересекается с ∂D. В этом случае интеграл (2) равен, очевидно, нулю (ибо $i^*\omega = 0$), и, значит, для доказательства формулы (3) нам достаточно доказать, что равен нулю интеграл (1). При этом без ограничения общности мы можем считать, что либо $U \subset \mathscr{X} \setminus D$, либо $U \subset D$. Но при $U \subset \mathscr{X} \setminus D$ интеграл (1) заведомо равен нулю, а при $U \subset D$ он выражается формулой

$$\int_D d\omega = \int_{I_R^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial w_k}{\partial x^k} \right) dx^1 \ldots dx^n =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{-R}^{R} \ldots \int_{-R}^{R} \frac{\partial w_k}{\partial x^k} \, dx^1 \ldots dx^n$$

и, значит, — так как для любого $k=1, \ldots, n$ интеграл

$$\int_{-R}^{R} \frac{\partial w_k}{\partial x^k}\, dx^k = w_k(x^1, \ldots, R, \ldots, x^n) - w_k(x^1, \ldots, -R, \ldots, x^n)$$

равен нулю, — также равен нулю.

Случай 2. Карта (U, h) приспособлена к D. В этом случае по аналогичным соображениям

$$\int_D d\omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{-R}^{0} \int_{-R}^{R} \ldots \int_{-R}^{R} \frac{\partial w_k}{\partial x^k}\, dx^1 \ldots dx^k =$$

$$= \int_{-R}^{R} \ldots \int_{-R}^{R} w_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n.$$

С другой стороны, так как $i^*(dx^1)=0$ и $i^*(dx^2)=dy^1, \ldots, i^*(dx^n)=dy^{n-1}$ (ибо $x^1=0$ и $x^2=y^1, \ldots, x^n=y^{n-1}$ на ∂D), то

$$i^*\omega = w_1(0, y^1, \ldots, y^{n-1})\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-1} \quad \text{на } U \cap \partial D.$$

Поэтому

$$\int_{-R}^{R} \ldots \int_{-R}^{R} w_1(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 \ldots dx^n =$$

$$= \int_{-R}^{R} \ldots \int_{-R}^{R} w_1(0, y^1, \ldots, y^{n-1})\, dy^1 \ldots dy^{n-1} =$$

$$= \int_{U \cap \partial D} i^*\omega = \int_{\partial D} \omega.$$

Следовательно,

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega. \ \square$$

Следствие 1. *Для любой финитной формы ω степени $n-1$ на ориентированном n-мерном паракомпактном хаусдорфовом многообразии $\mathscr{X}$ имеет место равенство*

$$\int_{\mathscr{X}} d\omega = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть p_0 — произвольная точка многообразия $\mathscr{X}$ и (U, h) — такая карта в $\mathscr{X}$, что $p_0 \in U$ и $h(U) = \mathbb{B}^n_\varepsilon$, где, как всегда, $\mathbb{B}^n_\varepsilon$ — открытый шар пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса 2 с центром в точке $\mathbf{0}$. Пусть, далее, $D_1 = h^{-1}(\mathbb{B}_1^n)$, где $\mathbb{B}_1^n$ — замкнутый концентрический шар радиуса 1, и пусть $D_2 = \mathscr{X} \setminus \operatorname{Int} D_1$. Ясно, что оба множества D_1 и D_2 являются областями с одной и той же регулярной границей (краем) $h^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})$. (Говорят, что D_2 получено из $\mathscr{X}$ *высверливанием шарика* D_1.) При этом ориентации, индуцированные на краю $h^{-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ ориентацией многообразия $\mathscr{X}$, как легко видеть, противоположны (что можно записать формулой $\partial D_2 = -\partial D_1$), и, значит,

$$\int_{\partial D_2} \omega = -\int_{\partial D_1} \omega.$$

Следовательно, применив теорему 1 к областям D_1 и D_2 и учтя, что

$$\int_{\mathscr{X}} d\omega = \int_{D_1} d\omega + \int_{D_2} d\omega,$$

мы немедленно получим (4). □

Формулу (4) можно считать частным случаем общей формулы (3), если условиться, что интеграл от произвольной формы по пустому множеству равен нулю.

Следствием 1 мы уже пользовались в лекции 25 (см. стр. 406).

В частном случае, когда $\mathscr{X}$ является пространством $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z, каждая форма ω степени 3 на $\mathscr{X}$ имеет вид $f\,dx \wedge dy \wedge dz$, где f — некоторая функция, и для любого кубируемого множества $D \subset \mathbb{R}^3$ интеграл $\int_D \omega$ равен интегралу Римана $\int_D f(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x}$, который в рассматриваемом случае обычно, чтобы подчеркнуть трехмерность и возможность сведения к трехкратному интегралу Римана на прямой, обозначается символом

$$\iiint_D f\,dx\,dy\,dz.$$

По аналогии, для любой ориентированной поверхности $\mathscr{X}$ в $\mathbb{R}^3$ (ориентированного двумерного подмногообразия) и любой формы

$$\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$$

на $\mathbb{R}^3$ (обратите внимание на порядок дифференциалов во втором слагаемом!) интеграл $\int\limits_{\mathscr{X}} \omega$ $\left(\text{т. е., точнее, интеграл } \int\limits_{\mathscr{X}} i^*\omega, \text{ где } i \text{ — вложение } \mathscr{X} \to \mathbb{R}^3\right)$ обозначается символом

$$\iint\limits_{\mathscr{X}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dz. \tag{5}$$

Поскольку

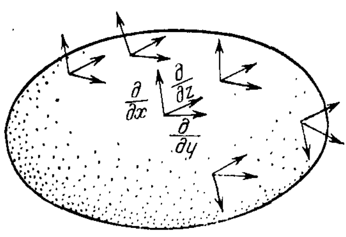
$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

мы в качестве частного случая теоремы 1 получаем, следовательно, что *для любой области* $D \subset \mathbb{R}^3$ *с регулярной границей и любых функций* P, Q *и* R *имеет место формула*

$$\iiint\limits_{D} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial D} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy. \tag{6}$$

Формула (6) называется **формулой Гаусса—Остроградского**.

Замечание 1. Конечно, в формуле (6) все интегралы предполагаются существующими, т. е. либо функции P, Q и R финитными, либо область D компактной (и, конечно, функции P, Q и R определенными на D). Вместе с тем для справедливости этой формулы нет нужды обязательно предполагать, что D является областью с регулярной границей; достаточно, скажем, считать границу области D *кусочно регулярной* (в понятном смысле).



Замечание 2. Ориентация плоскости в $\mathbb{R}^3$ задается ее стороной, т. е. вектором, ортогональным плоскости. Поэтому ориентация поверхности в $\mathbb{R}^3$ задается полем отличных от нуля нормальных векторов. Легко видеть, что для индуцированной ориентации края ∂D в формуле (6) это поле состоит из *внешних нормалей*.

На плоскости $\mathbb{R}^2$ аналог формулы (6) имеет вид

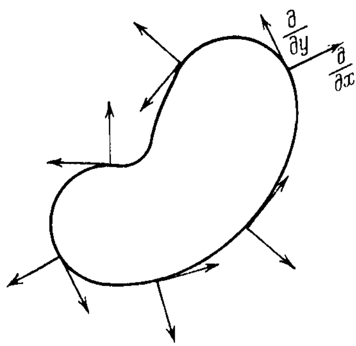
$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\int\limits_{\partial D} P\,dx+Q\,dy \tag{7}$$

и называется формулой Грина. Здесь ориентация края ∂D, т. е. направление обхода, задается требованием, чтобы область D оставалась слева.

Наконец, на прямой $\mathbb{R}$ формула (3) переходит в формулу Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_a^b f'(x)\,dx=f(b)-f(a). \tag{8}$$

(Напомним, что интеграл по ориентированному нульмерному многообразию задается формулой (3) лекции 25 и что по определению точка b входит в край отрезка $[a, b]$ со знаком $+$, а точка a — со знаком $-$.)



Понятие области с регулярной границей — вместе с теоремой 1 — допускает важное обобщение.

Пусть $\mathbb{R}^n_{(-)}$ — полупространство пространства $\mathbb{R}^n$, состоящее из точек $x=(x^1, \ldots, x^n)$, для которых $x^1 \leqslant 0$, и пусть $\mathbb{R}^{n-1}_0$ — его *край*, состоящий из точек x, для которых $x^1=0$

Подмножество $U \subset \mathbb{R}^n$ мы назовем *∂-открытым*, если оно является открытым множеством либо в $\mathbb{R}^n$, либо в $\mathbb{R}^n_{(-)}$, т. е. если существует такое открытое множество U' в $\mathbb{R}^n$, что либо $U=U'$, либо $U=U\cap\mathbb{R}^n_{(-)}$. Отображение $\varphi\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^m$, определенное на ∂-открытом множестве $U\subset\mathbb{R}^n$, мы будем называть *гладким*, если существует такое открытое множество $U'\subset\mathbb{R}^n$ и такое гладкое отображение $\varphi'\colon U'\longrightarrow\mathbb{R}^m$, что $U\subset U'$ и $\varphi'|_U=\varphi$. Это равносильно существованию у функций, задающих отображение φ, непрерывных частных производных всех нужных порядков (при условии — в случае, когда $U\subset\mathbb{R}^n_{(-)}$ и $U\cap\mathbb{R}^{n-1}_0\neq\varnothing$, что в точках из $U\cap\mathbb{R}^{n-1}_0$ дифференцирование по x^1 понимается как дифференцирование справа). Отображение $\varphi\colon U\longrightarrow V$ ∂-открытых множеств называется *диффеоморфиз-*

мом, если оно биективно, гладко и обратное отображение φ^{-1}: $V \to U$ также гладко.

Пусть $\mathscr{D}$ — произвольное множество. Пару (U, h), состоящую из подмножества $U \subset \mathscr{D}$ и биективного отображения h: $U \to h(U)$ на ∂-открытое множество $h(U) \subset \mathbb{R}^n$, мы будем называть *$\partial$-картой* в $\mathscr{D}$. Две ∂-карты (U, h) и (V, k) мы называем *согласованными*, если либо $U \cap V = \varnothing$, либо $U \cap V \neq \varnothing$ и

а) оба множества $h(U \cap V)$ и $k(U \cap V)$ являются ∂-открытыми подмножествами пространства $\mathbb{R}^n$;

б) отображение

$$k \circ h^{-1}: h(U \cap V) \to k(U \cap V)$$

является диффеоморфизмом. Ясно, что каждая карта в $\mathscr{D}$ (в смысле определения 1 лекции 6) является ∂-картой и согласованные (в смысле определения 2 лекции 6) карты согласованы и как ∂-карты.

Атласом ∂-карт на множестве $\mathscr{D}$ называется (ср. определение 3 лекции 6) множество попарно согласованных ∂-карт (U_α, h_α), обладающих тем свойством, что их *носители* U_α покрывают $\mathscr{D}$. Легко видеть (ср. предложение 1 лекции 6 и его следствие 1), что любой атлас ∂-карт $\mathbf{A}$ содержится в единственном максимальном атласе, который состоит из всех ∂-карт, согласованных с ∂-картами из $\mathbf{A}$.

Определение 2. Множество $\mathscr{D}$, в котором задан максимальный атлас ∂-карт, называется *гладким ∂-многообразием* (а карты этого атласа — *гладкими картами*).

Конечно, каждое многообразие $\mathscr{X}$ является ∂-многообразием.

Подчеркнем, что, как и в лекции 6, мы считаем фиксированным размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ (эта размерность называется *размерностью* ∂-многообразия $\mathscr{D}$ и обозначается символом $\dim \mathscr{D}$), а также класс гладкости C^r всех рассматриваемых отображений, где r — либо неотрицательное целое число, либо один из символов ∞ или ω. (Этот класс называется *классом гладкости* ∂-многообразия $\mathscr{D}$; как правило, мы будем считать, что $r = \infty$.)

Топология в ∂-многообразия вводится тем же способом, что и в многообразия, т. е. подмножество O в ∂-многообразии $\mathscr{D}$ тогда и только тогда считается открытым, когда для любой гладкой карты (U, h) множество $h(O \cap U)$ ∂-открыто в $\mathbb{R}^n$. Тем самым каждое ∂-многообразие оказывается топологическим пространством (удовлетворяющим первой аксиоме счетности и — в предположении хаусдорфовости — локально компактным).

Определение 3. *Внутренней картой* ∂-многообразия $\mathscr{D}$ называется ∂-карта (U, h), для которой множество $h(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Точка $p\in\mathscr{D}$ называется *внутренней точкой* ∂-многообразия $\mathscr{D}$, если в $\mathscr{D}$ существует такая внутренняя карта (U, h), что $p\in U$. Множество всех внутренних точек ∂-многообразия $\mathscr{D}$ обозначается символом $\operatorname{int}\mathscr{D}$ (обратите внимание на строчность первой буквы!) и называется его *внутренностью*.

Ясно, что множество $\operatorname{int}\mathscr{D}$ открыто в $\mathscr{D}$ и является гладким многообразием (с атласом, состоящим из всех внутренних карт).

З а д а ч а 1. Докажите, что $\operatorname{int}\mathscr{D}$ не пусто (если $\mathscr{D}$ не пусто), и, более того,

$$\overline{\operatorname{int}\mathscr{D}}=\mathscr{D}.$$

Определение 4. *Краевой картой* ∂-многообразия $\mathscr{D}$ называется такая его ∂-карта (U, h), что $h(U)\subset\mathbb{R}^n_{(-)}$, и $h(U)\cap\mathbb{R}^{n-1}_0\neq\varnothing$. Точка $p\in\mathscr{D}$ называется *точкой края* ∂-многообразия $\mathscr{D}$, если в $\mathscr{D}$ существует такая краевая карта (U, h), что $p\in U$ и $h(p)\in h(U)\cap\mathbb{R}^{n-1}_0$. Множество (возможно, пустое) всех точек края обозначается символом $\partial\mathscr{D}$ и называется *краем* ∂-многообразия $\mathscr{D}$. По определению

$$\mathscr{D}=\partial\mathscr{D}\cup\operatorname{int}\mathscr{D}.$$

Предложение 1. *Никакая внутренняя точка не является точкой края и, наоборот, никакая точка края не является внутренней точкой:*

$$\partial\mathscr{D}\cap\operatorname{int}\mathscr{D}=\varnothing.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение, что $p\in\partial\mathscr{D}\cap\operatorname{int}\mathscr{D}$ означает, что в $\mathscr{D}$ существует такое открытое множество U, содержащее точку p, и такие отображения $h\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n_{(-)}$ и $k\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^n$, что пара (U, h) является краевой, а пара (U, k) — внутренней картами ∂-многообразия $\mathscr{D}$. Следовательно, множество $k(U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, а множество $h(U)$ — нет. Поскольку отображение $h\circ k^{-1}$ является диффеоморфизмом множества $k(U)$ на множество $h(U)$, это противоречит доказываемой ниже лемме 1. Поэтому точка p существовать не может и, значит, $\partial\mathscr{D}\cap\operatorname{int}\mathscr{D}=\varnothing$. $\square$

Лемма 1. *Пусть* $\varphi\colon O \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *— гладкое отображение (класса C^r, $r \geqslant 1$) открытого множества $O \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$. Если в каждой точке $x \in O$ якобиан D_φ отображения φ отличен от нуля, то множество $\varphi(O)$ открыто.*

Доказательство. Согласно теореме об обратном отображении (см. лекцию 6) точка $x \in O$ обладает окрестностью $U \subset O$, отображающейся на некоторую окрестность V точки $\varphi(x)$. Так как $V \subset \varphi(O)$, то, следовательно, $\varphi(x) \in \operatorname{Int} \varphi(O)$, а так как это верно для любой точки $x \in X$, то $\varphi(O) = \operatorname{Int} \varphi(O)$, т. е. множество $\varphi(O)$ открыто. □

Предложение 1 справедливо и при $r = 0$ (для топологических многообразий). Соответствующий аналог леммы 1 (известный как теорема Брауэра об инвариантности области) утверждает, что если непрерывное отображение $\varphi\colon O \longrightarrow \mathbb{R}$ открытого множества $O \subset \mathbb{R}^n$ в пространство $\mathbb{R}^n$ является монеоморфизмом (гомеоморфизмом на $\varphi(O)$), то множество $\varphi(O)$ открыто. К сожалению, у нас нет места для изложения довольно длинного и канительного доказательства этого утверждения.

Следствие 1. *Край $\partial\mathscr{D}$ произвольного ∂-многообразия $\mathscr{D}$ замкнут в $\mathscr{D}$.*

Доказательство. Согласно предложению 1 $\partial\mathscr{D} = \mathscr{D} \setminus \operatorname{int} \mathscr{D}$, а $\operatorname{int} \mathscr{D}$ открыто в $\mathscr{D}$. □

Следствие 2. *Равенство $\partial\mathscr{D} = \varnothing$ имеет место тогда и только тогда, когда ∂-многообразие $\mathscr{D}$ является многообразием.*

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{D}$ тогда и только тогда является многообразием, когда $\operatorname{int} \mathscr{D} = \mathscr{D}$. □

На основании следствия 2 гладкие многообразия называются также *многообразиями без края*. В соответствии с этим ∂-многообразия с $\partial\mathscr{D} \neq \varnothing$ называются *многообразиями с краем*. Впрочем, термин «многообразие с краем» часто используется и как синоним термина «∂-многообразие». (Когда же эта терминологическая вольность может привести к недоразумениям, говорят о «многообразиях с непустым краем» или соответственно «о многообразиях с краем или без».)

Особо важное значение имеют компактные многообразия без края. Такие многообразия называются *замкнутыми*.

Для каждой краевой карты $(U, h) = (U, x^1, \ldots, x^n)$ ∂-многообразия $\mathscr{D}$ пара $(U \cap \partial\mathscr{D}, h_{U \cap \partial\mathscr{D}})$ является в силу отождествления $\mathbb{R}_0^{n-1} = \mathbb{R}^{n-1}$ картой в $\partial\mathscr{D}$ (с локальными координатами $x^2, \ldots, x^n$), и все такие карты составляют атлас на $\partial\mathcal{D}$. Это показывает, что *край $\partial\mathcal{D}$ произвольного n-мерного ∂-многообразия $\mathcal{D}$ является $(n-1)$-мерным многообразием без края.*

Ясно, что *любая область D с регулярной границей является ∂-многообразием с краем ∂D.* (Для этого ∂-многообразия ∂-картами являются либо содержащиеся в $\operatorname{Int} D$ карты объемлющего многообразия $\mathcal{X}$, либо пересечения с D приспособленных к D карт.) Размерность этого ∂-многообразия равна размерности n многообразия $\mathcal{X}$.

Отображение $f\colon \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ ∂-многообразия $\mathcal{D}$ в ∂-многообразие $\mathcal{X}$ (впрочем, нам нужен будет лишь случай, когда $\mathcal{X}$ не имеет края) называется *гладким*, если оно непрерывно и для любых двух ∂-карт (U, h) в $\mathcal{D}$ и (V, k) в $\mathcal{X}$, для которых $fU \subset V$, составное отображение

$$k \circ f \circ h^{-1}\colon h(U) \to k(V)$$

гладко.

Пусть многообразие $\mathcal{X}$ не имеет края (в случае, когда $\partial\mathcal{X} \neq \varnothing$, возникают некоторые осложнения, в которые мы сейчас не хотим вникать), и пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$. Если вложение $i\colon \mathcal{D} \to \mathcal{X}$ гладко, а многообразия $\operatorname{int}\mathcal{D}$ и $\partial\mathcal{D}$ являются вложенными подмногообразиями многообразия $\mathcal{X}$, то $\mathcal{D}$ называется *(вложенным) ∂-подмногообразием* многообразия $\mathcal{X}$.

Например, любая область с регулярной границей является ∂-подмногообразием.

Задача 2. Докажите, что если размерность ∂-подмногообразия $\mathcal{D}$ многообразия $\mathcal{X}$ равна размерности многообразия $\mathcal{X}$, то $\mathcal{D}$ является областью с регулярной границей в $\mathcal{X}$.

Дифференциальной формой ω *степени* m на ∂-многообразии $\mathcal{D}$ мы будем называть такую форму на $\operatorname{int}\mathcal{D}$, что для любой краевой карты (U, h) коэффициенты $\omega_{i_1 \ldots i_m}$ этой формы в карте $(U \cap \operatorname{int}\mathcal{D}, h|_{U \cap \operatorname{Int}\mathcal{D}})$ многообразия $\operatorname{int}\mathcal{D}$ являются ограничениями некоторых (очевидно, однозначно определенных) гладких функций, заданных на U. Последние функции мы будем обозначать теми же символами $\omega_{i_1 \ldots i_m}$ и будем называть их *коэффициентами формы* ω *в карте* (U, h). Ограничения на $U \cap \partial\mathcal{D}$ коэффициентов $\omega_{i_1 \ldots i_m}$ с $i_1, \ldots, i_m \neq 1$ являются, очевидно, коэффициентами некоторой формы степени $m-1$ на $\partial\mathcal{D}$, которую мы будем обозначать символом $\omega|_{\partial\mathcal{D}}$.

В случае, когда $\mathcal{D}$ является ∂-подмногообразием многообразия без края $\mathcal{X}$ (например, областью с регулярной границей), для любой формы ω на $\mathscr{X}$ форма $j^*\omega$, где $j\colon \operatorname{int}\mathscr{D} \to \mathscr{X}$ — вложение, является, очевидно, формой на $\mathscr{D}$. Для этой формы $j^*\omega|_{\partial\mathscr{D}} = i^*\omega$, где i — вложение $\partial\mathscr{D} \to \mathscr{X}$.

Задача 3. Докажите, что любая форма на $\mathscr{D}$ имеет вид $j\,\omega$, где ω — форма на $\mathscr{X}$.

Многообразие с краем $\mathscr{D}$ называется *ориентируемым* (*ориентированным*), если ориентируемо (ориентированно) многообразие $\operatorname{int}\mathscr{D}$. На ориентированном ∂-многообразии $\mathscr{D}$ краевая карта (U, h) называется *положительной*, если положительна внутренняя карта $(U \cap \operatorname{int}\mathscr{D}, h|_{U \cap \operatorname{int}\mathscr{D}})$.

Дифференциальную форму на ∂-многообразии $\mathscr{D}$ мы будем называть *финитной*, если она равна нулю вне некоторого компактного множества $C \subset \mathscr{D}$. Если хаусдорфово и паракомпактное ∂-многообразие $\mathscr{D}$ ориентировано, то для любой финитной формы ω степени $n = \dim\mathscr{D}$ определен интеграл

$$\int_{\operatorname{int}\mathscr{D}} \omega.$$

Мы будем называть этот интеграл *интегралом от* ω *по* $\mathscr{D}$ и будем обозначать его симголом

$$\int_{\mathscr{D}} \omega. \tag{9}$$

Если $\mathscr{D}$ является областью D с регулярной границей в многообразии $\mathscr{X}$, а форма ω — ограничением некоторой (финитной, если область D не компактна) формы ω' на $\mathscr{X}$, то, поскольку край ∂D является в силу теоремы Сарда нуль-множеством, интеграл (9) равен интегралу

$$\int_D \omega'$$

от формы ω' по D.

Конструкция индуцированной ориентации края для областей с регулярной границей дословно переносится на любые ориентированные ∂-многообразия. В дальнейшем, говоря о крае ориентированного ∂-многообразия $\mathscr{D}$, мы всегда будем предполагать, что он снабжен индуцированной ориентацией.

В частности, для любой финитной формы ω степени $n-1$ на ориентированном n-мерном хаусдорфовом и паракомпактном ∂-многообразии $\mathscr{D}$ это позволяет говорить об интеграле

$$\int_{\partial\mathscr{D}} \omega|_{\partial\mathscr{D}},$$

который для упрощения формул мы будем обозначать просто через

$$(10) \qquad \int_{\partial\mathscr{D}} \omega.$$

Теорема 1' (теорема Стокса для многообразий с краем). *Для любой финитной формы ω степени $n-1$ на n-мерном хаусдорфовом паракомпактном и ориентированном ∂-многообразии $\mathscr{D}$ имеет место формула*

$$(11) \qquad \int_{\mathscr{D}} d\omega = \int_{\partial\mathscr{D}} \omega.$$

Доказательство теоремы 1' фактически дословно повторяет доказательство теоремы 1 и мы предоставим его читателю. □

При $\partial\mathscr{D} = \varnothing$ целесообразно считать интеграл (10) равным нулю. В силу этого соглашения следствие 1 теоремы 1 оказывается частным случаем теоремы 1'.

В случае, когда $\mathscr{D}$ является ∂-подмногообразием многообразия $\mathscr{X}$, для любой формы ω степени n на многообразии $\mathscr{X}$ (заметим, что n здесь — размерность $\mathscr{D}$, а не $\mathscr{X}$!), обладающей тем свойством, что форма $j^*\omega$ на $\mathscr{D}$ финитна (где, как и выше, j — вложение $\mathscr{D} \to \mathscr{X}$) интеграл

$$\int_{\mathscr{D}} j^*\omega$$

мы будем обозначать символом

$$(12) \qquad \int_{\mathscr{D}} \omega$$

(а формы ω на $\mathscr{X}$, для которых форма $j^*\omega$ финитна, будем называть формами, *финитными на* $\mathscr{D}$).

В силу этого соглашения будет, очевидно, справедлива следующая теорема, обобщающая теорему 1:

Теорема 1'' (теорема Стокса для ∂-подмногообразий.) *Для любого n-мерного ориентированного ∂-подмногообразия $\mathscr{D}$ хаусдорфова и паракомпактного многообразия $\mathscr{X}$ и любой финитной на $\mathscr{D}$ формы ω степени $n-1$ на $\mathscr{X}$ имеет место формула* (11). □

Двумерные ∂-подмногообразия пространства $\mathbb{R}^3$ называются *поверхностями с краем.* Для любой такой поверхности $\mathscr{D}$ и любой формы

$$\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$$

в $\mathbb{R}^3$ интеграл (12) обозначается символом

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy \tag{13}$$

(ср. (5)). Поэтому в этом случае формула (11) (для форм $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$) приобретает вид

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int\limits_{\partial\mathscr{D}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz. \tag{14}$$

Формула (14) известна как **формула Стокса для поверхностных интегралов** в $\mathbb{R}^3$.

Замечание 3. Интересно, что название «формула Стокса», применявшееся сначала к формуле (14), а затем перенесенное на ее обобщения и аналоги (3) и (11), возникло в результате недоразумения. Формула (14) стала известна в середине XIX века в Кембриджском университете в Англии и по предложению известного физика и математика Томсона (который, быть может, ее впервые и придумал) была включена в экзаменационные билеты по математике для студентов университета. Она была приписана — сначала лишь студентами — Стоксу только потому, что он был в это время председателем экзаменационной комиссии, подписывавшим билеты.

Теоремы 1′ и 1″ могут быть объединены в одной общей теореме.

Пусть $\mathscr{D}$ и $\mathscr{X}$ — произвольные ∂-многообразия, и пусть $\gamma\colon \mathscr{D} \to \mathscr{X}$ — гладкое отображение, переводящее $\operatorname{int}\mathscr{D}$ в $\operatorname{int}\mathscr{D}$. Тогда для любой формы ω на $\mathscr{X}$ форма $\gamma^*\omega$ (определенная на $\operatorname{int}\mathscr{D}$) будет, как легко видеть, формой на $\mathscr{D}$. Поэтому, если она финитна и имеет степень $n = \dim\mathscr{D}$, а многообразие $\mathscr{D}$ ориентируемо, то определен интеграл

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \gamma^*\omega. \tag{15}$$

Гладкие отображения $\gamma\colon \mathscr{D} \to \mathscr{X}$, переводящие $\operatorname{int}\mathscr{D}$ в $\operatorname{int}\mathscr{X}$, для которых ∂-многообразие $\mathscr{D}$ ориентировано и n-мерно, мы будем называть *n-мерными сингулярными подмногообразиями* ∂-многообразия $\mathscr{X}$, формы ω на $\mathscr{X}$, для которых форма $\gamma^*\omega$ финитна,—формами, *финитными на* γ, а интеграл (15)—*интегралом от* ω *по* γ. В соответствии с этим мы будем обозначать интеграл (15) символом

$$\int_\gamma \omega. \tag{16}$$

«Отображение» $\varnothing \to \mathscr{X}$ пустого множества $\varnothing$ в $\mathscr{X}$ мы также будем считать n-мерным сингулярным подмногообразием. Интеграл (16) по такому многообразию мы будем считать равным нулю.

В силу этого соглашения для любого сингулярного подмногообразия $\gamma\colon \mathscr{D} \to \mathscr{X}$ будет определено сингулярное подмногообразие

$$\gamma|_{\partial\mathscr{D}}\colon \partial\mathscr{D} \to \mathscr{X}.$$

Мы будем называть это сингулярное подмногообразие *краем* сингулярного подмногообразия γ и будем обозначать его символом $\partial\gamma$.

Теорема 1‴ (теорема Стокса для сингулярных подмногообразий). *Для любого n-мерного сингулярного подмногообразия γ многообразия $\mathscr{X}$ и любой финитной на γ формы ω степени $n-1$ на $\mathscr{X}$ имеет место формула*

$$\int_\gamma d\omega = \int_{\partial\gamma} \omega. \tag{17}$$

Доказательство. Достаточно применить теорему 1′ к форме $\gamma^*\omega$ на $\mathscr{D}$. □

Теорема 1‴ сводится к теореме 1′, когда γ представляет собой тождественное отображение $\mathrm{id}\colon \mathscr{D} \to \mathscr{D}$ и к теореме 1″, когда γ является вложением $\mathscr{D} \to \mathscr{X}$.

Интегралы по одномерным сингулярным подмногообразиям пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, допускают вполне элементарную трактовку. Пусть для определенности $n=2$, и пусть $\mathscr{D}$ является отрезком $[a, b]$ и, значит, сингулярное многообразие $\gamma\colon \mathscr{D} \to \mathbb{R}^2$ не чем иным, как плоской гладкой кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b \tag{18}$$

(не подчиненной, вообще говоря, никаким требованиям регулярности). Тривиальная расшифровка определений показывает, что для любой формы $P\,dx + Q\,dy$ на $\mathbb{R}^2$ интеграл по кривой (18) задается формулой

$$(19)\quad \int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy = \\ = \int\limits_a^b [P(x(t),\ y(t))\,x'(t) + Q(x(t),\ y(t))\ y'(t)]\,dt,$$

которая может быть принята за его определение. Интегралы такого типа часто встречаются в задачах анализа и называются *криволинейными интегралами второго рода*.

При $n = 3$ они имеют вид

$$\int\limits_\gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\limits_a^b [P(x(t),\ y(t),\ z(t))\,x'(t) + \\ + Q(x(t),\ y(t),\ z(t))\,y'(t) + R(x(t),\ y(t),\ z(t))\,z'(t)]\,dt$$

и аналогично для любого n.

[Криволинейные интегралы первого рода были введены в предыдущей лекции. Они являются интегралами от плотностей, а не от форм.]

Заметим, что интеграл (19) имеет смысл не только для гладких, но и для кусочно гладких кривых γ.

В случае, когда $\mathscr{D}$ является ориентированной окружностью $\mathbb{S}^1$, сингулярное многообразие γ называется *замкнутой кривой*. Выбрав отрезок $[a, b]$, точку $s_0 \in \mathbb{S}^1$ и отображение $\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{S}^1$, переводящее точки a и b в точку s_0 и диффеоморфно отображающее (с сохранением ориентации) интервал (a, b) на дугу $\mathbb{S}^1 \setminus \{s_0\}$, мы можем каждую такую кривую отождествить с кривой $\beta = \gamma\circ\alpha\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, обладающей тем свойством, что $\beta(a) = \beta(b)$. (На этом основании кривые $\beta\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$, для которых $\beta(a) = \beta(b)$, также называются *замкнутыми кривыми*; ср. лекцию 1.)

Это отождествление согласовано с интегрированием, т. е. для любой замкнутой кривой γ интеграл по γ (обычно обозначаемый, чтобы подчеркнуть замкнутость кривой γ, символом $\oint\limits_\gamma$) равен криволинейному интегралу по β.

В случае, когда $\mathscr{D}$ состоит из нескольких ориентированных окружностей, сингулярное многообразие γ является системой $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ замкнутых кривых, и для соответствующего интеграла имеет место формула

$$\oint\limits_{\gamma} = \oint\limits_{\gamma_1} + \ldots + \oint\limits_{\gamma_n}.$$

В частности, для любой компактной плоской области $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ с регулярной (или — в понятном смысле — кусочно регулярной) границей и любой формы $P\,dx + Q\,dy$ на $\mathbb{R}^2$ это отождествляет интеграл $\oint\limits_{\partial\mathscr{D}} P\,dx + Q\,dy$ из формулы Грина (7) с криволинейным интегралом $\oint\limits_{\partial\mathscr{D}} P\,dx + Q\,dy$.

Таким образом, оба интеграла в формуле Грина (7) допускают вполне элементарную трактовку, чего нельзя сказать, например, об интеграле в правой части формулы Гаусса — Остроградского (6) или в левой части формулы Стокса (14).