Лекция 28

Операторы векторного анализа. — Следствия тождества $d \circ d = 0$. — Следствия формулы дифференцирования произведения. — Операторы Лапласа и Бельтрами. — Поток векторного поля. — Формула Гаусса — Остроградского для расходимости и формулы Грина. — Расходимость как плотность источников. — Формула Стокса для циркуляции. — Формула Гаусса — Остроградского для вихря. — Обобщенная формула Гаусса — Остроградского.

В этой лекции мы изучим особо важный для приложений случай форм в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Наличие в пространстве $\mathbb{R}^3$ фиксированной координатной системы и стандартной евклидовой метрики позволяет отождествить линейные дифференциальные формы $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ на $\mathbb{R}^3$ (а также формы $P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ второй степени) с векторными полями

$$u = Pi + Qj + Rk, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — векторы стандартного базиса в $\mathbb{R}^3$. Это приводит к весьма богатой теории, известной как **векторный анализ** (или **теория поля**). Хотя теоретическое значение векторного анализа минимально, мы все же его достаточно подробно изложим, поскольку он играет важную роль в физико-технических приложениях, связанных с гидродинамикой и электромагнетизмом (достаточно сказать, что уравнения Максвелла электромагнитного поля наиболее элегантно — если не пользоваться четырехмерным формализмом специальной теории относительности — записываются с помощью дифференциальных операторов векторного анализа).

Основным полем действия векторного анализа является алгебра гладких функций F, определенных на некотором открытом множестве $W \subset \mathbb{R}^3$ (которое во всем дальнейшем мы будем считать фиксированным), и F-модуль $\mathfrak{a}$ векторных полей на W.

Отождествление модуля $\mathfrak{a}$ с модулями Ω^1 и Ω^2 дифференциальных форм степени 1 и 2 (а алгебры F, рассматриваемой как модуль над самой собой, — с модулем Ω^3 форм $f\,dx \wedge dy \wedge dz$ степени 3) позволяет операторы внешнего дифференцирования

$$\mathsf{F} = \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \Omega^3$$

интерпретировать как операторы

$$\mathsf{F} \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} \to \mathsf{F}.$$

Первый из этих операторов (из F в $\mathfrak{a}$) обозначается символом grad. Он сопоставляет произвольной гладкой функции F векторное поле

$$\operatorname{grad} F = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k}, \tag{2}$$

называемое *градиентом* функции F.

Второй оператор (из $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{a}$) обозначается символом rot. Он сопоставляет векторному полю (1) поле

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}, \tag{3}$$

называемое *вихрем* (или *ротором*) поля $\boldsymbol{u}$.

Формулу (3) можно записать в следующем условном мнемоническом виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Раньше вместо $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ часто писали $\operatorname{curl} \boldsymbol{u}$, но ныне это обозначение вышло из употребления.

Третий оператор (из $\mathfrak{a}$ в F) обозначается символом div. Он сопоставляет векторному полю (1) функцию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}, \tag{5}$$

называемую *расходимостью* (или *дивергенцией*) поля $\boldsymbol{u}$.

Кроме этих операторов (и операции умножения на функции), на модуле $\mathfrak{a}$ определены также операции скалярного и векторного умножения, сопоставляющие векторным полям

$$\boldsymbol{u} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{v} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$$

функцию

$$\boldsymbol{u}\boldsymbol{v} = PX + QY + RZ$$

и векторное поле

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (QZ - RY)\boldsymbol{i} + (RX - PZ)\boldsymbol{j} + (PY - QX)\boldsymbol{k} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ P & Q & R \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

соответственно.

Все эти операторы (и операции) связаны друг с другом многочисленными тождествами.

Прежде всего тождество $d\circ d=0$ дает нам два тождества

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{rot}\operatorname{grad} F=0 \quad \text{и} \quad \operatorname{div}\operatorname{rot} \boldsymbol{u}=0,$$

легко, впрочем, проверяемые и прямым вычислением.

Поля вида $\operatorname{grad} F$ называются *потенциальными*, а вида $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ — *соленоидальными* (в переводе: *трубчатыми*). Если $\boldsymbol{u}=\operatorname{grad} F$, то F называется *потенциалом* поля $\boldsymbol{u}$, а если $\boldsymbol{v}=\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$, то поле $\boldsymbol{u}$ называется *векторным потенциалом* поля $\boldsymbol{v}$. Если W связно, то потенциал F определен полем $\boldsymbol{u}$ с точностью до постоянного слагаемого.

Поле $\boldsymbol{u}$ называется *безвихревым*, если $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}=0$ и *полем без источников*, если $\operatorname{div} \boldsymbol{u}=0$. Векторный потенциал $\boldsymbol{u}$ поля $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ определен с точностью до безвихревого поля.

Согласно тождеству (6) *любое потенциальное поле является безвихревым и любое соленоидальное поле является полем без источников.* [При этом факторпространство линейного пространства безвихревых полей по подпространству потенциальных полей является не чем иным, как одномерной группой когомологий де Рама H^1W области W, а факторпространство полей без источников по подпространству соленоидальных полей — группой H^2W. Поэтому все безвихревые поля потенциальны тогда и только тогда, когда $H^1W=0$, а все поля без источников соленоидальны тогда и только тогда, когда $H^2W=0$.]

Пример 1. Поле вида

$$\boldsymbol{u}=f(r)\,\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{r}\neq 0,$$

где $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, а $r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, называется *центральным полем*. Для этого поля

$$P=f(r)\,x, \quad Q=f(r)\,y, \quad R=f(r)\,z$$

(а $W=\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$). Так как

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},$$

то матрица

$$\begin{Vmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{Vmatrix}$$

имеет вид

$$
(7)\qquad \left\| \begin{matrix} f'(r)\dfrac{x^2}{r}+f(r) & f'(r)\dfrac{xy}{r} & f'(r)\dfrac{xz}{r} \\ f'(r)\dfrac{xy}{r} & f'(r)\dfrac{y^2}{r}+f(r) & f'(r)\dfrac{yz}{r} \\ f'(r)\dfrac{xz}{r} & f'(r)\dfrac{yz}{r} & f'(r)\dfrac{z^2}{r}+f(r) \end{matrix} \right\|.
$$

Симметричность этой матрицы означает, что $\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = 0$, т. е. что *каждое центральное поле является безвихревым полем.* Более того, так как $H^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = H^1(\mathbb{S}^2) = 0$, то *каждое центральное поле потенциально.* (Соответствующий потенциал F определяется при этом формулой

$$
F(\boldsymbol{r}) = \int_1^r rf(r)\,dr,
$$

где, конечно, нижний предел интегрирования может быть любым другим положительным числом.)

Если, в частности, $f(r) = -\dfrac{m_0}{r^3}$ и, значит, $|\boldsymbol{u}| = \dfrac{m_0}{r^2}$ (гравитационное поле материальной точки массы m_0), то $F(\boldsymbol{r}) = \dfrac{m_0}{r}$ (с точностью до константы). Этот потенциал называется *ньютоновским.*

Расходимость центрального поля равна сумме

$$
f'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r} + 3f(r) = rf'(r) + 3f(r)
$$

диагональных элементов матрицы (7). Решая дифференциальное уравнение $rf'(r) + 3f(r) = 0$, мы немедленно получим, что $f(r) = \dfrac{C}{r^3}$. Таким образом, *центральное поле тогда и только тогда является гравитационным полем (полем ньютоновского потенциала), когда оно не имеет источников* (в области $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, где оно определено).

Внешнее произведение $\omega \wedge \theta$ дифференциальных форм при $\deg \omega = 1$ и $\deg \theta = 1$ переходит в силу наших отождествлений в векторное произведение полей, а при $\deg \omega = 1$ и $\deg \theta = 2$ — в их скалярное произведение (и при $\deg \omega = 0$ является произведением поля θ на функцию ω). Поэтому формула

$$
d(f\omega) = f\,d\omega + df \wedge \omega
$$

даст нам соотношения

$$\text{(8)}\qquad \operatorname{grad}(FG) = F \operatorname{grad} G + G \operatorname{grad} F,$$

$$\text{(9)}\qquad \operatorname{rot}(F\boldsymbol{u}) = F \operatorname{rot} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} F \times \boldsymbol{u},$$

$$\text{(10)}\qquad \operatorname{div}(F\boldsymbol{u}) = F \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \operatorname{grad} F \cdot \boldsymbol{u},$$

а формула

$$d(\omega \wedge \theta) = d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\omega, \qquad \omega,\ \theta \in \Omega^1,$$

— соотношение

$$\text{(11)}\qquad \operatorname{div}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = (\operatorname{rot} \boldsymbol{u})\, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}.$$

Конечно, формулы (8)—(11) без труда получаются и прямым вычислением.

Мнемоническая формула (4) наводит на мысль ввести в рассмотрение сомволическое векторное поле

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

Тогда поле $\operatorname{rot} \boldsymbol{u}$ будет векторным произведением $\nabla \times \boldsymbol{u}$ поля ∇ на поле $\boldsymbol{u}$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{u},$$

функция $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ — скалярным произведением $\nabla \boldsymbol{u}$ поля ∇ на поле $\boldsymbol{u}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = \nabla \boldsymbol{u},$$

а поле $\operatorname{grad} F$ — если записывать скалярный множитель справа — произведением ∇F функции F на поле ∇:

$$\operatorname{grad} F = \nabla F.$$

Эти представления операторов rot, div и grad через символический оператор ∇ позволяют записать соотношения (8)—(11) в виде одного удобного для запоминания тождества

$$\text{(12)}\qquad \nabla \,①\, (\alpha \,①\, \gamma) = \nabla \,①\, (\overset{\downarrow}{\alpha} \,②\, \beta) + \nabla \,①\, (\alpha \,②\, \overset{\downarrow}{\beta}),$$

где α и β — либо функции, либо поля, ① и ② — два из трех возможных умножений (на функцию, скалярное или векторное), а стрелка $\downarrow$ отмечает множитель, подвергающийся воздействию оператора ∇. Действительно, при $\alpha = F$ и $\beta = G$ — это, очевидно, формула (8), а при $\alpha = F$ и $\beta = \boldsymbol{u}$ в зависимости от выбора умножений — формулы (9) и (10). При $\alpha = \boldsymbol{u}$ и $\beta = \boldsymbol{v}$, в предположении, что ① — скалярное умножение, а ② — векторное, формула (12) имеет вид

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v})+\nabla(\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}).$$

Но в силу кососкоммутативности смешанного произведения (и коммутативности скалярного)

$$\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v})=\nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{v}\nabla\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}(\nabla\times\boldsymbol{u})=(\nabla\times\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$$

и

$$\nabla(\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}})=\nabla\boldsymbol{u}\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}=-\boldsymbol{u}\nabla\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}=-\boldsymbol{u}\nabla\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{u}(\nabla\times\boldsymbol{v}).$$

Поэтому в этом случае формула (12) сводится к формуле (11).

Заметим, что при $\alpha=\boldsymbol{u}$ и $\beta=\boldsymbol{v}$ в формуле (12) осталось еще два не рассмотренных случая:

$$\nabla(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})+\nabla(\boldsymbol{u}\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}) \tag{13}$$

и

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\nabla\times(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v})+\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}}). \tag{14}$$

Чтобы расшифровать эти формулы, мы для любого векторного поля $\boldsymbol{a}=A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}$ условимся под $\boldsymbol{a}\nabla$ понимать оператор $\mathfrak{a}\to\mathsf{F}$, действующий на поле $\boldsymbol{u}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ по формуле

$$(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{u}=A\frac{\partial P}{\partial x}+B\frac{\partial Q}{\partial y}+C\frac{\partial R}{\partial z}$$

(отказываясь тем самым в отношении символического вектора ∇ от коммутативности скалярного умножения). Тогда, раскрывая двойные векторные произведения $\nabla\times(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v})$ и $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}})$ (по известной формуле $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c}\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$; см. лекцию I.15), мы получим, что

$$\nabla\times(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u}-(\nabla\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u}-(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}$$

и

$$\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}})=(\nabla\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}=(\operatorname{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}.$$

Так как по определению $\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})$, то формула (14) приобретает тем самым вид

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u}-(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}+(\operatorname{div}\boldsymbol{v})\boldsymbol{u}-(\operatorname{div}\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}. \tag{15}$$

Аналогично, применив к полям $\boldsymbol{u}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})$ и $\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{u})$ ту же формулу двойного векторного произведения, но переписанную в виде $\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$, мы получим соотношения

$$\boldsymbol{u}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\nabla(\boldsymbol{u}\overset{\downarrow}{\boldsymbol{v}})-(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}$$

и

$$\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}=\nabla(\overset{\downarrow}{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u}.$$

В силу этих соотношений формула (13) приобретает вид

$$(16)\quad \operatorname{grad}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{v})=\boldsymbol{u}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{u}\nabla)\boldsymbol{v}.$$

Замечательно, что, как показывает непосредственное вычисление, формулы (15) и (16) на самом деле справедливы (так что формула (12) верна всегда, когда она имеет смысл).

[Сложность формул (15) и (16) объясняется тем, что значения оператора rot на векторном поле $\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}$ и оператора grad на функции $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}$ не имеют прямой интерпретации в терминах внешнего дифференцирования форм.]

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{a}$ — постоянный вектор. Найдем поле $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})$, где, как всегда, $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$. Ясно, что $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$ и $(\boldsymbol{r}\nabla)\boldsymbol{a}=0$. Кроме того, как показывает непосредственное вычисление, $\operatorname{rot}\boldsymbol{r}=0$ (поле $\boldsymbol{r}$ центрально) и $(\boldsymbol{a}\nabla)\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}$. Следовательно, $\operatorname{grad}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{a}$.

Компонируя операторы grad, rot и div, мы получим операторы

$$\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}\colon \mathbf{F}\longrightarrow\mathfrak{a},\qquad \operatorname{div}\circ\operatorname{grad}\colon \mathbf{F}\longrightarrow\mathbf{F},$$
$$\operatorname{grad}\circ\operatorname{div}\colon \mathfrak{a}\longrightarrow\mathfrak{a},\qquad \operatorname{rot}\circ\operatorname{rot}\colon \mathfrak{a}\longrightarrow\mathfrak{a},$$
$$\operatorname{div}\circ\operatorname{rot}\colon \mathfrak{a}\longrightarrow\mathbf{F}.$$

Операторы $\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad}$ и $\operatorname{div}\circ\operatorname{rot}$, как мы знаем, тождественно равны нулю. [Заметим, что оператор ∇ сводит это к утверждению, что векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю: $(\operatorname{rot}\circ\operatorname{grad})F=\nabla\times\nabla F=(\nabla\times\nabla)F=0$ и $(\operatorname{div}\circ\operatorname{rot})\boldsymbol{u}=\nabla(\nabla\times\boldsymbol{u})=(\nabla\times\nabla)\boldsymbol{u}=0$.]

Из остальных операторов наибольший интерес представляет оператор

$$\operatorname{div}\circ\operatorname{grad}=\nabla^2.$$

Этот оператор обозначается символом Δ и называется *оператором Лапласа* (или *лапласианом*). Каждую функцию F он переводит в функцию

$$\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}.$$

С его помощью записываются важнейшие уравнения математнческой физики, которым по учебному плану университетов посвящен отдельный курс.

Оператор Δ можно применять и к векторным полям, воздействуя им на каждую компоненту в отдельности: если $\boldsymbol{u} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, то по определению

$$\Delta\boldsymbol{u} = (\Delta P)\,\boldsymbol{i} + (\Delta Q)\,\boldsymbol{j} + (\Delta R)\,\boldsymbol{k}.$$

Тогда будет иметь место формула

$$\operatorname{rot} \circ \operatorname{rot} = \operatorname{grad} \circ \operatorname{div} - \Delta.$$

Действительно, согласно формуле для двойного векторного произведения

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{u}) = \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{u}) = \nabla\,(\nabla\boldsymbol{u}) - (\nabla\nabla)\,\boldsymbol{u}. \ \square$$

[Конечно, это не доказательство, а лишь эвристическое подтверждение. Настоящим доказательством, которое мы предоставим читателю, будет лишь прямое вычисление с помощью формул (2), (3) и (5).]

Можно составлять и другие дифференциальные выражения. Например, для любых двух функций F и G определено скалярное произведение их градиентов:

$$\operatorname{grad} F \operatorname{grad} G = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Оно обозначается символом $\Delta(F, G)$ и называется *смешанным дифференциальным параметром Бельтрами функций* F и G. В частности, при $F = G$ мы получаем скалярный квадрат градиента:

$$\Delta(F, F) = (\operatorname{grad} F)^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Он обозначается символом $\Delta_1 F$ и называется *первым дифференциальным параметром Бельтрами функции* F (ср. с лекцией 3).

Смешанное произведение градиентов трех функций называется *дифференциальным параметром Дарбу*. Впрочем, этот термин ныне почти совсем не употребляется, поскольку это смешанное произведение является не чем иным, как якобианом отображения, задаваемого данными тремя функциями.

С помощью операторов векторного анализа можно в удобной и компактной форме представить формулу Гаусса—Остроградского (и формулу Стокса).

Пусть $\mathscr{D}$—двумерная ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ (с краем или без). Мы знаем (см. замечание 2 в лекции 27), что ориентация поверхности $\mathscr{D}$ задается некоторым гладким полем $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}(M)$ отличных от нуля нормальных векторов, которое после нормировки можно считать состоящим из единичных векторов.

Произвольное векторное поле $\boldsymbol{a}$, определенное в открытом множестве W, содержащем поверхность $\mathscr{D}$, задает на $\mathscr{D}$ функцию a_n, сопоставляющую каждой точке $M\in\mathscr{D}$ проекцию $a_n(M)=\boldsymbol{a}(M)\boldsymbol{n}(M)$ вектора $\boldsymbol{a}(M)$ на направление вектора $\boldsymbol{n}(M)$ (так называемую *нормальную составляющую* вектора $\boldsymbol{a}(M)$).

Определение 1. Интеграл

$$\int\limits_{\mathscr{D}} a_n\,d\sigma, \tag{17}$$

от функции a_n по поверхности $\mathscr{D}$ называется *потоком* поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность $\mathscr{D}$. (Здесь $d\sigma$—элемент площади поверхности $\mathscr{D}$; см. пример 2 лекции 24.)

Подчеркнем, что в формуле (17) имеется в виду интеграл первого рода (от плотности).

Если поле $\boldsymbol{a}$ является полем скоростей некоторой жидкости, то поток (17) равен количеству жидкости, протекающей за единицу времени через поверхность $\mathscr{D}$.

Если поверхность $\mathscr{D}$ элементарна, то для любой ее параметризации $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, *согласованной с ориентацией*, т. е. такой, что векторы $\boldsymbol{r}_u$ и $\boldsymbol{r}_v$ составляют положительно ориентированный базис касательной плоскости, вектор нормали $\boldsymbol{n}$ задается формулой

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{|\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v|}=\frac{\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

(ср. лекцию 4). С другой стороны, из лекции 3 мы знаем, что элемент площади поверхности задается формулой $d\sigma=\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv$. Поэтому для потока (17) имеет место формула

$$\int\limits_{\mathscr{D}} a_n\,d\sigma=\iint\limits_U(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}_u\boldsymbol{r}_v)\,du\,dv=\iint\limits_U\begin{vmatrix}P & Q & R\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}du\,dv, \tag{18}$$

где P, Q, R — координаты вектора $\boldsymbol{a}$, а U — область плоскости $\mathbb{R}^2$, на которой определена параметризация $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$. Чтобы вычислить поток через неэлементарную поверхность, надо разбить ее на элементарные части и к каждой применить формулу (18).

Вспомним теперь, что полю $\boldsymbol{a}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ отвечает дифференциальная форма

$$P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy,$$

а этой форме — интеграл

$$(19)\quad \int_{\mathcal{D}} P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy=\iint_{\mathcal{D}} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy$$

(см. формулу (13) лекции 27). В случае, когда поверхность $\mathcal{D}$ элементарна и параметризована (с параметризацией $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$, определенной на открытом множестве $U\subset\mathbb{R}^2$), то, расшифровав определение интеграла (19), мы немедленно получим, что он выражается формулой

$$\iint_U\left[P\begin{vmatrix} y_u & z_u\\ y_v & z_v\end{vmatrix}-Q\begin{vmatrix} x_u & z_u\\ x_v & z_v\end{vmatrix}+R\begin{vmatrix} x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}\right]du\,dv=\iint_U\begin{vmatrix} P & Q & R\\ x_u & y_u & z_u\\ x_v & y_v & z_v\end{vmatrix}du\,dv.$$

Сравнение этой формулы с формулой (18) обнаруживает, что *поток* (17) *поля $\boldsymbol{a}$ через поверхность $\mathcal{D}$ выражается интегралом* (19):

$$(20)\qquad \int_{\mathcal{D}} a_n\,d\sigma=\iint_{\mathcal{D}} P\,dy\,dz+Q\,dz\,dx+R\,dx\,dy.$$

[Доказанная для элементарных поверхностей эта формула по аддитивности верна и для любых поверхностей.]

Заметим, что формула (20) выражает поток через поверхностный интеграл в т о р о г о р о д а.

В случае, когда поверхность является краем ∂D области с регулярной границей, интеграл (19) является не чем иным, как интегралом, фигурирующим в правой части формулы Гаусса—Остроградского (см. формулу (6) лекции 27). Поскольку подынтегральная функция в левом интеграле этой формулы есть не что иное, как $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$, мы видим, что формула Гаусса—Остроградского может быть переписана в следующем виде:

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV = \oiint\limits_{\partial D} a_n\, d\sigma, \tag{21}$$

где dV обозначает $dx\,dy\,dz$ (а знак $\oiint$ справа подчеркивает, что интегрирование ведется по замкнутой поверхности). Словами: *поток векторного поля через границу области равен интегралу от расходимости поля по области.*

В случае, когда $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} F$, нормальная составляющая $a_n = \operatorname{grad} F \cdot \boldsymbol{n}$ обозначается символом $\frac{\partial F}{\partial n}$ и называется *производной функции F по направлению нормали* (или короче—*нормальной производной*). Так как $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \Delta F$, то формула (21) приобретает в этом случае вид

$$\iiint\limits_D \Delta F\, dV = \oiint\limits_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma. \tag{22}$$

При $\boldsymbol{a} = F \operatorname{grad} G$, согласно формуле (10),

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = F \operatorname{div} \operatorname{grad} G + \operatorname{grad} F \cdot \operatorname{grad} G = F \cdot \Delta G + \Delta (F,\ G),$$

а

$$a_n = F \operatorname{grad} G \cdot \boldsymbol{n} = F \frac{\partial G}{\partial n}.$$

Поэтому

$$\iiint\limits_D [F \cdot \Delta G + \Delta (F,\ G)]\, dV = \oiint\limits_{\partial D} F \frac{\partial G}{\partial n}\, d\sigma. \tag{23}$$

Эта формула называется **п е р в о й ф о р м у л о й Г р и н а**. При $F = G$ она превращается в формулу

$$\iiint\limits_D (F \cdot \Delta F + \Delta_1 F)\, dV = \oiint\limits_{\partial D} F \frac{\partial F}{\partial n}\, d\sigma,$$

а при $F = 1$—в формулу (22).

Переставив в формуле (23) функции F и G и вычтя полученную формулу из исходной, мы придем к формуле

$$\iiint\limits_D (F \cdot \Delta G - G \cdot \Delta F)\, dV = \oiint\limits_{\partial D} \left(F \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial F}{\partial n} \right) d\sigma, \tag{24}$$

известной как **в т о р а я ф о р м у л а Г р и н а**.

Для поля скоростей жидкости правый интеграл в формуле (21) равен количеству жидкости, вытекающей из области D. Следовательно, его положительность указывает на наличие в области *источников* — точек, в которых жидкость появляется, а отрицательность указывает на наличие *стоков* — точек, в которых жидкость исчезает. (Впрочем, стоки удобно также называть источниками, но с отрицательным дебитом.) Сам же интеграл выражает собой полную мощность источников поля в области D. Поэтому, разделив его на объем этой области, мы получим среднюю мощность этих источников в D.

Фиксировав в области D некоторую точку M_0, рассмотрим последовательность $\{D_n\}$ областей, стягивающихся к этой точке, т. е. таких, что $M_0 \in D_n$ и $\operatorname{diam} D_n \to 0$ при $n \to \infty$, где $\operatorname{diam} D_n$ — диаметр области D_n. Тогда предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\iint\limits_{\partial D_n} a_n \, d\sigma}{V_n}$$

(когда он существует), где V_n — объем области D_n, является не чем иным, как *плотностью источников* поля в точке M_0. Но, согласно формуле (21), этот предел равен

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\iiint\limits_{D_n} \operatorname{div} \boldsymbol{a} \, dV}{V_n}$$

и, значит, равен значению функции $\operatorname{div} \boldsymbol{a}$ в точке M_0. Таким образом, *расходимость векторного поля является не чем иным, как плотностью его источников*:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\iint\limits_{D_n} a_n \, d\sigma}{V_n}.$$

Это дает новое определение расходимости (и, в частности, при $\boldsymbol{a} = \operatorname{grad} F$ — новое определение оператора Лапласа ΔF), имеющее преимущество физической наглядности (и объясняет, почему поля с $\operatorname{div} \boldsymbol{a} = 0$ называются полями без источников).

Замечание 1. Полезно иметь в виду, что это определение расходимости и оператора Лапласа пригодно и для негладких (даже разрывных) полей и функций. Нужно лишь, чтобы существовал соответствующий предел.

Как мы знаем (см. выше пример 1), поле

$$a = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} m_0 \tag{25}$$

тяготеющей массы не имеет источников (в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, где оно определено). С другой стороны, если S_ε—сфера радиуса ε с центром в точке $\mathbf{0}$, то

$$\oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} a_n \, d\sigma = -m_0 \oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} \frac{d\sigma}{r^2} = -\frac{m_0}{\varepsilon^2} \oint\!\!\!\oint_{S_\varepsilon} d\sigma = -4\pi m_0, \tag{26}$$

поскольку интеграл $\oint\!\!\oint_{S_\varepsilon} d\sigma$ равен площади $4\pi\varepsilon^2$ сферы S_ε.

Это означает, что *источник гравитационного поля* (25) *расположен в точке* $\mathbf{0}$ *и его мощность пропорциональна массе*. (Знак минус в формуле (26) указывает, что на самом деле это не источник, а сток.)

Таким образом, можно сказать, что источниками (стоками) гравитационных полей являются тяготеющие массы.

Замечание 2. Введя в рассмотрение ньютоновские потенциалы массивных тел, можно показать, что этот вывод остается в силе и для гравитационных полей любой конфигурации, но все это далеко выходит за рамки нашего изложения. [Такого рода вопросами занимается теория потенциала, излагающаяся в курсе уравнений математической физики.]

Фигурирующий в формуле Стокса (см. формулу (14) лекции 27) интеграл по поверхности является в силу общей формулы (20) не чем иным, как потоком

$$\iint_{\mathscr{D}} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_n \, d\sigma$$

вихря поля $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ через ориентированную поверхность $\mathscr{D}$. Чтобы аналогичным образом интерпретировать интеграл по краю поверхности, мы прежде всего заметим, что дифференциальная форма $\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, отвечающая векторному полю $\boldsymbol{a} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$, может быть представлена в виде скалярного произведения $\boldsymbol{a}\,d\boldsymbol{r}$, где

$$d\boldsymbol{r} = dx \cdot \boldsymbol{i} + dy \cdot \boldsymbol{j} + dz \cdot \boldsymbol{k},$$

и, значит, интеграл от формы ω по произвольной кривой γ может быть записан в виде

$$\int_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}. \tag{27}$$

Пусть кривая γ замкнута.

Определение 2. Интеграл (27) по замкнутой кривой γ называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{a}$ по γ.

Чтобы подчеркнуть замкнутость кривой γ, интеграл (27) обозначают в этом случае символом

$$\oint_{\gamma} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}. \tag{28}$$

В частности, циркуляция (28) определена по краю $\partial\mathscr{D}$ произвольной ориентируемой поверхности $\mathscr{D}$ и является не чем иным, как фигурирующим в формуле Стокса криволинейным интегралом.

Мы видим, таким образом, что формула Стокса для поверхностных интегралов в $\mathbb{R}^3$ может быть переписана в следующем виде:

$$\iint_{\mathscr{D}} (\operatorname{rot} \boldsymbol{a})_n\, d\sigma = \oint_{\partial\mathscr{D}} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{r}. \tag{29}$$

Словами: *циркуляция векторного поля по краю поверхности равна потоку вихря этого поля через поверхность.*

Для $\operatorname{rot} \boldsymbol{a}$ имеется и другая интегральная формула, которую можно рассматривать как один из вариантов формулы Гаусса—Остроградского.

Пусть по-прежнему $\mathscr{D}$ — ориентированная поверхность в $\mathbb{R}^3$ с полем единичных нормальных векторов $\boldsymbol{n}$, задающим данную ориентацию этой поверхности. Для любого векторного поля $\boldsymbol{u} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k}$, заданного на $\mathscr{D}$, мы определим *интеграл от* $\boldsymbol{u}$ *по* $\mathscr{D}$ формулой

$$\iint_{\mathscr{D}} \boldsymbol{u}\, d\sigma = \left(\iint_{\mathscr{D}} X\, d\sigma\right)\boldsymbol{i} + \left(\iint_{\mathscr{D}} Y\, d\sigma\right)\boldsymbol{j} + \left(\iint_{\mathscr{D}} Z\, d\sigma\right)\boldsymbol{k}.$$

В частности, это определение применимо к полю $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — произвольное векторное поле, определенное в области, содержащей поверхность $\mathscr{D}$.

Определение 3. В случае, когда поверхность $\mathscr{D}$ замкнута (компактна и не имеет края), интеграл

$$\iint_{\mathscr{D}} (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})\,d\sigma \tag{30}$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{a}$ по поверхности $\mathscr{D}$ и обозначается символом

$$\oiint_{\mathscr{D}} (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})\,d\sigma.$$

Если поверхность $\mathscr{D}$ элементарна и $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$ — ее параметризация, то по уже известным нам основаниям

$$\iint_{\mathscr{D}} (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})\,d\sigma=\iint_{U} ((\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\times\boldsymbol{a})\,du\,dv, \tag{31}$$

где U — открытое множество плоскости $\mathbb{R}^2$, на котором задана параметризация $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(u, v)$.

Но

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{r}_u\times\boldsymbol{r}_v)\times\boldsymbol{a}&=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}_u)\,\boldsymbol{r}_v-(\boldsymbol{a}\boldsymbol{r}_v)\,\boldsymbol{r}_u=\\&=[(Px_u+Qy_u+Rz_u)\,x_v-(Px_v+Qy_v+Rz_v)\,x_u]\,\boldsymbol{i}+\\&+[(Px_u+Qy_u+Rz_u)\,y_v-(Px_v+Qy_v+Rz_v)\,y_u]\,\boldsymbol{j}+\\&+[(Px_u+Qy_u+Rz_u)\,z_v-(Px_v+Qy_v+Rz_v)\,z_u]\,\boldsymbol{k}=\\&=\left(R\begin{vmatrix} z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix}-Q\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\right)\boldsymbol{i}+\left(P\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}-R\begin{vmatrix} y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}\right)\boldsymbol{j}+\\&\qquad+\left(Q\begin{vmatrix} y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}-P\begin{vmatrix} z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix}\right)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

и

$$\iint_{\mathscr{D}} R\,dz\,dx-Q\,dx\,dy=\iint_{U}\left(R\begin{vmatrix} z_u & z_v\\ x_u & x_v\end{vmatrix}-Q\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}\right)du\,dv,$$

$$\iint_{\mathscr{D}} P\,dx\,dy-R\,dy\,dz=\iint_{U}\left(P\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}-R\begin{vmatrix} y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}\right)du\,dv,$$

$$\iint_{\mathscr{D}} Q\,dy\,dz-P\,dz\,dx=\iint_{U}\left(Q\begin{vmatrix} y_u & y_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}-P\begin{vmatrix} x_u & x_v\\ z_u & z_v\end{vmatrix}\right)du\,dv.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathscr{D}} (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})\,d\sigma&=\left(\iint_{\mathscr{D}} R\,dz\,dx-Q\,dx\,dy\right)\boldsymbol{i}+\\&+\left(\iint_{\mathscr{D}} P\,dx\,dy-R\,dy\,dz\right)\boldsymbol{j}+\left(\iint_{\mathscr{D}} Q\,dy\,dz-P\,dz\,dx\right)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

По аддитивности эта формула верна и для произвольной (неэлементарной) поверхности $\mathscr{D}$.

Но если $\mathscr{D}=\partial D$, где D — область с регулярной границей, то по формуле Гаусса — Остроградского

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial D} R\,dz\,dx - Q\,dx\,dy = \iiint_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dV,$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial D} P\,dx\,dy - R\,dy\,dz = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dV,$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial D} Q\,dy\,dz - P\,dz\,dx = \iiint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dV.$$

Поскольку

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

этим доказано, что *циркуляция векторного поля по границе ∂D области D равна интегралу по D от вихря этого поля*:

$$\oint\!\!\!\oint_{\partial D} (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{a})\,d\sigma = \iiint_D \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\,dV. \tag{32}$$

[В частности, отсюда следует, что вихрь векторного поля можно интерпретировать как *плотность циркуляции* этого поля (и тем самым, в частности, получить новое определение вихря, пригодное и для негладких полей).]

Формула (32) является частным случаем некой общей формулы, доказательство которой, как это часто бывает, существенно короче доказательства ее частного случая (32).

Пусть φ — линейное отображение пространства $\mathbb{R}^3$ либо в пространство функций F, либо в пространство векторных полей $\mathfrak{a}$. (Линейность означает, что для любого вектора $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ пространства $\mathbb{R}^3$ имеет место равенство $\varphi(\boldsymbol{r})=x\varphi(\boldsymbol{i})+y\varphi(\boldsymbol{j})+z\varphi(\boldsymbol{k})$.) Отнесем отображению φ функцию (или поле) $\varphi(\nabla)$ определенную(ое) формулой

$$\varphi\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\boldsymbol{i}) + \frac{\partial}{\partial y}\varphi(\boldsymbol{j}) + \frac{\partial}{\partial z}\varphi(\boldsymbol{k}).$$

Например, если $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}F$ (произведение вектора $\boldsymbol{r}$ на функцию F), то

$$\varphi(\nabla) = \nabla F = \frac{\partial F}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\boldsymbol{k} = \operatorname{grad} F,$$

если $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{ra}$ или $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}$ — поле, то соответственно

$$\varphi(\nabla)=\nabla\boldsymbol{a}=\operatorname{div}\boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad \varphi(\nabla)=\nabla\times\boldsymbol{a}=\operatorname{rot}\boldsymbol{a}.$$

Пусть для определенности $\varphi\colon \mathbb{R}^3\to\mathsf{F}$. Тогда $\varphi(\nabla)=\operatorname{div}\boldsymbol{a}$, где $\boldsymbol{a}=\varphi(\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+\varphi(\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+\varphi(\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}$, и, значит, согласно формуле Гаусса—Остроградского (20), для любой области D будет иметь место равенство

$$\iiint\limits_D \varphi(\nabla)\,dV=\oiint\limits_{\partial D} a_n\,d\sigma.$$

Но если $\boldsymbol{n}=\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k}$, то

$$a_n=\boldsymbol{an}=\varphi(\boldsymbol{i})\cos\alpha+\varphi(\boldsymbol{j})\cos\beta+\varphi(\boldsymbol{k})\cos\gamma=$$
$$=\varphi(\cos\alpha\cdot\boldsymbol{i}+\cos\beta\cdot\boldsymbol{j}+\cos\gamma\cdot\boldsymbol{k})=\varphi(\boldsymbol{r})$$

и, значит,

$$\iiint\limits_D \varphi(\nabla)\,dV=\oiint\limits_{\partial D} \varphi(\boldsymbol{n})\,d\sigma. \tag{33}$$

Если $\varphi\colon \mathbb{R}^3\to\mathfrak{a}$, то, применив формулу (33) к каждой компоненте отображения φ, мы немедленно получим, что эта формула верна и в этом случае.

Формула (33) называется **обобщенной формулой Гаусса—Остроградского**.

При $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{ra}$ она переходит в формулу (20), а при $\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}$ — в формулу (32).